

NOCIONES DE CALCULO VECTORIAL

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ANÁLISIS VECTORIAL

- o **ÁLGEBRA VECTORIAL:** Suma, resta y multiplicación de vectores.
- o **CÁLCULO VECTORIAL:** Gradiente, divergencia y rotacional.
Teorema de la Divergencia. Teorema de Stokes.
- o **SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES:** Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

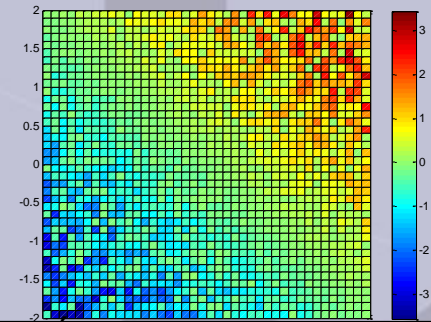
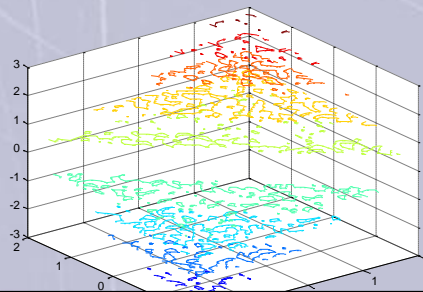
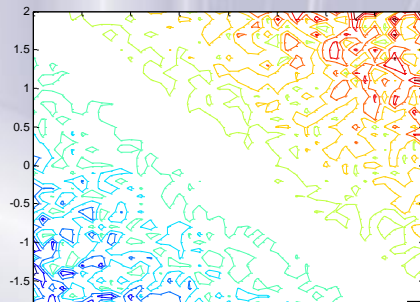
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campo ESCALAR

- Función de la posición que a cada punto del espacio le asigna una magnitud escalar
- Puede o no ser función del tiempo
 - Campo de temperaturas: $T(t,x,y,z)$
 - Altitud geográfica: $h(x,y)$
 - Potencial eléctrico en una región: $V(x,y,z)$
- Representación: superficies equiescalares



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campo ESCALAR

Ejemplo: campo de presiones



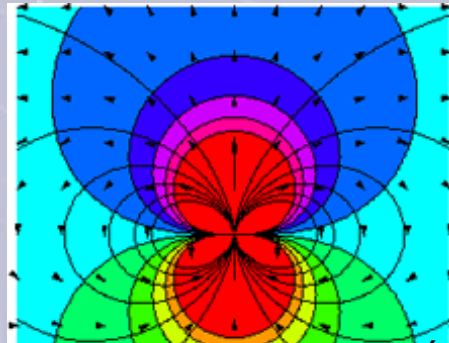
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campo VECTORIAL

- Función de la posición que a cada punto del espacio le asigna una magnitud vectorial
- Puede o no ser función del tiempo
 - Campo de gravedad terrestre.
 - Campo de velocidad de un fluido.
 - Campo eléctrico y campo magnético.
- Representación: líneas de campo → Curvas tangentes al campo en todo punto



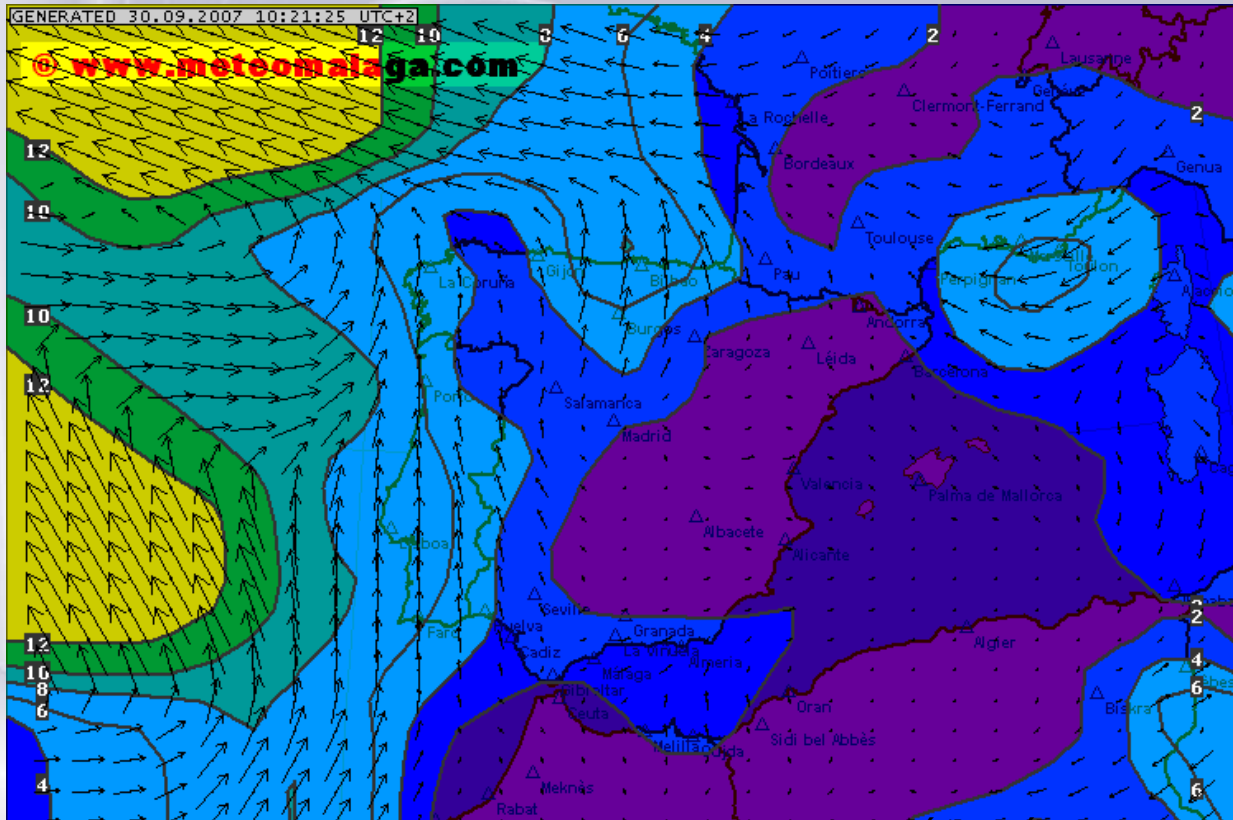
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campo VECTORIAL

Ejemplo: Viento



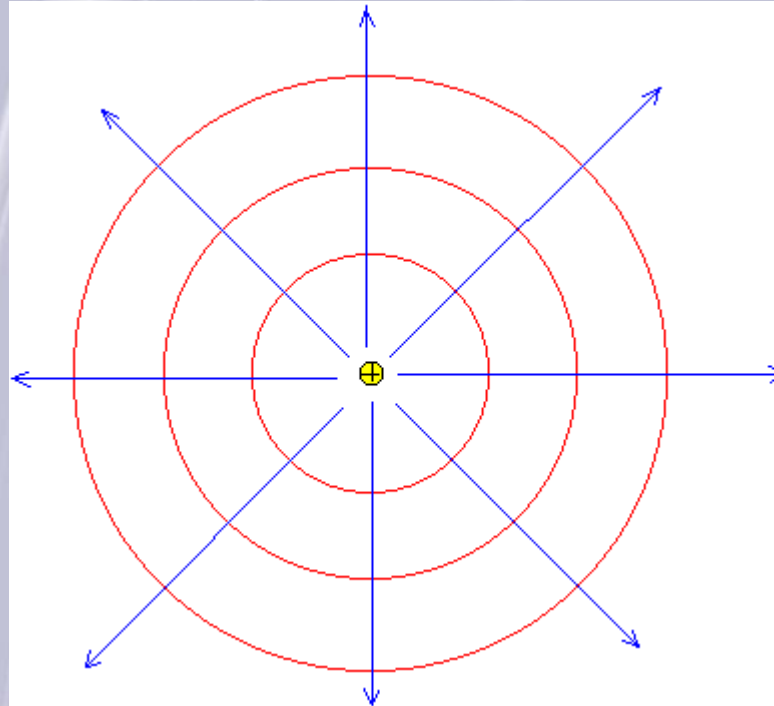
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campo VECTORIAL

- Ejemplo: Campo creado por una carga puntual positiva.



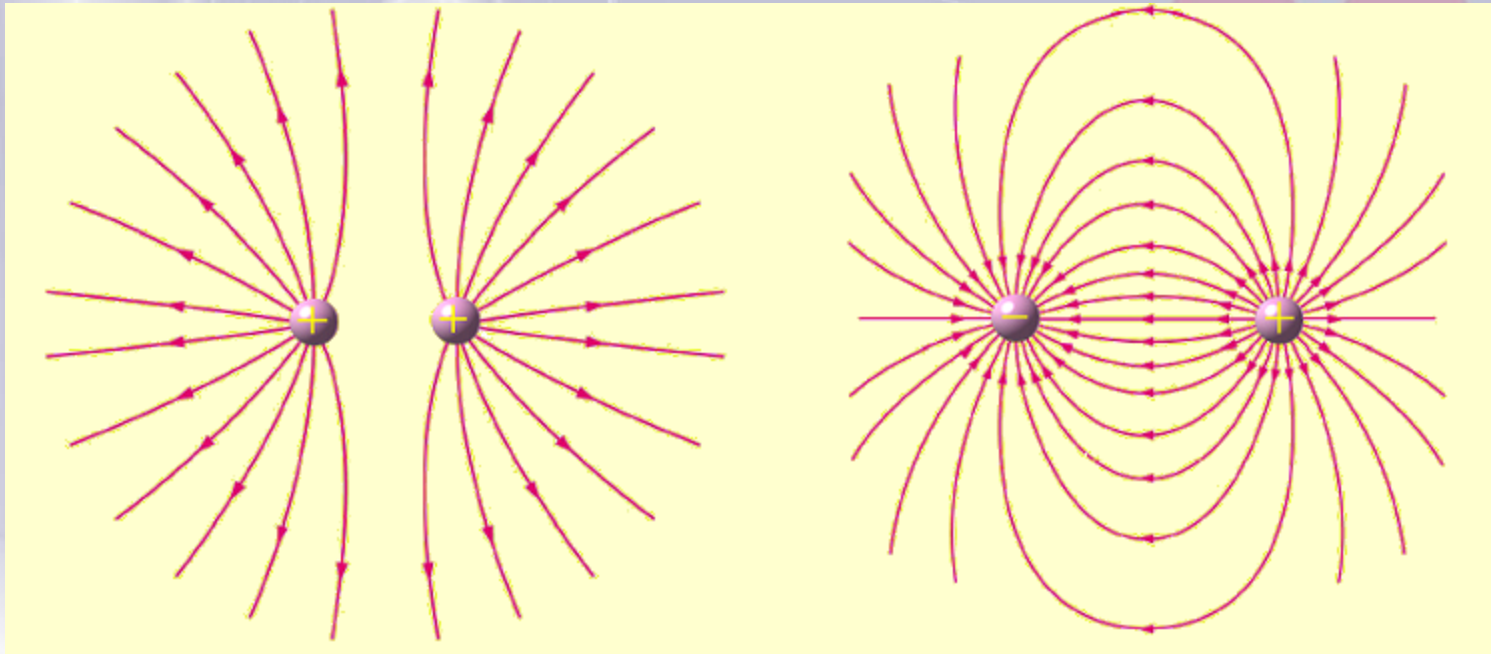
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Campo VECTORIAL

- Ejemplo: Campo creado por dos cargas puntuales.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

OPERADORES

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ANÁLISIS VECTORIAL

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR:

$$V(t, x, y, z)$$

Describimos la razón de cambio espacial de un campo escalar en un instante determinado.

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad \text{CARTESIANAS:}$$

Razón de cambio diferente dependiendo de la dirección → Necesitamos un **vector**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ANÁLISIS VECTORIAL

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR:

- o Es un **campo vectorial**.
- o Su módulo en cada punto nos da el valor de la derivada direccional máxima.
- o Su dirección en cada punto nos indica la dirección de máxima variación de la función.
- o Es perpendicular en todo punto a las superficies equiescalares del campo.

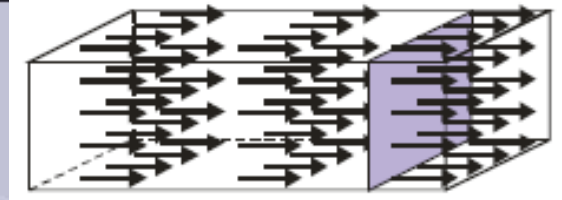
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ANÁLISIS VECTORIAL

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL:



La fuerza de un campo vectorial se mide con el FLUJO: número de líneas de campo que atraviesan una superficie

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

Flujo neto de salida del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.

s: Toda la superficie que encierra el volumen

→
Cartagena99

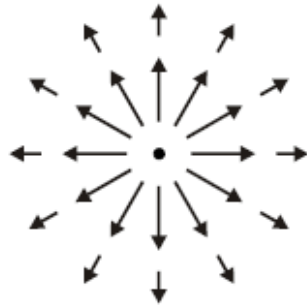
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

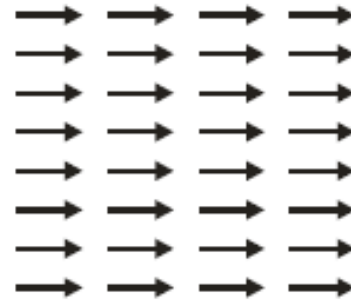
ANÁLISIS VECTORIAL

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL:

Idea de la pérdida o ganancia del campo vectorial al atravesar el volumen, informándonos de la presencia de **FUENTES** o **SUMIDEROS** en dicho volumen.



Punto de divergencia no nula



Puntos de divergencia nula

CARTESIANAS:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

ANÁLISIS VECTORIAL

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

EJEMPLO: Dado

$$\vec{A} = x^2 \cdot \hat{u}_x + xy \cdot \hat{u}_y + yz \cdot \hat{u}_z$$

Verificar el teorema de la divergencia para un cubo de lado unidad. El cubo está situado en el primer octante del sistema de coordenadas cartesianas, con un vértice en el origen.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ANÁLISIS VECTORIAL

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL:

FUENTE DE FLUJO

FUENTE DE VÓRTICE: Ocasiona la **circulación** de un campo vectorial a su alrededor

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \left[\hat{u}_n \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \right]_{\text{máx}}$$

$$C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ANÁLISIS VECTORIAL

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL:

Medida de la fuerza de ese vórtice

- o MÓDULO: Circulación máxima por unidad de área
- o DIRECCIÓN: Perpendicular al plano
- o SENTIDO: Regla de la mano derecha

CAMPO CONSERVATIVO o IRROTACIONAL:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = -grad \cdot V$$

Ejemplo: **Campo eléctrico:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -grad \cdot V$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

ANÁLISIS VECTORIAL

TEOREMA DE STOKES:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

IDENTIDADES IMPORTANTES:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

LAPLACIANO DE UN ESCALAR

El laplaciano de un campo escalar V , se escribe como $\nabla^2 V$

Y es la divergencia del gradiente de V $\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Esféricas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

LAPLACIANO. Igualdad importante

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

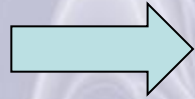
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Operadores --- Coordenadas

Suponiendo que trabajamos en coordenadas cartesianas



$$\nabla \cdot T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad \text{Gradiente}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{Divergencia}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix} \quad \text{Rotacional}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de COORDENADAS

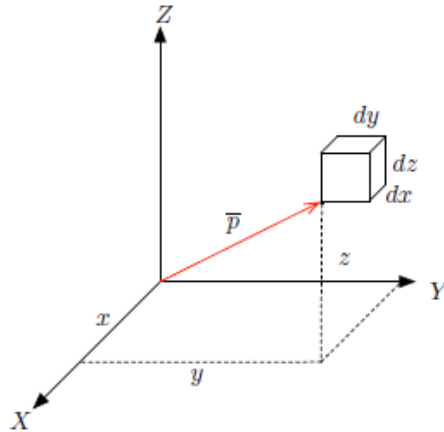
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Coordenadas Cartesianas

1.1. Coordenadas cartesianas



Un punto \bar{p} genérico en coordenadas cartesianas se representa por:

$$\bar{p} = x \cdot \bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y + z \cdot \bar{u}_z$$

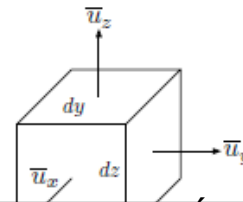
A partir de la figura anterior, se pueden obtener los siguientes resultados.

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = dx \cdot \bar{u}_x + dy \cdot \bar{u}_y + dz \cdot \bar{u}_z.$$

→ Diferencial de superficie:

- $z = \text{cte.}: d\bar{s} = dx dy \cdot \bar{u}_z,$
- $y = \text{cte.}: d\bar{s} = dx dz \cdot \bar{u}_y,$
- $x = \text{cte.}: d\bar{s} = dy dz \cdot \bar{u}_x.$



Cartagena99

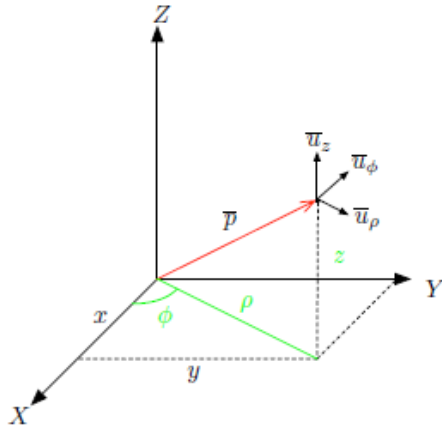
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Coordenadas Cilíndricas

1.2. Coordenadas cilíndricas



Un punto \bar{p} genérico en coordenadas cilíndricas se representa por:

$$\bar{p} = \rho \cdot \bar{u}_\rho + \phi \cdot \bar{u}_\phi + z \cdot \bar{u}_z,$$

donde:

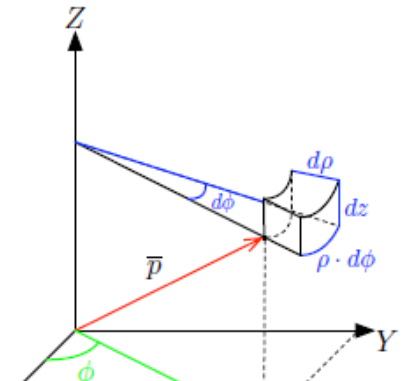
$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq \infty, \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi, \\ -\infty &\leq z \leq \infty. \end{aligned}$$

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = d\rho \cdot \bar{u}_\rho + \rho d\phi \cdot \bar{u}_\phi + dz \cdot \bar{u}_z.$$

→ Diferencial de superficie:

- $\rho = \text{cte.}$: $d\bar{s} = \rho d\phi dz \cdot \bar{u}_\rho,$
- $\phi = \text{cte.}$: $d\bar{s} = d\rho dz \cdot \bar{u}_\phi,$
- $z = \text{cte.}$: $d\bar{s} = \rho d\rho d\phi \cdot \bar{u}_z.$



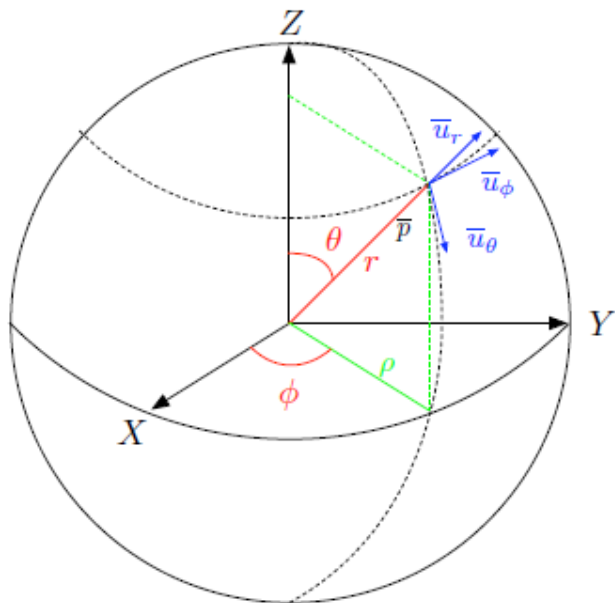
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Coordenadas Esféricas

1.3. Coordenadas esféricas



Un punto \bar{p} genérico en coordenadas esféricas se representa por:

$$\bar{p} = r \cdot \bar{u}_r + \theta \cdot \bar{u}_\theta + \phi \cdot \bar{u}_\phi,$$

donde:

$$0 \leq r \leq \infty,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = dr \cdot \bar{u}_r + r d\theta \cdot \bar{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \cdot \bar{u}_\phi.$$

→ Diferencial de superficie:

$$r = \text{cte.}: d\bar{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \cdot \bar{u}_r,$$

$$\theta = \text{cte.}: d\bar{s} = r \sin \theta dr d\phi \cdot \bar{u}_\theta,$$

$$\phi = \text{cte.}: d\bar{s} = r d\theta d\phi \cdot \bar{u}_\phi.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

OPERADORES EN COORDENADAS...

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

GRADIENTE EN COORDENADAS...

CARTESIANAS

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

CILINDRICAS

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

ESFÉRICAS

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

DIVERGENCIA EN COORDENADAS...

CARTESIANAS

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

CILINDRICAS

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ESFÉRICAS

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ROTACIONAL EN COORDENADAS...

CARTESIANAS

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

CILINDRICAS

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

ESFÉRICAS

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70