# 1. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

1. Campos escalares. Derivadas direccionales. Gradiente.
2. Campos vectoriales. Líneas de campo. Divergencia y rotacional.

## PROBLEMAS

1. Dado el campo escalar $U(x,y) = e^{3x^2+y^2}$, halla:
   *a*) Curvas de nivel.
   *b*) La región donde $e^{-3} \leq U(x,y) \leq e^3$.
   *c*) Líneas de gradiente.
2. En la posición $(x,y)$ el nivel de toxicidad está dado por $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. Si una hormiga está en $(1,2)$, ¿en qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápidamente posible el nivel de toxicidad?
3. La temperatura en cada punto de una placa metálica viene dada por $T(x,y) = 5 + x^2 - y^2$. Halla el camino trazado por una partícula rastreadora de calor que parte del punto $(-2,1)$.
4. ¿Es la curva $\bar{\sigma}(t) = (e^t, 2t+1, t^2)$ línea de flujo del campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = (x, 2, y-1)$?
5. Supuesto que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (2y^2 - 3z^4y, yx^2 + 3\cos(xz), F_3(x,y,z))$ representa el campo de velocidades de un fluido, determina $F_3(x,y,z)$, para que el fluido sea incompresible.
6. El laplaciano de un campo escalar $f$ se denota por $\Delta f$ y es igual a la divergencia del gradiente de $f$. Calcula el laplaciano de $f(x,y,z) = e^{xy} + z^2y + xz$. ¿Cuánto vale $\Delta f(0,1,2)$?
7. Calcula la derivada direccional de $\operatorname{div}(x^3, y^3, z^3)$ en la dirección de la normal exterior a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en un punto de la misma.
8. Calcula las líneas de rotor del campo $\vec{F}(x,y,z) = (xy, z, x)$. Obtener la que pasa por $(0,0,0)$.
9. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   *a*) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (f(x), g(y), h(z))$ diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Entonces $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$.
   *b*) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (f(x), g(y), h(z))$ diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Entonces $\mathbf{rot}(\vec{F}) = \bar{0}$.
   *c*) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase 2 en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{G}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F} + (ax+y^2)\vec{i} + (2x^2+y)\vec{j}$. Entonces $\operatorname{div}(\vec{G}) \neq 0$ si $a = -1$.
   *d*) No existe un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$ cuyo rotacional sea $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$.

# 2. INTEGRAL DE LÍNEA

1. Función potencial. Cálculo de la función potencial.
2. Concepto de integral de línea.
3. Campos conservativos. Teorema de caracterización de campos conservativos.
4. Condición de existencia de función potencial.

## PROBLEMAS

1. Calcula la integral de línea $\displaystyle\int_\Gamma 2yx^2\,dx + 3xy\,dy$ siendo $\Gamma$ la curva que une $A=(4,0)$ con $B=(0,4)$ mediante:

   *a*) el segmento de recta que une $A$ y $B$, desde $A$ hasta $B$.

   *b*) la circunferencia de centro el origen pasando por $A$ y $B$, desde $A$ hasta $B$ (por el primer cuadrante).

2. Calcula la integral de línea $\displaystyle\int_\Gamma x^2\,dx + y\,dy + z\,dz \qquad \Gamma \equiv \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = kt \end{cases}$ entre los puntos $(r,0,0)$ y $(r,0,2k\pi)$.

3. Calcula la integral de línea $\displaystyle\oint_\Gamma \left(x^2+y\right)\,dx + (3x+y)\,dy - z^2\,dz$ siendo

$$\Gamma \equiv \begin{cases} (x-1)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Calcula la integral de línea $\displaystyle\int_\Gamma x^2\,dx + 3yz\,dy - xyz\,dz$ siendo $\Gamma$

   *a*) el segmento de recta que une $A=(0,0,0)$ con $B=(1,1,2)$, desde $A$ hasta $B$.

   *b*) la curva $\Gamma \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$ que une $(2,0,0)$ con $(0,0,2)$ contenida en el primer octante.

5. Sea la forma diferencial $(2xyz)dx + (x^2z + 2ye^z)dy + (x^2y + y^2e^z)dz$ . ¿Admite función potencial? En caso afirmativo, halla dicha función potencial.

6. Calcula $\displaystyle\int_\Gamma \left(y^3+1\right)\,dx + (3xy^2+1)\,dy$ siendo $\Gamma$ la curva $x^2+y^2=1$ , $y \geq 0$, que va desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$.

7. Bajo el efecto del campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = -e^{xyz}\left(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}\right)$ se desplaza una partícula desde $A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hasta $B = (0, 2, \pi)$. ¿A través de qué camino el trabajo realizado será menor: en línea recta o siguiendo la curva $\gamma(t) = (2\cos(2t), 2\,\mathrm{sen}(2t), 4t)$?

8. Calcula, usando tres estrategias bien diferenciadas, la integral de línea $\int_\Gamma x\,dx + y\,dy$ donde $\Gamma$ es la curva que va desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$, recorriendo la trayectoria elíptica $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ contenida en el semiplano superior. Explica brevemente dichas estrategias.

9. Dado el campo $\overline{f}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ , calcula $\int_\Gamma \overline{f} \cdot \overline{dr}$ , siendo $\Gamma$ una curva que va del punto $(1,1,1)$ al $(1,2,4)$ .

10. Sabiendo que $\mathbf{grad}(U) = \left(2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2}\right)$ y que $U(0,0,0) = 5$, calcula $U(1,1,2)$.

11. Considere el campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2}, 0\right)$. Se pide:

    *a*) ¿En qué puntos no está definido?
    
    *b*) Calcula su rotacional.
    
    *c*) Calcula, mediante la definición, la integral de línea $\oint_\gamma \bar{F}$ donde $\gamma$ es la circunferencia en el plano $z = 0$ de centro $(0,0,0)$ y radio uno, recorrida en sentido positivo.
    
    *d*) ¿Hay alguna contradicción entre las dos últimas respuestas?

12. Un alambre tiene la forma de $\Gamma \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = y \end{cases}$. Determina su masa si la densidad lineal en cada punto es $\sqrt{2y^2 + z^2}$.

13. Un alambre tiene la forma de $\Gamma \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = y \end{cases}$ $0 \leq z \leq 8$. Determina su masa si la densidad lineal en cada punto es igual a su distancia al plano $x = 0$.

# 3. INTEGRALES DOBLES

1. Construcción de la integral doble.
2. Cálculo de integrales dobles. Cambio de variables.
3. Teorema de Green-Riemann.

## PROBLEMAS

1. Sea $D = [0,1] \times [0,1]$. Calcula $\displaystyle\iint_D \left|\frac{1}{2} - x\right| \, dxdy.$

2. Sea $D = [0,1] \times [0,1]$. Calcula $\displaystyle\iint_D |x-y| \, dxdy.$

3. Halla $\displaystyle\iint_D x^2 \, dxdy$ siendo $D$ el recinto limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$, $x = 1$.

4. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   *a*) $\displaystyle\int_0^3 \left( \int_{\frac{4}{3}x}^{\sqrt{25-x^2}} dy \right) dx = \int_0^4 \left( \int_0^{\frac{3}{4}y} dx \right) dy + \int_4^5 \left( \int_0^{\sqrt{25-y^2}} dx \right) dy.$

   *b*) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left( \int_{\sqrt{-y}}^{\sqrt{2-y^2}} dx \right) dy + \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^2} dy \right) dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \right) dx \;.$

5. Calcula:

   *a*) $\displaystyle\int_0^4 \left( \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dy \right) dx$

   *b*) $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right) dy$

6. Halla $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2) dxdy$ , siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \le 4,\; x \ge 0,\; y \ge 0\}$ .

7. Halla $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} \, dxdy$ , siendo $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 4 \right\}.$

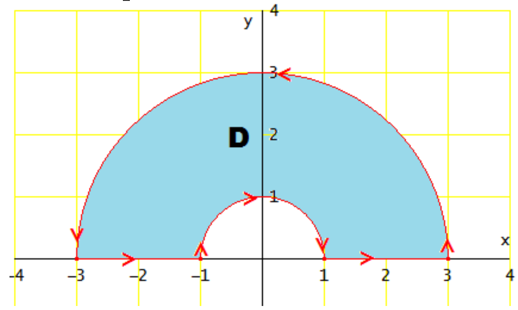
8. $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$ siendo $D$ el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 1$.

9. Calcula el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$.

10. Halla $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy$ siendo $D$ el primer cuadrante. Deduce el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

11. Determina la masa de una placa triangular de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ cuya densidad es $\sigma(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$.

12. Calcula $\displaystyle\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} x + y^2\right) dx + \left(e^y - x^2\right) dy$, siendo $C$ la curva que encierra el dominio $D$ de la figura, orientada en el sentido que indican las flechas.




13. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

 *a*) $\displaystyle\int_\Gamma 5y\,dx - e^{\cos(y^2)}\,dy = -5\pi$ siendo $\Gamma \equiv x^2+(y-1)^2=1$ recorrida en sentido positivo.

 *b*) Si $\Gamma$ es la curva $4x^2+y^2=1$, recorrida en sentido positivo, se verifica que

$$\oint_\Gamma (x-y)\,dy-(x+y)\,dx = \pi$$

# 4. INTEGRALES TRIPLES

1. Construcción de la integral triple.
2. Cálculo de integrales triples. Cambio de variables.

## PROBLEMAS

1. Sea $F(x,y,z) = 4x^2yz$ definida en $\Omega = [-1,1] \times [0,1] \times [1,2]$ . Calcula
$$\iiint_\Omega F(x,y,z)\,dxdydz$$
2. Describe los recintos de integración y calcula las siguientes integrales triples:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^2 \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dz \right) dy \right) dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left( \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \left( \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz \right) dy \right) dx$

3. Halla $\displaystyle\iiint_\Omega z(25-(x^2+y^2))\;dx\;dy\;dz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \le 25\,; z \ge 4\}$
4. Sea $\Omega$ el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por las superficies $y^2 = 1-z$, $x=0$, $x=4$, y $z=0$. Calcula $\displaystyle\iiint_\Omega y^3 \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz.$
5. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   *a)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz \right) d\alpha \right) dr.$

   *b)* $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 dzdxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r^4 \operatorname{sen}^2 \lambda \cos \lambda dr d\lambda d\varphi$

6. Calcula $\displaystyle\iiint_\Omega ze^{x^2+y^2}\,dxdydz$ siendo $\Omega$ el recinto limitado por la superficie cilíndrica $x^2+y^2=4$ y los planos $z=2$, $z=3$.
7. Calcula, utilizando coordenadas esféricas, el volumen del sólido
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\; z^2 \ge x^2+y^2,\; x \ge 0,\; y \ge 0,\; z \ge 0\}$$
8. Calcula el volumen del sólido limitado en el primer octante por $z^2+x^2=a^2$, $y=0$, $x=y$.
9. Calcula el volumen del sólido limitado por $z^2+x^2=4$, $z=3y$, $z=y$ con $z \ge 0$.
10. El depósito de gasolina de una refinería tiene forma esférica de radio $a$. ¿Qué volumen de gasolina hay dentro del depósito si el nivel de la misma está a una altura $\dfrac{a}{2}$?

11. Siendo $\Omega$ el cuerpo alojado en el primer octante limitado por $z \leq 1 - y^2$ y $x + y \leq 1$, halla $\displaystyle\iiint_{\Omega} z\, dxdydz$.

12. Calcula el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 + 2x + 2y$.

13. Calcula el volumen del sólido limitado en el primer octante por las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $z = y$, $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

14. Calcula el volumen del sólido limitado en el primer octante por las superficies
$$z + 1 = x^2 + y^2,\ 2 - z = x^2 + y^2$$

15. Calcula el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2+y^2-2y = 0$ y $x^2+y^2+z^2-4 = 0$.

16. Calcula el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 - 2y = 0$ , $x^2 + y^2 - z = 0$ , $z = 0$ .

17. Calcula la masa del cono recto con base un círculo de radio $a$ y altura $h$, siendo la densidad en cada punto cuatro veces el cuadrado de la distancia del punto a la base del cono.

18. El *momento de inercia* $I$ de un cuerpo juega el papel de la masa cuando un cuerpo rota alrededor de un eje. Por definición, si el cuerpo ocupa un volumen $V$ y su densidad viene dado por la función $\rho(x, y, z)$, entonces su momento de inercia respecto a determinado eje es $I = \int_V (d(x, y, z))^2 \rho(x, y, z)\ dxdydz$, donde $d(x, y, z)$ es la distancia al eje del punto $(x, y, z)$. Se pide calcular el momento de inercia, respecto al eje $Z$, de una esfera rellena de radio uno y centro $(3, 0, 0)$, uniforme y de masa un kilogramo.

# 5. INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. Elemento de área de una superficie.
2. Integrales de superficie.
3. Teorema de Stokes.
4. Teorema de la divergencia de Gauss.

## PROBLEMAS

1. Sea $S$ el trozo de superficie definido por $\left\{\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u + 2v \\ z = 4 - 2u - 3v \end{array}\right.$ con $\left\{\begin{array}{l} 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ \\ 0 \leq v \leq \frac{1}{2} \end{array}\right.$. Determina el área de $S$.

2. Halla el área del trozo de superficie de ecuación $z = xy$ alojado en la región del primer octante en la que $x^2 + y^2 \leq 1$ .

3. Calcula el área de la superficie cilíndrica $z^2 + x^2 = 4, \quad z \geq 0$ comprendida entre los planos $z = 3y$, $z = y$.

4. Supuesta la tierra esférica de radio $a = 6370\,\text{km}$, determina el área de la porción de superficie terrestre comprendida entre los meridianos de longitud $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{\pi}{3}$, y los paralelos de latitud $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{\pi}{3}$.

5. Calcula $\displaystyle\iint_S (x + y + z)\, dS$ siendo $S$ la superficie $\bar{r}(u, v) = \left\{\begin{array}{l} 2u + v \\ u - 2v \\ u + 3v \end{array}\right.$ , $\begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{array}$

6. Calcula $\displaystyle\iint_S (xy + z)\, dS$ donde $S$ es la porción de cilindro $y^2 + z^2 = 1$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante.

7. Calcula $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$ siendo $S$ la cara externa de la superficie cónica $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 0$ limitada por $z = 2$ en el primer octante.

8. Sea $S$ el trozo de la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ contenido en el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$. Se pide la integral de superficie
$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1)\, dS$$

9. Calcula $\displaystyle\iint_S xyz\, dS$ siendo $S$ la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = R^2$ situada en el primer octante y limitada por $z = h$.

10. Calcula el área de la porción de cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que en el primer octante delimitan los planos $z = y$ , $z = 4$.

11. Halla el área de la porción de paraboloide $z = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

12. Calcula $\oint_\Gamma ydx + zdy + xdz$ donde $\Gamma$ , recorrido en sentido directo, es el contorno del triángulo de vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ , primero directamente y también empleando el teorema de Stokes.

13. Aplicando el Teorema de Stokes, calcula:

    *a*) $\oint_\Gamma 2ydx + 3xdy - z^2dz$, siendo $\Gamma$ la circunferencia de ecuaciones paramétricas

    $$x = 3\cos\lambda\,, y = 3\,\text{sen}\,\lambda\,, z = 0 \quad 0 \le \lambda \le 2\pi$$

    *b*) $\oint_\Gamma 2yz^2dx + xz^2dy + 3xyzdz$ siendo $\Gamma \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 3z \\ x^2 + y^2 = 3x \end{cases}$ orientada su proyección sobre $XY$ positivamente.

14. Calcula el flujo, primero aplicando la definición y después aplicando el Teorema de la Divergencia, del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (9x, 9y, 9z)$ a través de la superficie $x^2+y^2+z^2 = 25$.

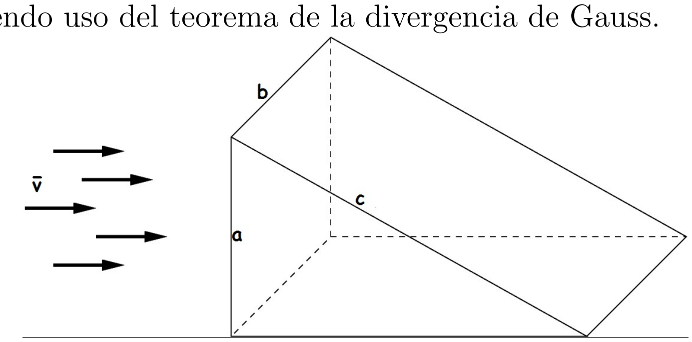
15. Calcula el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$ a través de la superficie $S \equiv \bar{r}(u, v) = \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos u\,\text{sen}\, v \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\, u \end{cases}$ $\quad 0 \le u \le \dfrac{\pi}{2} \quad 0 \le v \le 2\pi$

    *a*) Utilizando la definición.

    *b*) Utilizando el Teorema de Stokes.

    *c*) Utilizando el Teorema de la divergencia.

16. Una nube radiactiva se dirige, a 5 metros por segundo, hacia una cuña de madera, de modo perpendicular a su cara vertical, como indica la figura. La nube atraviesa la cuña manteniendo constante su velocidad, y sale por la cara de la cuña en forma de rampa. ¿Por dónde es mayor el flujo de las partículas, por la cara vertical o por la cara en forma de rampa? Responda a este problema de dos maneras distintas: una, calculando directamente el flujo por cada una de las caras, y dos, haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss.



17. Una carga eléctrica positiva $Q$ se encuentra en el origen de coordenadas. El campo eléctrico que genera dicha carga en un punto $\bar{r} = (x, y, z)$ es

$$\bar{E} = \frac{kQ}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$$

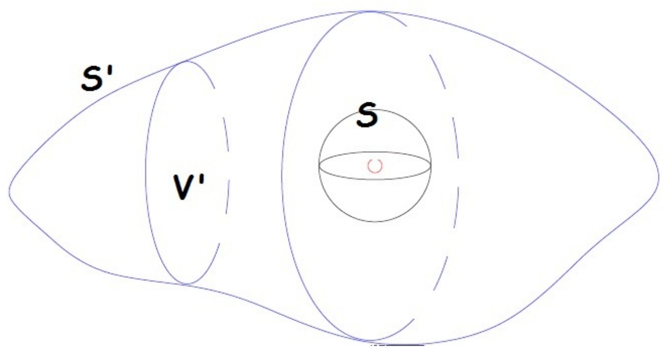
donde $r = |\bar{r}|$ y $k$ es la constante de Coulomb.

*a*) Calcula el flujo $\phi_S$ del campo eléctrico a través de la esfera $S$ de radio $R$ en cuyo centro se encuentra la carga $Q$.

*b*) Prueba que la divergencia del campo eléctrico es cero en todo punto, es decir, $\mathrm{div}(\bar{E}) = 0$.

*c*) ¿Contradicen las dos respuestas anteriores el teorema de la divergencia de Gauss?

*d*) Sea $S'$ cualquier otra superficie cerrada que contiene a la carga $Q$. Prueba que $\phi_{S'} = 4\pi kQ$.



# 6. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1. Concepto de ecuación diferencial ordinaria.
2. Ecuaciones diferenciales de variables separables.
3. Ecuaciones homogéneas.
4. Ecuaciones diferenciales exactas y no exactas.
5. Factor integrante.
6. Ecuaciones lineales de primer orden.
7. Trayectorias ortogonales.

**PROBLEMAS**

1. Sea $y(x)$ una solución de $y' = x^2 - y^2$ con $y(1) = 2$. Calcula $y'''(1)$.
2. Halla la solución general de la ecuación diferencial $yy'(1+x^2) - x(1+y^2) = 0$.
3. Un estudio revela que la población de una ciudad crece a un ritmo proporcional a dicha población. En dos años la población se dobló, y cuatro años más tarde la ciudad tenía cien mil habitantes. ¿Cuál era la población inicial cuando se comenzó el estudio?
4. Se calienta una bola de cobre hasta una temperatura de $100^oC$, entonces, en el instante $t = 0$, se coloca en agua que se mantiene a una temperatura de $30^oC$. Al término de 3 minutos la temperatura de la bola se reduce a $70^oC$. Calcula el tiempo en que la temperatura de la bola se reduce hasta $31^oC$.

   LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON: "La rapidez de cambio respecto al tiempo de la temperatura $T$ es proporcional a la diferencia entre $T$ y la temperatura del medio $T_m$"

   $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

5. Halla la curva que pasa por el punto $(0,2)$ y es tal que, en cada uno de sus puntos, la pendiente de la recta tangente tiene por valor el doble del producto de la abscisa por la ordenada.
6. Halla las curvas para las cuales la pendiente de la tangente en cualquier punto es tres veces la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenada.
7. Calcula la solución general de la ecuación diferencial $(2x+2y+3)y' - (x+y+1) = 0$ .
8. ¿Puede realizarse un cambio de modo que la ecuación diferencial $(x+y+4)dx+(6-x-y)dy = 0$ se reduzca a una ecuación de variables separables?
9. Dado el campo de fuerzas plano $\vec{f}(x,y) = (x-y, x+y)$, halla la ecuación de sus líneas de fuerza. Determina la ecuación de la línea de fuerza que pasa por el punto $(1,1)$.

10. Halla la solución del problema de valor inicial $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$, $y(1) = 0$.

11. Halla la ecuación de las curvas tales que en cada punto $P$ del primer cuadrante el área del trapecio limitado por los ejes coordenados, la tangente a la curva en $P$ y la recta paralela a $OX$ que pasa por $P$, es igual a la mitad del cuadrado de la abcisa del punto.

12. Halla la solución general de la ecuación $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 3y^2)dy = 0$.

13. Resuelve la ecuación diferencial $3\cos(y^2)\,dx - 2xy\,\mathrm{sen}(y^2)\,dy = 0$ sabiendo que admite un factor integrante que sólo depende de $x$.

14. Halla la solución general de la ecuación diferencial $ydx + (x - 3x^3y^2)dy = 0$ sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy)$.

15. Halla las curvas tales que el área del triángulo formado por el eje $OX$, la recta tangente a la curva en el punto de la curva y el segmento que une el origen con dicho punto sea constante e igual a $1/2$.

16. Halla la solución general de la ecuación diferencial $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

17. La trayectoria de una partícula de fluido se llama línea de corriente y las trayectorias ortogonales son las líneas equipotenciales. Calcula las líneas equipotenciales de un fluido sabiendo que sus líneas de corriente son $y^2 - x^2 = K$. Determina la que pasa por $(3, 2)$.

18. Halla la familia de curvas perpendiculares a la familia $y - x^2 = k$. Dibuja la familia original y la curva ortogonal que pasa por $(2, 5)$.

19. Calcula las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y^2 = 2x^2(1 - Cx)$.

# 7. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

1. El espacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea.
2. Estructura de la integral general de la ecuación completa.
3. Método de variación de las constantes.

**PROBLEMAS**

1. Halla las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales lineales :

   *a*) $y^{vi} - 4y^{v} + 6y^{iv} - 4y''' + y'' = 0$.
   *b*) $y^{vi} + 18y^{iv} + 81y'' = 0$.
   *c*) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.
   *d*) $y'' - y' - 2y = 4x^2$.
   *e*) $y'' + 2y' + y = x - 2 + \operatorname{sen} x$.

2. Halla la solución particular de la ecuación $y''' - y'' + y' - y = x - 1$ con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

3. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   *a*) Si $y = x^2$ es solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos, entonces la ecuación no es de coeficientes constantes.
   *b*) Si las raíces de la ecuación característica asociada a una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes son $1 \pm 2i$ y 3, la ecuación es $y''' - 5y'' + 11y' - 14y = 0$.
   *c*) No existen valores de $m$ de forma que $y = x^m$ sea solución de $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$.
   *d*) $y_G = C_1e^{2x} + C_2e^{x}(x + C_3)$ es solución general de $y''' - 12y'' + 22y' - 20y = 0$.

4. Determina la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes y del menor orden posible que tenga como soluciones particulares $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^x$.

5. Determina la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden tres sabiendo que $y_1 = \cos x$, $y_2 = e^x$ son soluciones.

6. Se considera la ecuación diferencial con coeficientes constantes $y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 1$ , $a_i \in \mathbb{R}$, que admite por soluciones particulares $y_1 = x$ e $y_2 = x + \operatorname{sen} x$.

   *a*) Calcula los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$.
   *b*) Halla la solución general de la ecuación homogénea asociada a la anterior y la particular con los valores iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.
   *c*) Halla la solución de $y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x)$ donde los $a_i$ son los calculados anteriormente y $f(x) = \cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)$ .

7. La ecuación diferencial con coeficientes constantes $y''' + ay'' + by' + cy = f(t)$ admite como soluciones particulares las funciones $y_1 = t + Sh^2 t$, $y_2 = t$. Se pide:

   a) la solución general de la ecuación diferencial.

   b) $a, b, c$ y la función $f(t)$ de la ecuación diferencial.

8. Resolver la ecuación $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

9. Resuelve la ecuación $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

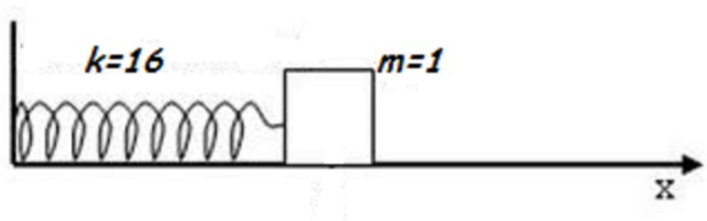
10. Dada la ecuación diferencial $xy'' - (x+1)y' + y = 0$. Se pide:

    a) Verifica que $y_1 = e^x$ es solución de la ecuación.

    b) Encuentra otra solución de la forma $y_2 = ue^x$ , de manera que $y_1, y_2$ sean linealmente independientes.

    c) Determina la solución $y = y(x)$ de forma que $y(-1) = 0$, $y'(0) = 1$.

11. Las vibraciones de una masa $m = 1$ kg en el extremo de un resorte de constante $k = 16\,\mathrm{N/m}$ están dadas por $mx''(t) + kx(t) = F(t)$ donde $x$ es el desplazamiento de $m$ de su posición de equilibrio y $F$ es la fuerza exterior aplicada en cada instante. Calcular $x(t)$ si $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ y $F(t)$ está dada por $F(t) = \begin{cases} \cos 4t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$



# 8. TRANSFORMADA DE LAPLACE. PROPIEDADES Y APLICACIONES

1. Definiciones. Propiedad de linealidad.
2. Transformada de la derivada y de las funciones más sencillas.
3. Derivación de la transformada respecto del parámetro.
4. Producto de transformadas.
5. Teoremas de traslación.
6. Transformadas de las funciones periódicas y de ciertas funciones con discontinuidades.
7. Aplicación a la solución de ecuaciones diferenciales lineales.

## PROBLEMAS

**Propiedades y cálculo**

1. Utilizando las propiedades de la transformada de Laplace calcula la transformada de:

   *a)* $f(x) = 2x^2 + \mathrm{Sh}^2(5x) + 3e^{7x} + \mathrm{sen}(5x + \pi/4)$.

   *b)* $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\cos(2t)\,dt + \frac{x^2}{2} + \mathrm{sen}^2\, x$.

2. Expresa $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$ en términos de la función escalón $u_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$.
   A partir de dicha expresión, determina $L[f]$.

3. Halla la transformada de Laplace de $\displaystyle\int_0^x e^t f(t)dt$, con

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1) \cup (2,\infty) \end{cases}$$

4. Si existen $L[f]$ y $L[g]$ , prueba que $L[f \cdot g] = \frac{1}{z}\left(L[f' \cdot g] + L[f \cdot g'] + f(0) \cdot g(0)\right)$.

5. $L[f(x)] = \dfrac{\int_0^1 xe^{-zx}\,dx}{1 - e^{-z}}$ siendo $f(x) = x - [x]$. Nota: $[x]$ es la parte entera de $x$.

**Antitransformada**

6. Calcula la antitransformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$a)\ \frac{z+4}{z^2+4} \qquad b)\ \frac{1}{z^2(z^2+1)} \qquad c)\ \frac{z+2}{z^2+4z+5} \qquad d)\ \frac{1}{z^2+4z+5}$$

**Aplicación a ecuaciones integrales y diferenciales**

7. Sea $a \neq 0$. Prueba que $y(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{sen}(a(x-t))\,dt$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + a^2 y = f(x)$ con $y(0) = y'(0) = 0$.

8. Resuelve la ecuación integral $\quad y + \displaystyle\int_0^x y(t)\,dt = \mathrm{sen}(2x)$.

9. Resuelve la ecuación integral $\quad y(t) = t^3 + \displaystyle\int_0^t \mathrm{sen}(t-x)y(x)\,dx$.

10. Resuelve la ecuación $y' + 6y + 9\int_0^t y(x)\,dx = t$ con $y(0) = 0$ mediante dos procedimientos:

    *a*) Aplica la transformada de Laplace.

    *b*) Deriva y utiliza la resolución de EDO´s lineales.

11. Resuelve la EDO $y'' + 4y = f(t)$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, siendo $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$.

**Aplicaciones**

12. Un sistema mecánico responde a un estímulo $f(t)$ con una respuesta $y(t)$ que es solución de la EDO $y'' + ay' + by = f(t)$ con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$. Se pide:

    *a*) Prueba que $L[y] = \dfrac{L[f]}{z^2 + az + b}$ .

    *b*) Suponiendo que el estímulo es la función escalón $f(t) = u_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \ge 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$, prueba que la respuesta $r(t)$ satisface que $L[r] = \dfrac{1}{z(z^2 + az + b)}$.

    *c*) Deduce de los apartados anteriores que $y(t) = (f(t) * r(t))'$. Es decir, la respuesta $y(t)$ a un estímulo cualquiera $f(t)$ es la derivada de la convolución del estímulo $f(t)$ y la respuesta $r(t)$ que se obtiene cuando el estímulo es la función escalón.

    *d*) Supongamos un circuito LC donde la inductancia es 1 henrio y la capacidad 1 faradio. La EDO que regula dicho circuito es $q'' + q = V(t)$, donde $q = q(t)$ es la carga y $V(t)$ es el voltaje. Calcula las respuestas $q(t)$, primero al estímulo dado por la función escalón $V(t) = u_0(t)$, y después al estímulo dado por la función $V(t) = \mathrm{sen}\, t$.

13. Sea la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = f(t) \quad a, b \in \mathbb{R}$, siendo $f(t)$ una función periódica. La transformada de Laplace de una solución de dicha ecuación es

$$F(z) = \frac{3}{(z-2)^2} + \frac{1}{z} + \frac{z}{z^2+4} \qquad \left(\text{ó} \quad F(s) = \frac{3}{(s-2)^2} + \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)$$

Halla $a, b$ y $f(t)$.

# 9. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales mediante el operador D.
2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformada de Laplace.

**PROBLEMAS**

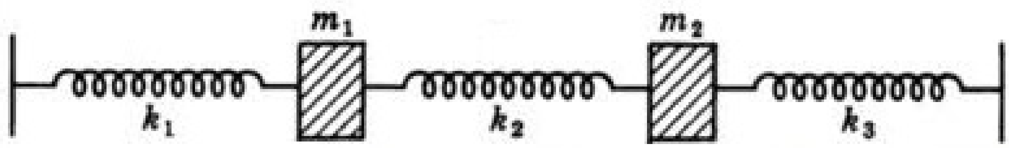
1. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ con las condiciones iniciales $x(0) = 1,\ y(0) = 0$, halla $x(t)$ e $y(t)$.

2. Resuelve el sistema $\begin{cases} x' = 2x + y + t \\ y' = 3x + 4y + e^t \end{cases}$.

3. Resuelve el sistema $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + 4y + e^t \end{cases}$ con condiciones iniciales $x(0) = -\dfrac{1}{4},\ y(0) = -\dfrac{1}{3}$.

4. El movimiento de una partícula en el plano $XOY$ está regido por el sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$ con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = y'(0) = 0$.
   Halla las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

5. El sistema mecánico de la figura consta de dos masas $m_1$ y $m_2$ sujetas a tres resortes de módulos $k_1$, $k_2$ y $k_3$.




   Las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de este sistema son

$$\begin{cases} m_1x'' + k_1x + k_2(x - y) = F_1(t) \\ m_2y'' + k_3y + k_2(y - x) = F_2(t) \end{cases}$$

   donde $x$ e $y$ son los desplazamientos de las masas $m_1$, $m_2$ respecto de su posición de equilibrio y siendo $F_1$ y $F_2$ las fuerzas que provocan el movimiento.

   Determina su solución cuando $m_1 = m_2 = 2,\ k_1 = k_2 = k_3 = 32,\ F_1(t) = F_2(t) = 4\cos t$ suponiendo las condiciones iniciales

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0.$$