NOCIONES DE CALCULO VECTORIAL

Universidad Rey Juan Carlos

ANÁLISIS VECTORIAL

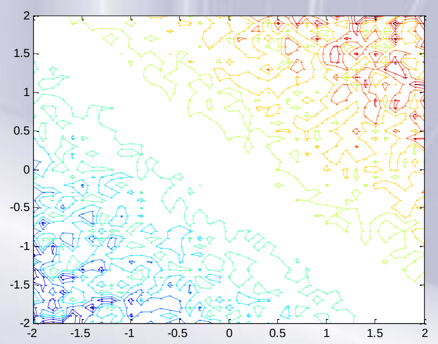
- **ÁLGEBRA VECTORIAL**: Suma, resta y multiplicación de vectores.
- **CÁLCULO VECTORIAL**: Gradiente, divergencia y rotacional.
  Teorema de la Divergencia. Teorema de Stokes.
- **SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES**: Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

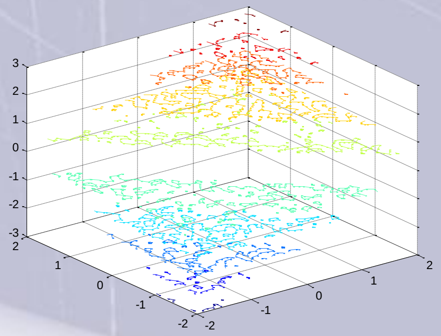
CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

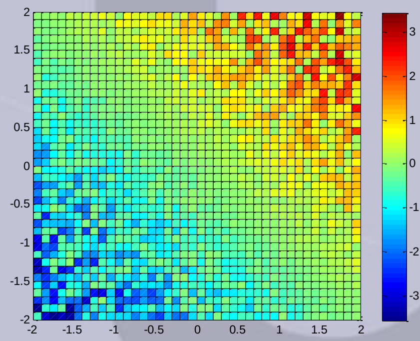
Universidad Rey Juan Carlos

Campo ESCALAR

- Función de la posición que a cada punto del espacio le asigna una magnitud escalar
- Puede o no ser función del tiempo
  - Campo de temperaturas: T(t,x,y,z)
  - Altitud geográfica: h(x,y)
  - Potencial eléctrico en una región: V(x,y,z)
- Representación: superficies equiescalares

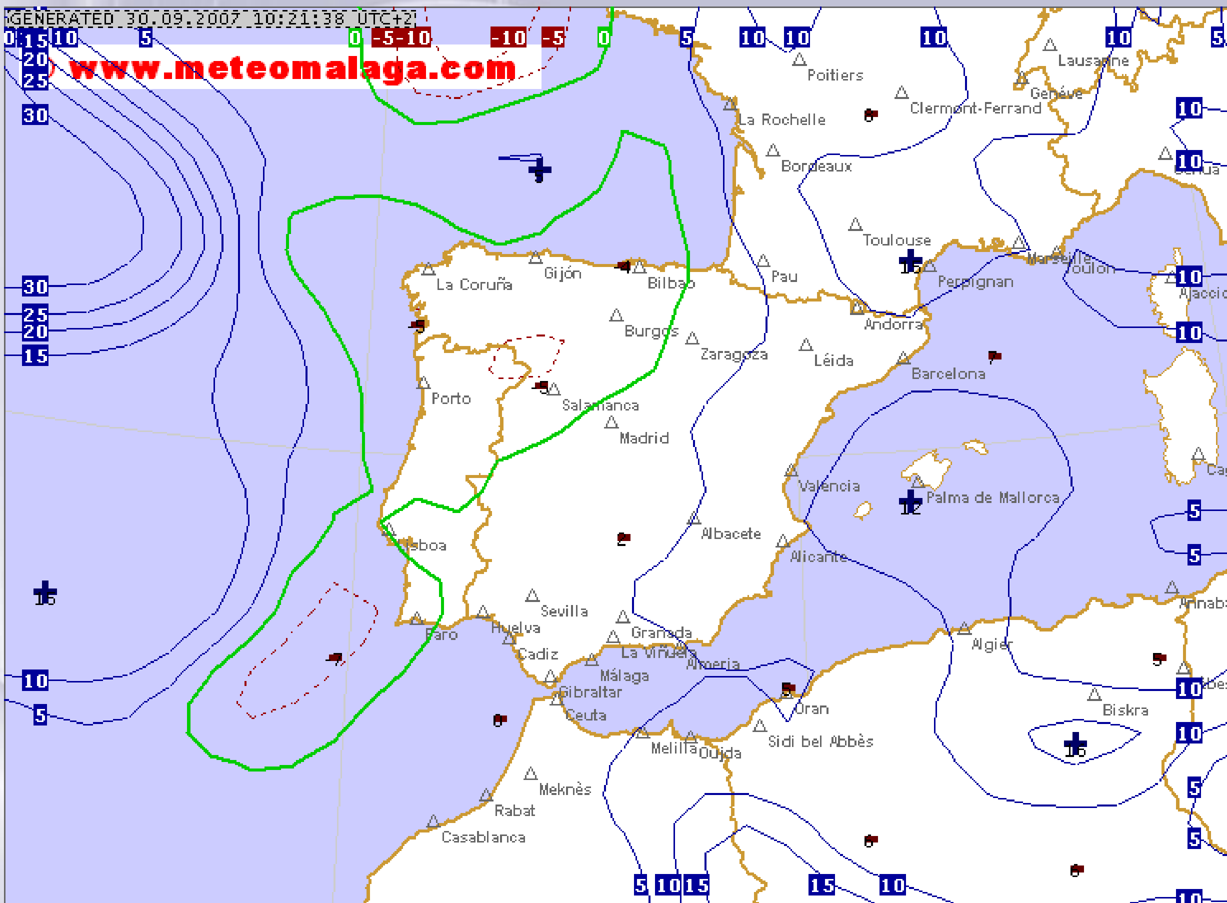






Campo ESCALAR

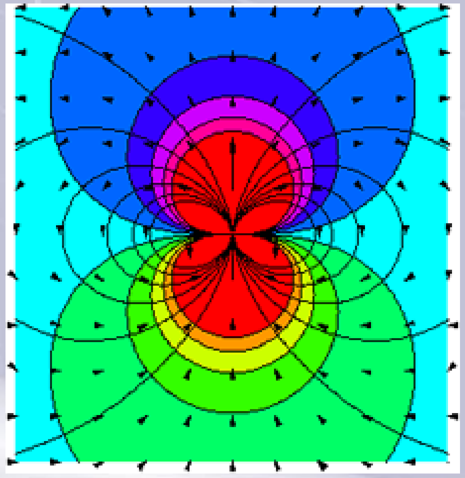
Ejemplo: campo de presiones



Universidad Rey Juan Carlos

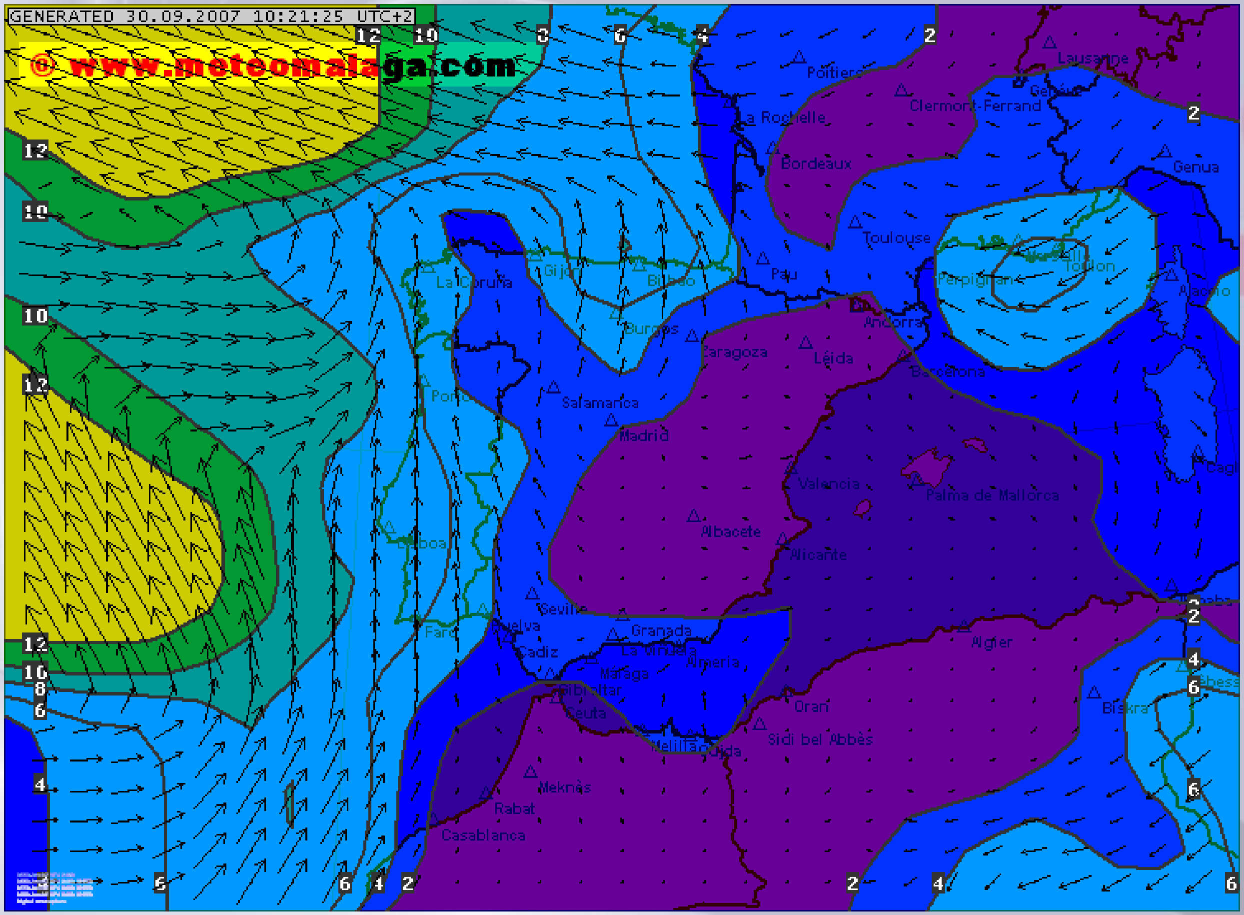
Campo VECTORIAL

- Función de la posición que a cada punto del espacio le asigna una magnitud vectorial
- Puede o no ser función del tiempo
  - Campo de gravedad terrestre.
  - Campo de velocidad de un fluido.
  - Campo eléctrico y campo magnético.
- Representación: líneas de campo → Curvas tangentes al campo en todo punto



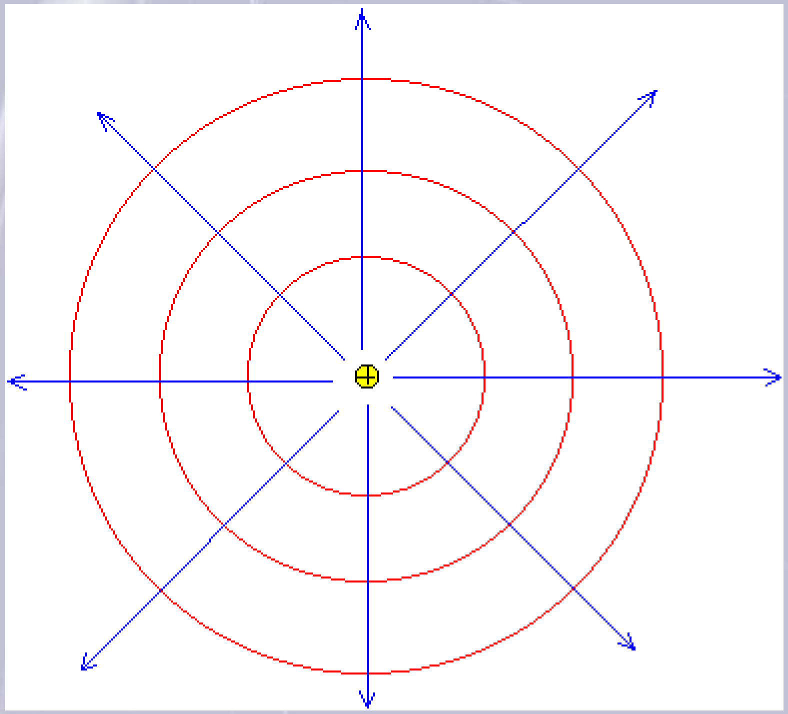
Campo VECTORIAL

Ejemplo: Viento



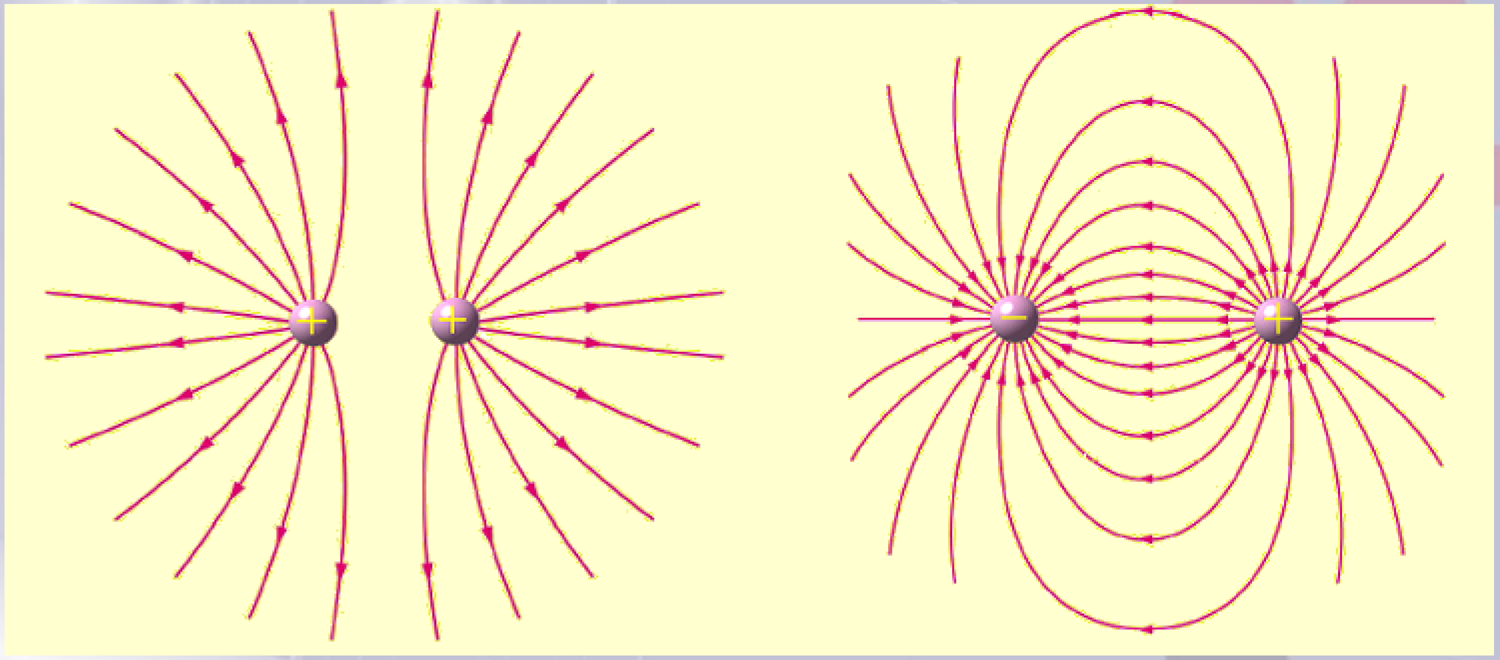
Campo VECTORIAL

- Ejemplo: Campo creado por una carga puntual positiva.



Campo VECTORIAL

- Ejemplo: Campo creado por dos cargas puntuales.



OPERADORES

ANÁLISIS VECTORIAL

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR:

$$V\left(t, x, y, z\right)$$

Describimos la razón de cambio espacial de un campo escalar en un instante determinado.

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

CARTESIANAS:

Razón de cambio diferente dependiendo de la dirección → Necesitamos un **vector**

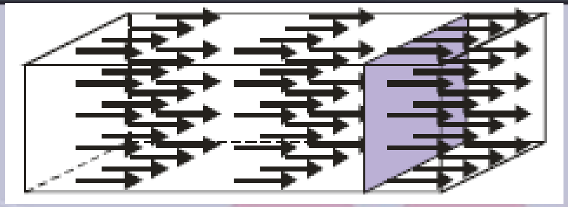
ANÁLISIS VECTORIAL

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR:

- Es un **campo vectorial**.
- Su módulo en cada punto nos da el valor de la derivada direccional máxima.
- Su dirección en cada punto nos indica la dirección de máxima variación de la función.
- Es perpendicular en todo punto a las superficies equiescalares del campo.

ANÁLISIS VECTORIAL

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL:



La fuerza de un campo vectorial se mide con el FLUJO: número de líneas de campo que atraviesan una superficie

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}}{\Delta v}$$

Flujo neto de salida del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.

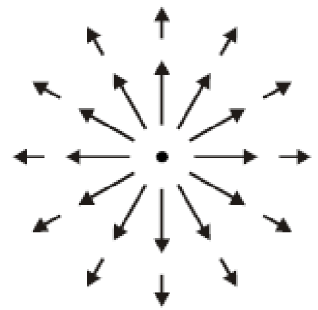
s: Toda la superficie que encierra el volumen

$\overrightarrow{dS} = dS \cdot \hat{u}_n$, con $\hat{u}_n$ apuntando hacia fuera del volumen encerrado

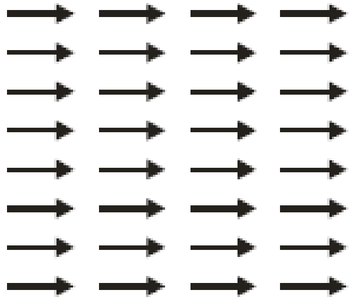
ANÁLISIS VECTORIAL

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL:

Idea de la pérdida o ganancia del campo vectorial al atravesar el volumen, informándonos de la presencia de **FUENTES** o **SUMIDEROS** en dicho volumen.



Punto de divergencia no nula



Puntos de divergencia **nula**

CARTESIANAS:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$$

ANÁLISIS VECTORIAL

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA:

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \oint_s \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

EJEMPLO: Dado

$$\vec{A} = x^2 \cdot \hat{u}_x + xy \cdot \hat{u}_y + yz \cdot \hat{u}_z$$

Verificar el teorema de la divergencia para un cubo de lado unidad. El cubo está situado en el primer octante del sistema de coordenadas cartesianas, con un vértice en el origen.

ANÁLISIS VECTORIAL

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL:

FUENTE DE FLUJO

FUENTE DE VÓRTICE: Ocasiona la **circulación** de un campo vectorial a su alrededor

$$rot\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \lim_{As \to 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\hat{u}_n \oint_c \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl} \right]_{máx}$$

$$C = \oint_C \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

(CARTESIANAS)

ANÁLISIS VECTORIAL

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL:

Medida de la fuerza de ese vórtice

- MÓDULO: Circulación máxima por unidad de área
- DIRECCIÓN: Perpendicular al plano
- SENTIDO: Regla de la mano derecha

CAMPO CONSERVATIVO o IRROTACIONAL:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = -grad \cdot V$$

Ejemplo: **Campo eléctrico:**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -grad \cdot V$$

ANÁLISIS VECTORIAL

TEOREMA DE STOKES:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

IDENTIDADES IMPORTANTES:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} V\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$$

LAPLACIANO DE UN ESCALAR

El laplaciano de un campo escalar V, se escribe como $\nabla^2 V$

Y es la divergencia del gradiente de V $\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Esféricas

LAPLACIANO. Igualdad importante

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Operadores --- Coordenadas

Suponiendo que trabajamos en coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad \text{Gradiente}$$

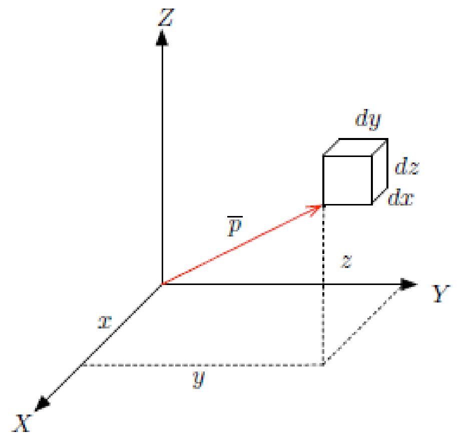
$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{Divergencia}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \text{Rotacional}$$

Sistemas de COORDENADAS

Coordenadas Cartesianas

1.1. Coordenadas cartesianas



Un punto $\overline{p}$ genérico en coordenadas cartesianas se representa por:

$$\overline{p} = x \cdot \overline{u}_x + y \cdot \overline{u}_y + z \cdot \overline{u}_z$$

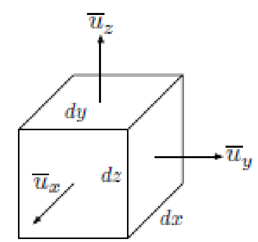
A partir de la figura anterior, se pueden obtener los siguientes resultados.

→ Diferencial de línea:

$$d\overline{l} = dx \cdot \overline{u}_x + dy \cdot \overline{u}_y + dz \cdot \overline{u}_z.$$

→ Diferencial de superficie:

- $z =$ cte.: $d\overline{s} = dxdy \cdot \overline{u}_z$,
- $y =$ cte.: $d\overline{s} = dxdz \cdot \overline{u}_y$,
- $x =$ cte.: $d\overline{s} = dydz \cdot \overline{u}_x$.

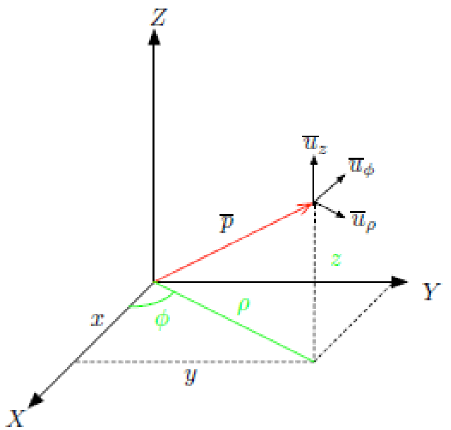


→ Diferencial de volumen:

$$dv = dxdydz.$$

Coordenadas Cilindricas

1.2. Coordenadas cilíndricas



Un punto $\overline{p}$ genérico en coordenadas cilíndricas se representa por:

$$\overline{p} = \rho \cdot \overline{u}_\rho + \phi \cdot \overline{u}_\phi + z \cdot \overline{u}_z,$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &\ \rho \leqslant \infty, \\ 0 \leqslant &\ \phi \leqslant 2\pi, \\ -\infty \leqslant &\ z \leqslant \infty. \end{aligned}$$

→ Diferencial de línea:

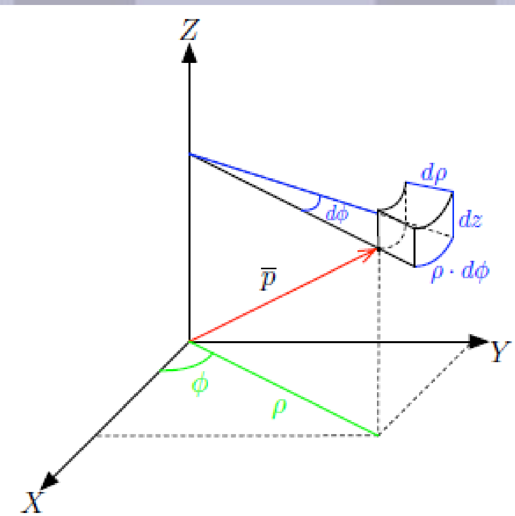
$$d\overline{l} = d\rho \cdot \overline{u}_\rho + \rho d\phi \cdot \overline{u}_\phi + dz \cdot \overline{u}_z.$$

→ Diferencial de superficie:

- $\rho =$ cte.: $d\overline{s} = \rho d\phi dz \cdot \overline{u}_\rho$,
- $\phi =$ cte.: $d\overline{s} = d\rho dz \cdot \overline{u}_\phi$,
- $z =$ cte.: $d\overline{s} = \rho d\rho d\phi \cdot \overline{u}_z$.

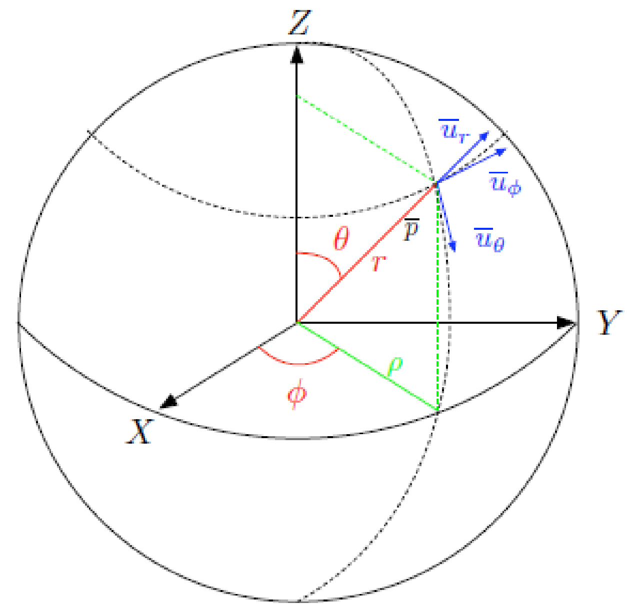
→ Diferencial de volumen:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz.$$



Coordenadas Esféricas

1.3. Coordenadas esféricas



Un punto $\overline{p}$ genérico en coordenadas esféricas se representa por:

$$\overline{p} = r \cdot \overline{u}_r + \theta \cdot \overline{u}_\theta + \phi \cdot \overline{u}_\phi,$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &\quad r &\leqslant \infty, \\ 0 \leqslant &\quad \theta &\leqslant \pi, \\ 0 \leqslant &\quad \phi &\leqslant 2\pi. \end{aligned}$$

→ Diferencial de línea:

$$d\overline{l} = dr \cdot \overline{u}_r + r d\theta \cdot \overline{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \cdot \overline{u}_\phi.$$

→ Diferencial de superficie:

$$\begin{aligned} r = \text{cte.}: &\quad d\overline{s} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \cdot \overline{u}_r, \\ \theta = \text{cte.}: &\quad d\overline{s} = r \operatorname{sen}\theta dr d\phi \cdot \overline{u}_\theta, \\ \phi = \text{cte.}: &\quad d\overline{s} = r dr d\theta \cdot \overline{u}_\phi. \end{aligned}$$

→ Diferencial de volumen:

$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi.$$

OPERADORES EN COORDENADAS…

GRADIENTE EN COORDENADAS…

CARTESIANAS

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

CILINDRICAS

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

ESFÉRICAS

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

DIVERGENCIA EN COORDENADAS…

CARTESIANAS

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

CILINDRICAS

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial z}}$$

ESFÉRICAS

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{A}_\phi}{\partial \phi}}$$

ROTACIONAL EN COORDENADAS…

CARTESIANAS

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

CILINDRICAS

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\, \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

ESFÉRICAS

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\, \mathbf{a}_\theta & r \sin\theta\, \mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin\theta\, A_\phi \end{vmatrix}$$