

Estadística



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS

Supongamos que realizamos el experimento: tirar dos veces un dado.

Hasta ahora, hemos tratado sucesos, por ejemplo:

$A_2 = \text{“la suma de dos tiradas de un dado es 2”}$.

Podemos querer ahora, por ejemplo, analizar todos los sucesos asociados a los distintos valores que da la suma de las dos tiradas.

Por ejemplo, $A_3 = \text{“la suma de dos tiradas de un dado es 3”}$, $A_4 = \text{“la suma de dos tiradas de un dado es 4”}$, etc.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

Podríamos para ello definir una función:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

que asocie a cada suceso elemental (en este caso los valores obtenidos en cada tirada) la suma de los valores obtenidos.

$$X = \{\text{suma de las dos tiradas}\}$$

Tendríamos entonces que X toma el valor 2 ($X = 2$) sólo para el suceso $(1,1)$, es decir $X(1,1) = 2$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

Observar que, por ejemplo:

$$\{(a,b) / X(a,b) = 4\} = A4 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$

$$\{(a,b) / X(a,b) = 2\} = A2 = \{(1,1)\}$$

$$\{(a,b) / X(a,b) = 7\} = A7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

Definición

Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral, de forma que la probabilidad de que la variable tome un valor sea igual a la probabilidad de que ocurra cierto suceso.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

Ejemplo:

Consideramos el experimento de lanzar dos veces un dado y la variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$X =$ suma de las dos tiradas

x	<i>Sucesos elementales</i>					
2	(1, 1)					
3	(1, 2)	(2, 1)				
4	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)			
5	(1, 4)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 1)		
6	(1, 5)	(2, 4)	(3, 3)	(4, 2)	(5, 1)	
7	(1, 6)	(2, 5)	(3, 4)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 1)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

Observaciones:

- La variable X no recibe el calificativo de *aleatoria* por el hecho de que atribuya de modo imprevisible un valor cualquiera a un elemento e de Ω , ya que este valor está definido de forma precisa (determinística). Lo que es aleatorio en realidad, es que al hacer el experimento, no sabemos qué elemento de Ω puede ocurrir.
- La composición de una función real con una variable es también

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS

Si sobre los elementos de Ω existe una *distribución de probabilidad*, esta se transmite a los valores que toma la variable X . Es decir, toda v.a. conserva la estructura probabilística del experimento aleatorio que describe:

$$P(X = x) = P(\{s \in \Omega : X(s) = x\})$$

Los sucesos que nos van a interesar ahora son del tipo $X \in A$, donde A es un subconjunto de \mathbb{R}

$$P(X \in A) = P(\{s \in \Omega : X(s) \in A\})$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo

- $P(X=2)=P((1,1))=1/36$
- $P(X=3)=P((1,2);(2,1))=2/36$
- $P(X=4)=3/36$
- $P(X=5)=4/36$
- $P(X=6)=5/36$
- $P(X=7)=6/36$
- $P(X=8)=5/36$
- $P(X=9)=4/36$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

Observaciones

- Los valores de una variable aleatoria cambian de un experimento a otro al cambiar los resultados del experimento.
- Una variable aleatoria está definida por:
 - Los valores que toma.
 - La probabilidad de tomar cada uno de esos valores

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias

El **rango** de una variable aleatoria es el conjunto de valores que puede tomar la variable.

Atendiendo al rango las variables se pueden clasificar como:

Variables aleatorias **discretas**: aquellas en las que el rango es finito o infinito numerable

Variables aleatorias **continuas**: aquellas en las que el rango es un intervalo de números reales

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS

VARIABLES ALEATORIAS **DISCRETAS**: frecuentemente cuentan el número de veces que ocurre algo.

Ejemplos:

- Número de caras en tres tiradas de una moneda.
- Número de llamadas que recibe un teléfono en una hora

VARIABLES ALEATORIAS **CONTINUAS**: frecuentemente miden una magnitud

Ejemplos:

- Tiempo que esperan los clientes para pagar en un supermercado

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta, con posibles valores x_1, x_2, x_3, \dots

Se define su **función de probabilidad o de masa** como

$$p_i = P(X = x_i)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Las propiedades de la función de probabilidad se deducen de forma inmediata de los axiomas de la probabilidad:

1. $0 \leq p(x_i) \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$

(si la variable toma infinitos valores, se tiene $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$)

3. $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(X = a + 1) + \dots + P(X = b) = \sum_{x_i=a}^b p(x_i)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Ejemplo

Lanzamos 3 veces moneda. Espacio muestral:

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$$

Consideramos la variable aleatoria

$$X = \{\text{n}^\circ \text{ de caras al lanzar tres veces una moneda}\}$$

Posibles valores de X : 0, 1, 2 y 3

La función de masa es:

$$p(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8} = 0,125 \quad p(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8} = 0,375$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Ejemplo

¿Cuál será la probabilidad de que salgan como mucho dos caras?

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,125 + 0,375 + 0,375 \\ = 0,875$$

¿y la probabilidad de que el número de caras esté entre 1 y 2?

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,375 + 0,375 = 0,75$$

Cartagena99

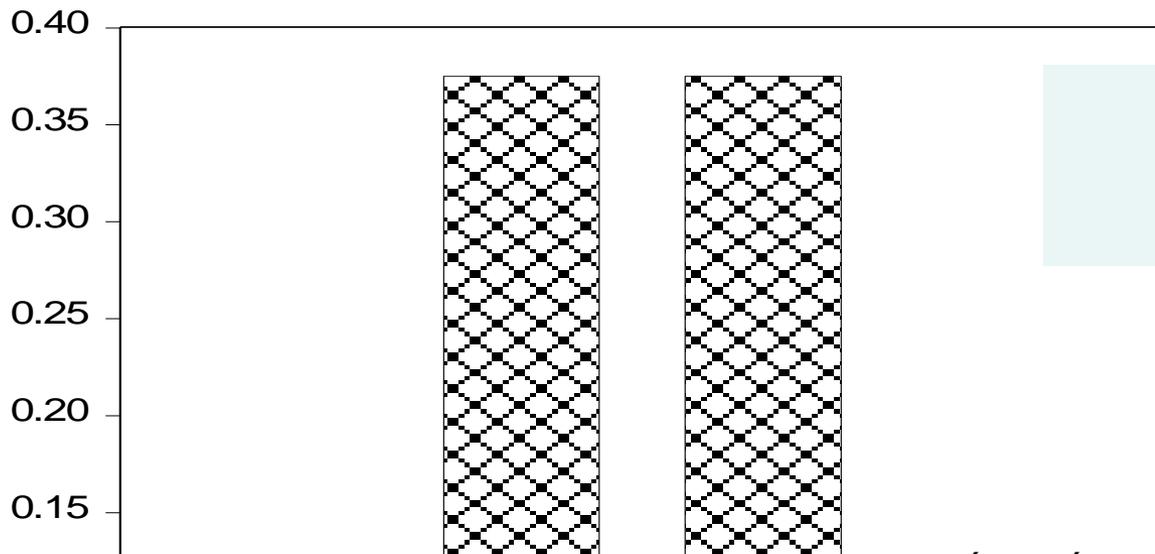
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Ejemplo

Gráfica de la función de probabilidad de X:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Variables aleatorias discretas

Ejercicio 1:

Una vendedora ha concertado dos citas para vender enciclopedias. Cree que en la primera cita puede realizar una venta con una probabilidad 0,3; que en la segunda lo puede hacer con una probabilidad de 0,6, y que los resultados de las dos citas son independientes. ¿Cuál es la función de probabilidad de X , el número de ventas realizadas?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Solución

La variable X puede tomar cualquiera de los valores 0, 1 ó 2. Será igual a cero si no vende en ninguna de las citas; por tanto:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\{\text{no vende en la primera, no vende en la segunda}\}) \\ &= P(\{\text{no vende en la primera}\})P(\{\text{no vende en la segunda}\}) \\ &= (1-0,3)(1-0,6) = 0,28 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Solución

La variable X será igual a uno si consigue vender en la primera pero no en la segunda, o si no vende en la primera pero si en la segunda. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{\text{vende en la primera, no vende en la segunda}\}) + \\ &\quad P(\{\text{no vende en la primera, vende en la segunda}\}) + \\ &= P(\{\text{vende en la primera}\})P(\{\text{no vende en la segunda}\}) + \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Solución

La variable X será igual a 2 si consigue vender en la primera y en la segunda. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\{\text{vende en la primera, vende en la segunda}\}) + \\ &= P(\{\text{vende en la primera}\})P(\{\text{vende en la segunda}\}) \\ &= 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Función de distribución

En ocasiones nos puede interesar la probabilidad de que una variable tome un valor menor o igual que una cantidad. Definimos entonces la **función de distribución**

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Función de distribución

La función de distribución, definida sobre todo \mathbb{R} , cumple:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Es no decreciente.

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

D(... / V / ...)
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Función de distribución

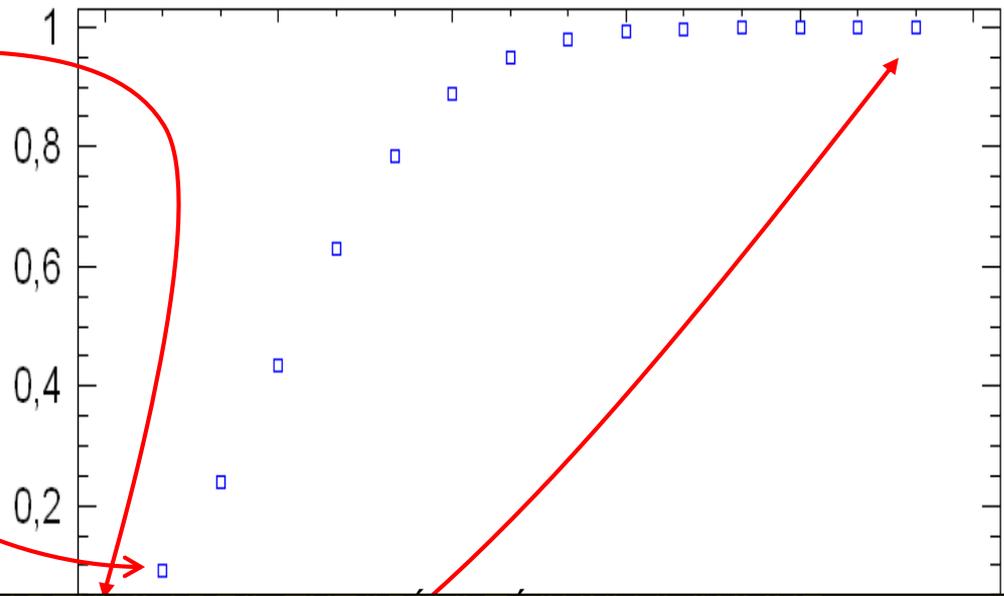
Si X toma valores $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = p(x_1)$$

$$F(x_2) = P(X \leq x_2) = p(x_1) + p(x_2)$$

⋮

$$F(x_n) = P(X \leq x_n) = \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Variables aleatorias discretas

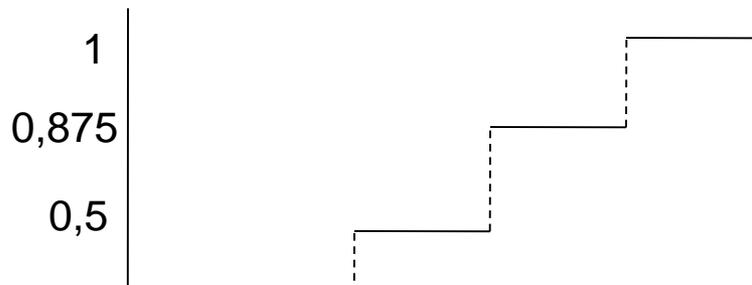
Ejemplo 1

Continuando con el ejemplo anterior: n° caras al lanzar tres veces una moneda. Calculemos la función de distribución

$$P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0,125 \quad P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,125 + 0,375 = 0,5$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5 + 0,375$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,875 + 0,125$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias discretas

Ejemplo 2:

En ocasiones, algunas líneas aéreas venden más pasajes que los disponibles en un vuelo. Una compañía ha vendido 205 billetes que corresponden a un avión con 200 plazas.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de viajeros que se presentan en el aeropuerto para viajar en el avión. La distribución de X es

x	198	199	200	201	202	203	204	205
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

1. Hallar la probabilidad de que todos los pasajeros que llegan a tomar el vuelo tengan plaza.

Queremos calcular $P(X \leq 200)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 200) &= P(X = 198) + P(X = 199) + P(X = 200) \\ &= 0,05 + 0,09 + 0,15 \\ &= 0,29 \end{aligned}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que se quede sin plaza alguno de los pasajeros que se presentan en el aeropuerto?

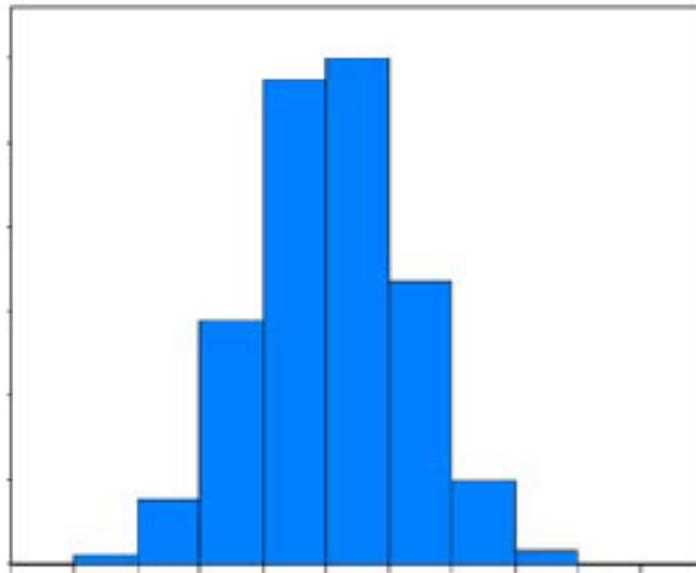
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

Si medimos una variable continua y la representamos en un histograma:



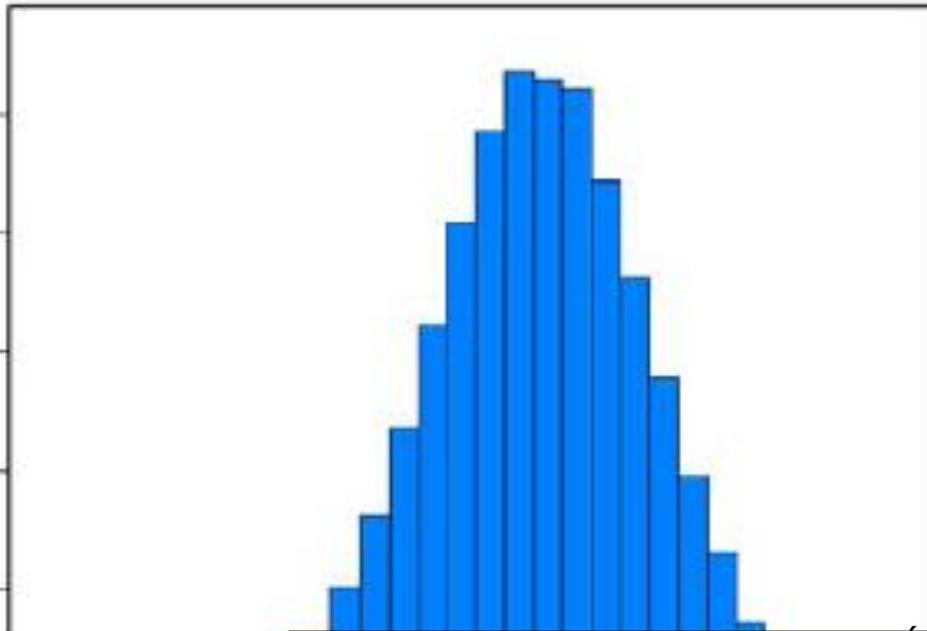
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

Y hacemos las clases cada vez más pequeñas:



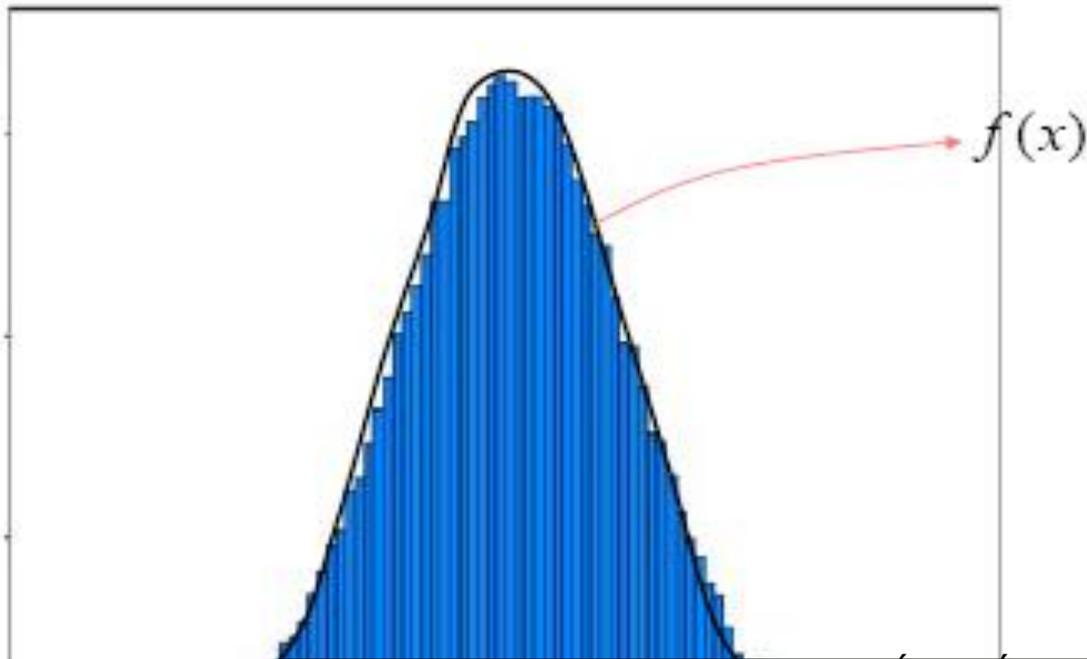
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

El polígono de frecuencias tenderá a una curva



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

Diferencias:

- Histograma o polígono:

Describe sólo a los n datos observados (MUESTRA)

La altura suele ser la frecuencia (absoluta o relativa) de cada intervalo

- Función de densidad:

Describe a TODA LA POBLACIÓN

Es la densidad de probabilidad o probabilidad por unidad de medida en

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

la altura de tal forma que el área represente a la frecuencia)

no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002, Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Cuando una variable es continua, no tiene sentido hacer la suma:

$$\sum_{x_i \in V} p(x_i)$$

ya que el conjunto de valores V que toma la variable es no numerable.

Lo natural es generalizar

$$\sum \rightarrow \int$$

Introducimos un nuevo concepto que sustituye en variables continuas al

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Función de densidad

La **función de densidad** describe la distribución de probabilidad de una variable continua. Es una función que verifica:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

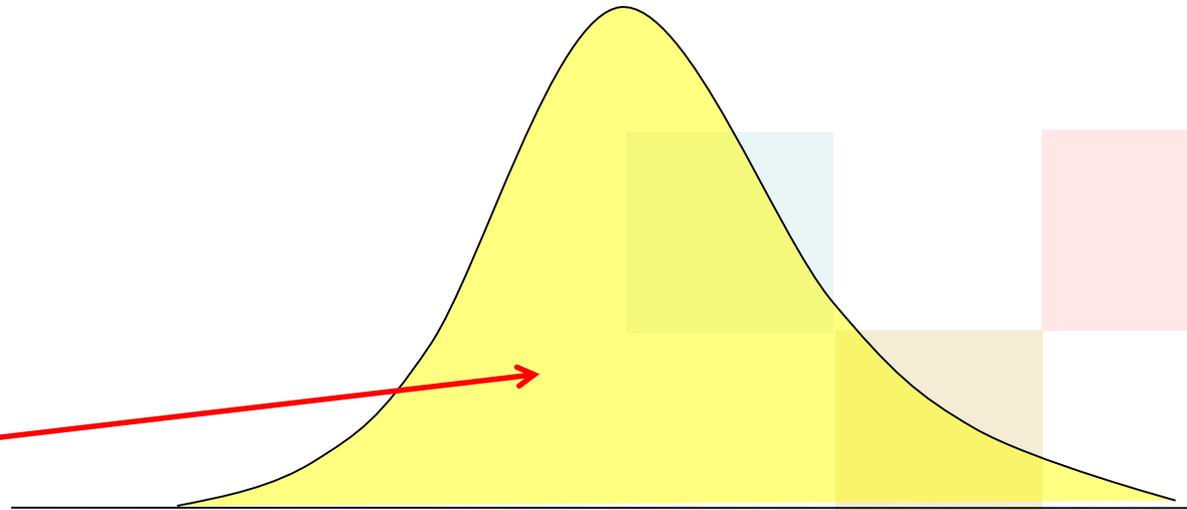
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Función de densidad

Gráficamente

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

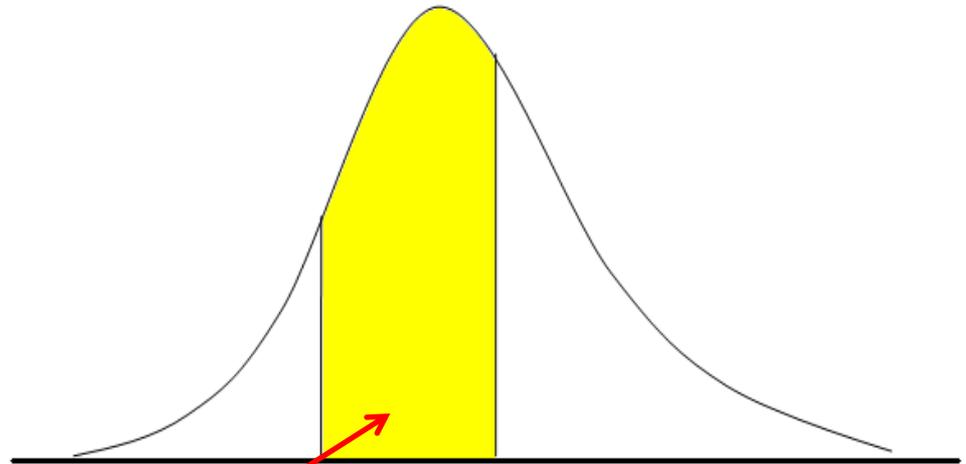
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Función de densidad

Gráficamente

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



Cartagena99

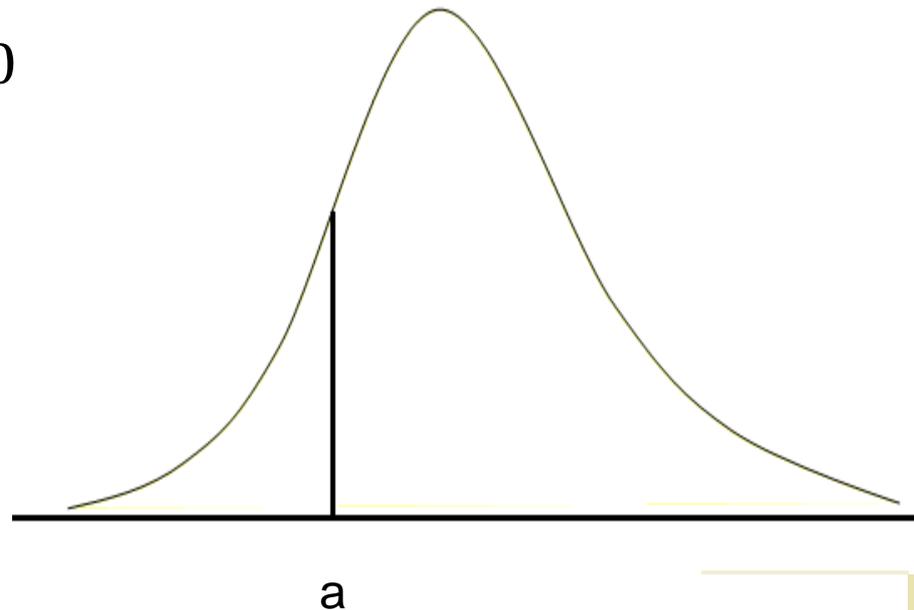
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

Observación

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$



Y por lo tanto se verifica

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

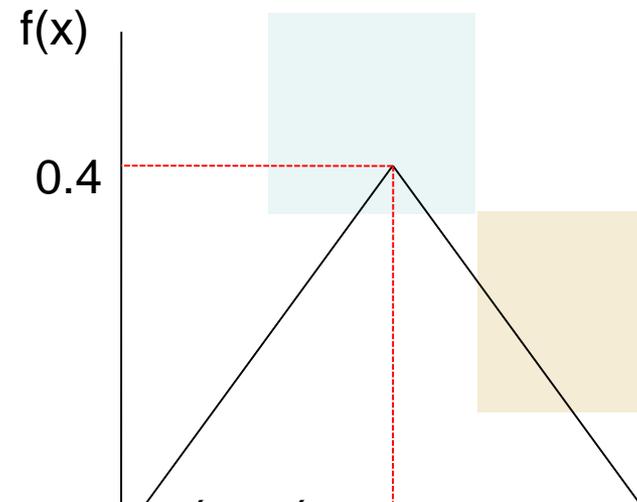
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

Ejemplo:

La función de densidad para el tiempo de uso de un tipo de máquinas durante un año (en horas x100) es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 0 < x < 2.5 \\ 0.8 - \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 2.5 < x < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

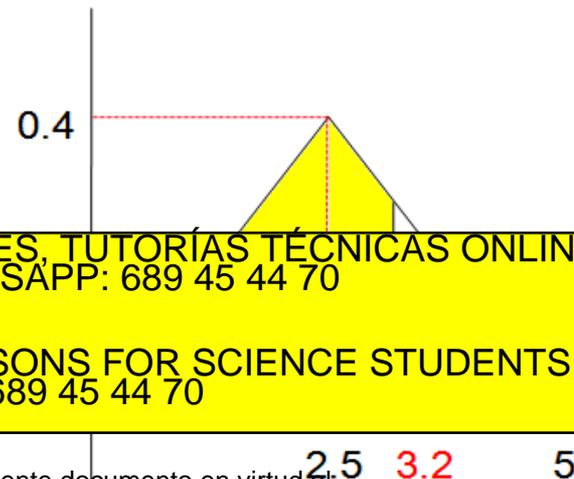
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que una máquina elegida al azar haya funcionado durante menos de 320 horas?

$$P(X < 3.2) = \int_0^{3.2} f(x) dx = \int_0^{2.5} \frac{0.4}{0.25} x dx + \int_{2.5}^{3.2} \left(8 - \frac{0.4}{0.25} x \right) dx = 0,74$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

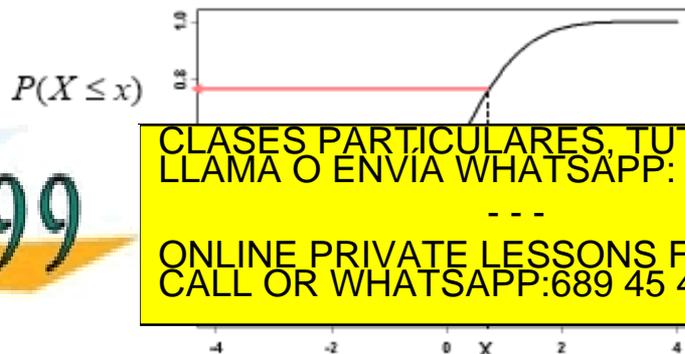
Cartagena99

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Función de distribución

Al igual que en el caso de variables discretas, podemos describir la distribución de una variable aleatoria continua mediante la **función de distribución**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

En el caso discreto la diferencia entre dos valores consecutivos de $F(x)$ proporciona la función de probabilidad. En el caso de variables continuas se cumple que:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

La función de distribución de una variable continua cumple las mismas propiedades que la de las variables discretas:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3. F es no decreciente, es decir $F(x) \leq F(x + \epsilon)$,
para $\epsilon > 0$
4. F es continua por la derecha

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Variables aleatorias continuas

Ejemplo:

La función de distribución para el tiempo de uso de un tipo de máquinas durante un año (en horas x100):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 0 < x < 2.5 \\ 0.8 - \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 2.5 < x < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{0.4}{0.25} u \, du$$

$$\text{si } 0 < x < 2.5$$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\text{si } x \geq 5$$

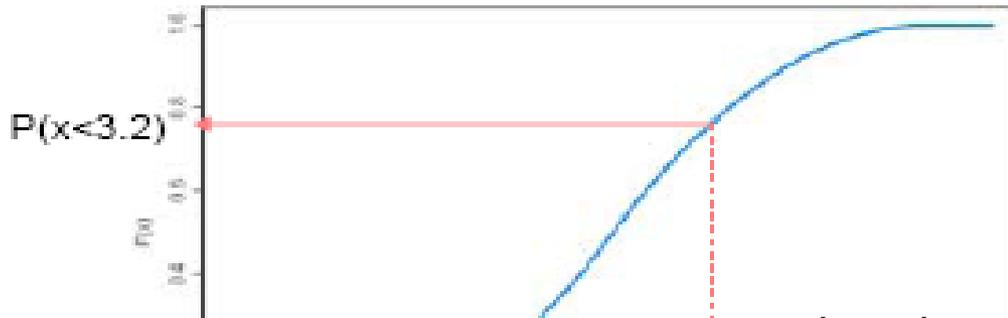
Cartagena99

Universidad

Variables aleatorias continuas

Ejemplo:

$$F(x) = \begin{cases} 0.08x^2 & \text{si } 0 < x < 2.5 \\ -1 + 0.8x - 0.08x^2 & \text{si } 2.5 < x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Medidas características de una variable

Medidas de centralización

MEDIA

En el caso de una muestra de datos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n$$

a cada valor se le asigna un peso $1/n$

La media μ o **esperanza** de una v.a. utiliza la probabilidad como peso:

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$$



v.a. discreta

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Algunas propiedades que cumple la esperanza

$$1. E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k g(x_i)p(x_i) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

$$2. E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \longrightarrow \text{Linealidad de la esperanza}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

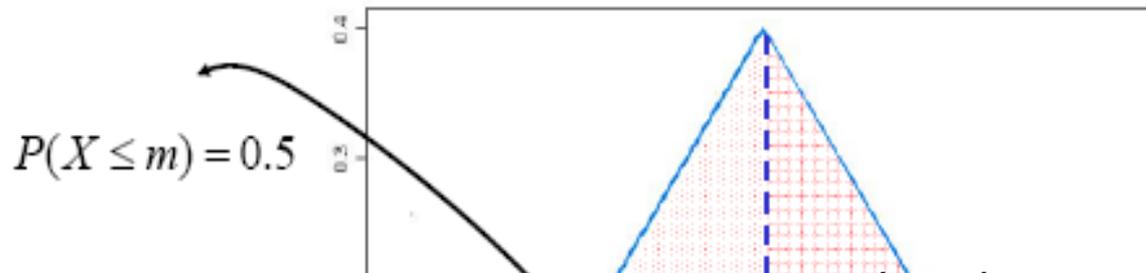
Medidas de centralización

MEDIANA

Intuitivamente: **Mediana** = valor que divide a la probabilidad total en dos partes iguales.

Definición: la mediana es el valor m que cumple:

$$F(m) = P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \text{ y } P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Medidas características de una variable

Ejemplo : En un puesto de feria se ofrece la posibilidad de lanzar a ciegas un dardo a unos globos. Si se consigue reventar un globo, se recibe un premio igual a una cantidad oculta tras el globo.

Supongamos que la probabilidad de acertar con algún globo es $1/3$. Los premios se distribuyen de la siguiente manera:

- 40% de premios de 0.30 Euros
- 30% de premios de 0.6 Euros
- 20% de premios de 1.5 Euros
- 10% de premios de 6.0 Euros

Si cada lanzamiento cuesta 0.9 Euros, ¿Cuál es la "ganancia"?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Medidas características de una variable

- Solución: Caracterizamos la Ganancia del Dueño:

$$G = \begin{cases} -5.1 & \text{premio de 6€} \\ -0.60 & \text{premio de 1.50€} \\ 0.30 & \text{premio de 0.60€} \\ 0.60 & \text{premio de 0.30€} \\ 0.90 & \text{no premio} \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Calculamos la función de masa:

- $P(G=-5.1)=(1/3)(10/100)$
- $P(G=-0.60)= (1/3)(20/100)$
- $P(G=0.30)= (1/3)(30/100)$
- $P(G=0.60)= (1/3)(40/100)$
- $P(G=0.90)=2/3$

$$E[G]=(- 5.1)(10/300)+(-0.60)(20/300)+(0.30)(30/300)+(0.60)(40/300)+(0.90)(2/3)=0.5€$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Esperanza matemática

Ejemplo: Una empresa de refrescos lanza una oferta para anunciar un nuevo producto. Asegura que en cada 1000 chapas hay 500 con *inténtelo otra vez*, 300 con premio de 0.30 euros, 150 con premio de 0.60 euros, 40 con premio de 3.00 euros y 10 con premio de 6.00 euros.

Un individuo, al que no le gusta el refresco, decide comprar una botella cuyo coste es de 0.6 euros.

Caracterizar su ganancia mediante una variable aleatoria. ¿Es

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Esperanza matemática

- **Solución:** Caracterizamos la Ganancia de la persona que compra la botella:

$$G = \begin{cases} -0.60 & \text{si no tiene premio} \\ -0.30 & \text{premio de 0.30€} \\ 0 & \text{premio de 0.60€} \\ 2.40 & \text{premio de 3€} \\ 5.40 & \text{premio de 6€} \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Esperanza matemática

- **¿Es razonable su decisión?**. La decisión de comprar la botella, solo por el premio (recordemos que no le gusta su contenido) será razonable si el valor esperado de la ganancia es positivo

Calculamos la función de masa:

- $P(G=-0.60)=500/1000=0.5$
- $P(G=-0.30)=300/1000=0.3$
- $P(G=0)=150/1000=0.15$
- $P(G=2.40)=40/1000=0.04$
- $P(G=5.40)=10/1000=0.01$

$$\begin{aligned} E[X] &= (-0.60) \cdot 0.5 + (-0.30) \cdot 0.3 \\ &+ 0 \cdot 0.15 + 2.40 \cdot 0.04 + 5.40 \cdot 0.01 \\ &= -0.24 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Medidas características de una variable

Ejemplo:

¿Cuál es el tiempo medio de funcionamiento de las máquinas?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 0 \leq x < 2.5 \\ 0.8 - \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 2.5 \leq x < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Momentos de una variable aleatoria

- Los **momentos** de una variable aleatoria son los valores esperados de ciertas funciones de la variables. Constituyen un conjunto de medidas descriptivas que pueden emplearse para caracterizar la distribución y especificarla si todos los datos son conocidos.
- Se pueden calcular momentos **respecto al origen** y momentos **respecto a la media**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Momentos de una variable aleatoria

- Momento de orden r respecto al origen

$$E[x^r] = \begin{cases} \sum x^r p(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int x^r f(x) dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

- Momento de orden r respecto a la media

$$E[(x - \mu)^r] = \begin{cases} \sum (x - \mu)^r p(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int (x - \mu)^r f(x) dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Momentos de una variable aleatoria

Observaciones:

- El momento respecto al origen de orden 1 es la **Esperanza**.

$$E[x] = \mu$$

- El momento respecto a la media de orden 0 es **1**.
- El momento respecto a la media de orden 1 es **0**.

• El momento respecto a la media de orden 2 es la **VARIANZA**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Medidas de dispersión

VARIANZA

En el caso de una muestra de datos la varianza muestral es una medida de la dispersión de los datos:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

La **Varianza** de una v.a. utiliza la probabilidad como peso:

$$\sigma^2 = Var[X] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

v.a. discreta

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Forma alternativa para el cálculo de la varianza

$$\text{Var}[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Demostración:

$$E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2 + (E[X])^2 - 2XE[X]\right]$$

$$= E[X^2] + (E[X])^2 - 2E[X]E[X]$$

$E[X]$ es una constante,
no depende de X

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Medidas características de una variable

Algunas propiedades que cumple la varianza

$$\text{Var}[a + bX] = 0 + b^2\text{Var}[X] = b^2\text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Ejemplo:

Una centralita telefónica tiene 5 líneas. Sea $X = \{\text{número de líneas ocupadas en una hora}\}$.

Espacio muestral: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Supongamos que su función de probabilidad viene dada por:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.14	0.27	0.27	0.18	0.09	0.05

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Medidas características de una variable

Calculamos $E[X]$ y $\text{Var}[X]$

$$E[X] = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,27 + 3 \cdot 0,18 + 4 \cdot 0,09 + 5 \cdot 0,05 = 1,96$$

$$\text{Var}[X] = (0 - 1,96)^2 \cdot 0,4 + (1 - 1,96)^2 \cdot 0,27 + (2 - 1,96)^2 \cdot 0,27 + (3 - 1,96)^2 \cdot 0,18 + (4 - 1,96)^2 \cdot 0,09 + (5 - 1,96)^2 \cdot 0,05 = 1,82$$

Otra forma:

$$E[X^2] = 0^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,27 + 2^2 \cdot 0,27 + 3^2 \cdot 0,18 + 4^2 \cdot 0,09 + 5^2 \cdot 0,05 = 5,66$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Ejemplo: Calcular la varianza del tiempo de funcionamiento de las máquinas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 0 \leq x < 2.5 \\ 0.8 - \frac{0.4}{0.25}x & \text{si } 2.5 \leq x < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{2.5} \frac{0.4}{2.5}x^2dx + \int_{2.5}^5 \left(0.8x - \frac{0.4}{2.5}x^2\right)dx$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

- Aplicamos la fórmula: $\text{Var}[X]=E[X^2]-(E[X])^2$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int x^2 f(x) dx = \int_0^{2.5} x^2 \frac{0.4}{0.25} x dx + \int_{2.5}^5 x^2 \left(0.8 - \frac{0.4}{0.25} x \right) dx = \\ &= \int_0^{2.5} 1.6x^3 dx + \int_{2.5}^5 (0.8x^2 - 1.6x^3) dx = \frac{1.6}{4} x^4 \Big|_0^{2.5} + \frac{0.8}{3} x^3 - \frac{1.6}{4} x^4 \Big|_{2.5}^5 = \end{aligned}$$

$$\text{Var}[X] = \dots - (2.5)^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Medidas características de una variable

Desigualdad de Chebyshev

Si X es una variable aleatoria con:

$$E[X] = \mu \quad y \quad Var[X] = \sigma^2$$

Se puede demostrar que gran parte de la distribución está situada en un intervalo centrado en μ y que tiene amplitud varias veces σ .

En concreto:

$$\forall c > 0 \quad P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

Es decir, la probabilidad de realizar una observación de una variable y que

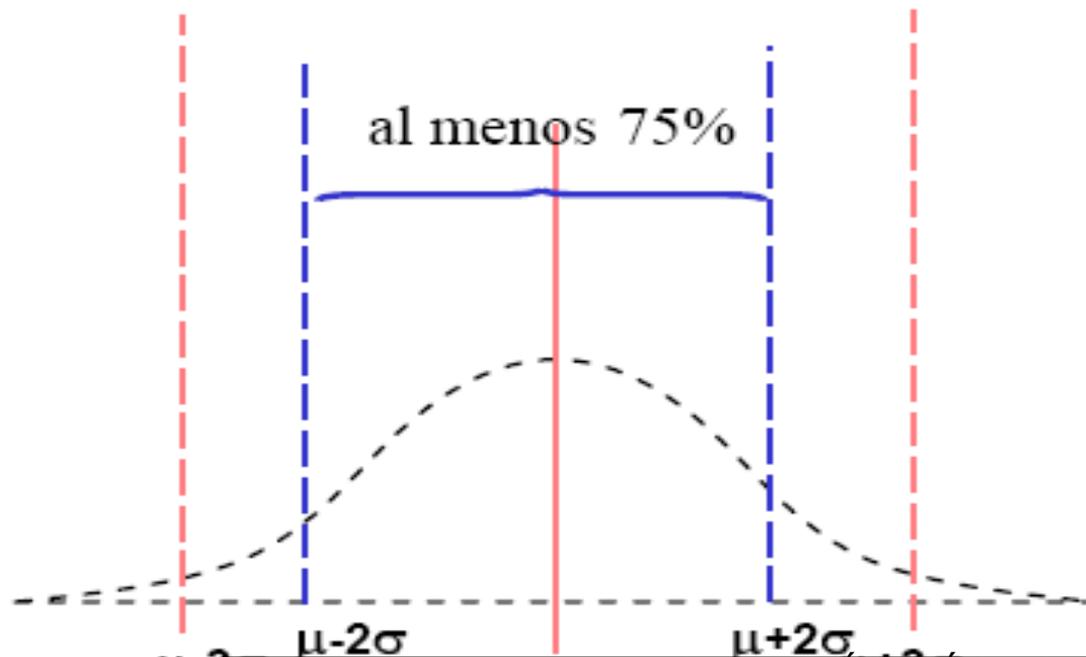
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Desigualdad de Chebyshev



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Desigualdad de Chebyshev

c	Prob dentro $\pm c \sigma$	Prob. fuera de $\pm c \sigma$
2	75%	25%
3	89%	11%
4	94%	6%
5	96%	4%

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Ejemplo 1:

El coste diario para usar una herramienta tiene una media de 3 euros y una varianza de 4 euros. ¿Con que frecuencia el coste diario será mayor de 8 euros?

$$P(X > 8) = P\left(\frac{X - 3}{2} > \frac{5}{2}\right) \leq P\left(\left|\frac{X - 3}{2}\right| > \frac{5}{2}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{4}{25} = 0,16$$

Es decir, menos del 16% de las veces, el coste diario será de más de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Medidas características de una variable

Ejemplo 2:

Un sistema informático tiene una media de 4 fallos por semana, con una desviación estándar de 0,8 fallos por semana.

1. Determinar un intervalo que incluya al menos al 90% de los resultados semanales del número de fallos.
2. Se garantiza que el número de descomposturas rara vez será mayor que

8 en un período de una semana. ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Medidas características de una variable

Solución:

1. Determinar un intervalo que incluya al menos al 90% de los resultados semanales del número de descomposturas.

Si X = número de fallos en una semana, entonces, por Chebyshev, buscamos c tal que

$$P(|X - 4| > c \cdot 0,8) \leq 1 - 1/c^2 = 0,9 \Rightarrow c = 3,16$$

El intervalo es por tanto: $[2, 7]$

2. Se garantiza que el número de descomposturas rara vez será mayor que 8 en un período de una semana. ¿Es correcta esta afirmación?. ¿Por qué?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(/ 0,8)

Independencia de variables

Dos variables X e Y se dicen **independientes** si se verifica que

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} \quad P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\})$$

En particular, si X e Y son independientes se tiene

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Propiedad:

si X e Y son independientes, entonces

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$2. \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$