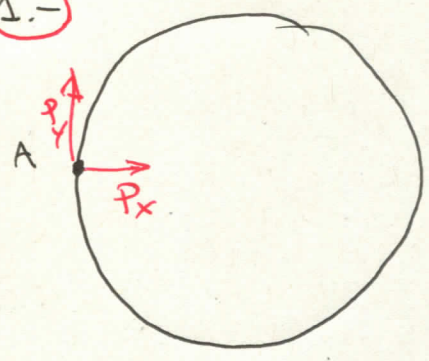


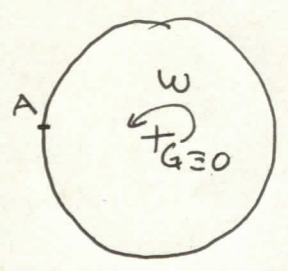
1.-



Debido a que fijamos el punto A, aparecerán mas perturbaciones de ligadura en ese punto. Como no deseo calcularlas, tomo momento de perturbaciones en ese punto A.

$$\sum \bar{M}_{perc}^A = \Delta \bar{H}^A = \underbrace{\bar{H}^{A'}}_{\text{después}} - \underbrace{\bar{H}^A}_{\text{antes}}$$

Antes

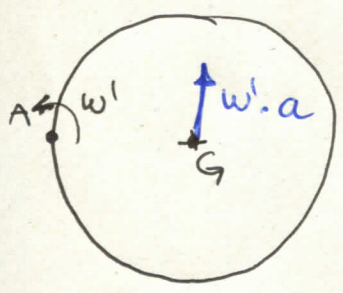


Por Koenig:

$$\bar{H}^A = \bar{A}G \wedge \bar{V}^G \cdot m + \underbrace{\bar{H}_*^G}_{\text{Sol. punto hijo}} = \bar{0} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} ma^2$$

$$\underbrace{\bar{H}^A}_{\text{antes}} = \frac{1}{2} ma^2 \cdot w \bar{k}$$

Después



Por Koenig

$$\bar{H}^{A'} = \bar{A}G \wedge \bar{V}^{G'} \cdot m + \underbrace{\bar{H}_*^{G'}}_{\text{Sol. pto hijo}} = ma^2 w' \bar{k} + \frac{1}{4} ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w' \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}^{A'} = \frac{3}{2} ma^2 w' \bar{k}$$

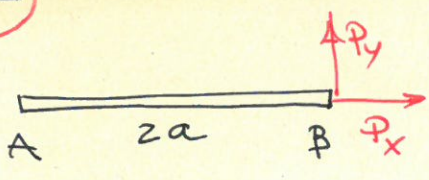
Entonces

$$\sum \bar{M}_{perc}^A = \bar{0} = \frac{3}{2} ma^2 w' \bar{k} - \frac{1}{2} ma^2 w \bar{k}$$

$$\boxed{w' = \frac{1}{3} w}$$



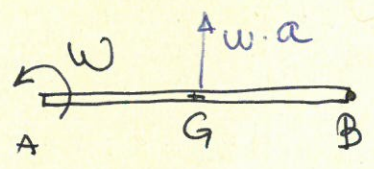
2.-



Como en el ejemplo anterior, en el punto B aparecerán dos percusiones. Tamaños momento de percusiones con respecto al punto B.

$$\sum \bar{M}_{perc}^B = \Delta \bar{H}^B = \underbrace{\bar{H}^{B'}}_{\text{después}} - \underbrace{\bar{H}^B}_{\text{antes}}$$

Antes



Por Koenig

$$\bar{H}^B = \overrightarrow{BG} \wedge \vec{V}_G^* m + \bar{H}_G^* = -ma^2 \omega \bar{k} +$$

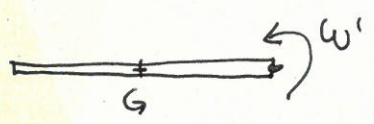
$$+ \frac{1}{12} m (2a)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}^B = -ma^2 \omega \bar{k} + \frac{1}{3} ma^2 \omega \bar{k}$$

$$\bar{H}^B = -\frac{2}{3} ma^2 \omega \bar{k}$$

antes

Después



$$\bar{H}^{B'} = \frac{1}{3} m (2a)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega' \end{pmatrix} = \frac{4}{3} ma^2 \omega' \bar{k}$$

es sólido con pto fijo

Entonces:

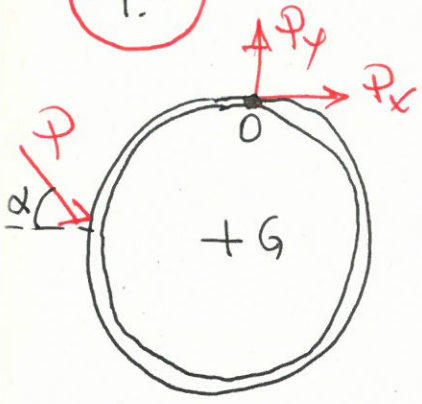
$$\sum \bar{M}_{perc}^B = 0 = \bar{H}^{B'} - \bar{H}^B = \frac{4}{3} ma^2 \omega' \bar{k} - \left( -\frac{2}{3} ma^2 \omega \bar{k} \right)$$

$$\boxed{\omega' = -\frac{\omega}{2}}$$





4.-



En "o" aparecerán unas percurciones de reaccion.

Tomamos momento de percurciones en O'.

$$\sum \bar{M}_{parc}^o = \Delta \bar{H}^o = \underbrace{\bar{H}^{o'}}_{\text{Después}} - \underbrace{\bar{H}^o}_{\text{Antes}}$$

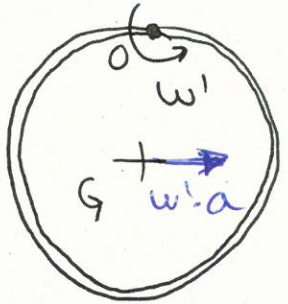
Antes -> como está en reposo  $\bar{H}^o = \bar{0}$

Después ->  $\bar{H}^{o'} = \underbrace{\bar{O}G \wedge \bar{v}^G}_{\text{Koenig}} \cdot m + \bar{H}_*^G = ma^2 \omega' \bar{k} +$

$$+ \frac{1}{2} ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega' \end{pmatrix}$$

Porque \* ve salido

$$\bar{H}^{o'} = 2 ma^2 \omega' \bar{k} \text{ con pto fijo.}$$



Entonces:  $\sum \bar{M}_{parc}^o = \bar{H}^{o'} - \bar{H}^o$

$$P \cdot \cos \alpha \cdot a + P \cdot \sin \alpha \cdot a = 2 ma^2 \omega'$$

$$\omega' = \frac{P}{ma} \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

Para calcular las percurciones de ligadura que aparecen en "o", planteamos la ecuación de sumatorio de percurciones:

$$\sum \bar{P}_{ext} = \Delta \bar{v}^G \cdot m = m(\bar{v}^G - \bar{v}^G)$$

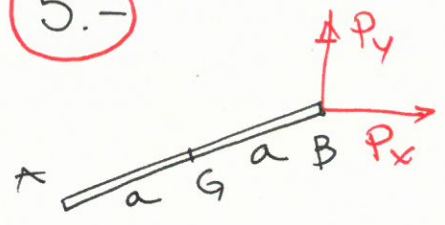
$$0x \equiv P \cdot \cos \alpha + P_x = m \left[ \underbrace{\omega' \cdot a}_{\text{después}} - \underbrace{0}_{\text{antes}} \right]$$

$$0y \equiv -P \sin \alpha + P_y = m [0 - 0]$$

$$P_x = -P \cos \alpha + ma \cdot \frac{P}{2ma} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$P_x = \frac{P}{2} [\sin \alpha - \cos \alpha]; P_y = P \cdot \sin \alpha$$

5.-

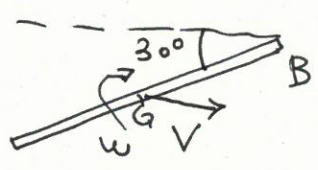


la varilla sufrirá una percusión en B al chocar contra la pared.

$$\Sigma \bar{M}_P = \Delta \bar{H}^B = \bar{H}^{B'} - \bar{H}^B$$

después                      antes

Antes



no ems.

$$\bar{H}^B = \bar{B}G \wedge \bar{V}^G + \bar{H}_*^G = v \cdot a \cdot m \perp \bar{k} + \frac{1}{12} m (2a)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}^B = \frac{1}{2} m a v \bar{k} + \frac{1}{3} m a^2 (-\omega) \bar{k}$$

$$\bar{H}^B = \frac{1}{2} m a v \bar{k} - \frac{1}{3} m a^2 \omega \bar{k}$$

Después → Quiero que todos los ptes tengan velocidad nula, entonces  $\bar{H}^{B'} = \bar{0}$

Entonces:

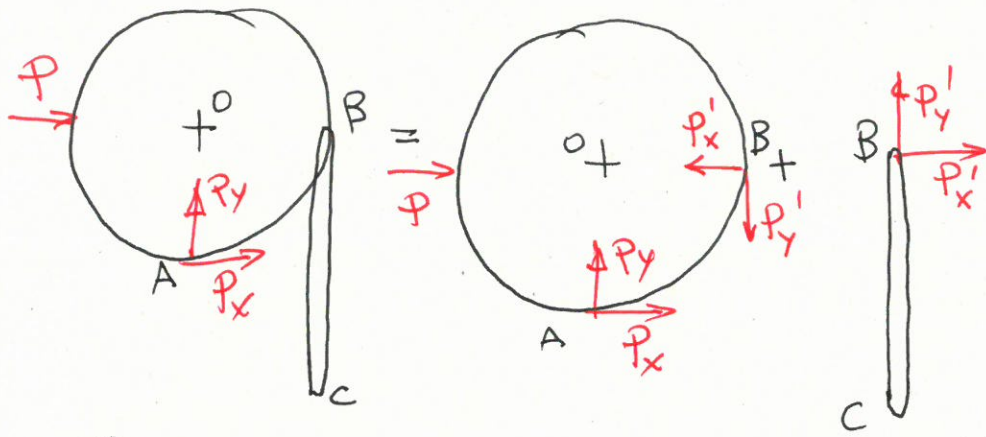
$$\Sigma \bar{M}_P = \bar{0} = \bar{H}^{B'} - \bar{H}^B = \bar{0}$$

Como  $\bar{H}^{B'} = \bar{0} \rightarrow \bar{H}^B = \bar{0} \rightarrow \frac{1}{2} m a v \bar{k} - \frac{1}{3} m a^2 \omega \bar{k} = \bar{0}$

$$\boxed{3v = 2\omega a}$$



6.-



El sistema completo recibirá unas pocas fuerzas en A, pues rueda sin deslizar sobre el suelo.

Si dividimos el sistema "florecerán" las porciones  $P_x'$  y  $P_y'$  que antes no veía, pues eran internas.  $P_x'$  y  $P_y'$  no me las piden no las calcularé.

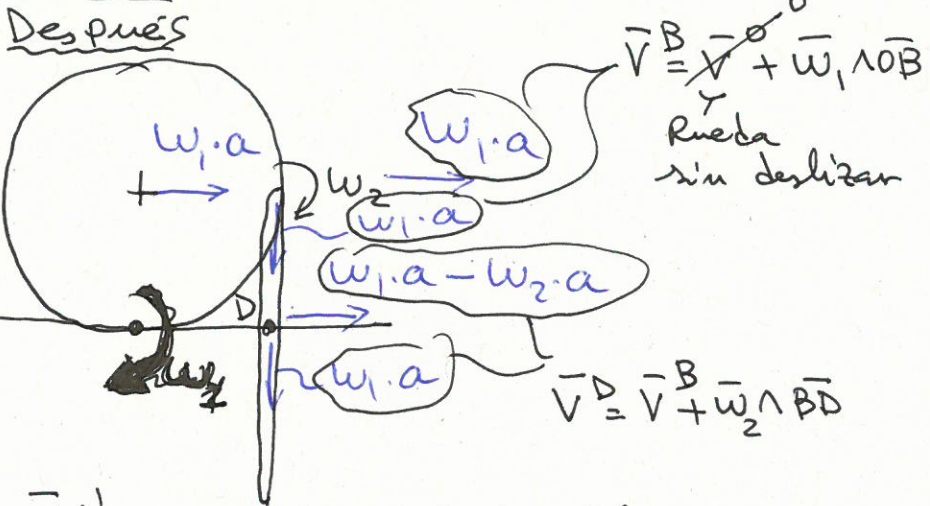
Ecuaciones

- Momentos a todo en A
- Momentos sólo a la vainilla en B.

Esas ecuaciones sólo involucran las incógnitas  $w_1$  y  $w_2$  → Resuelto.

$$\sum \bar{M}_{\text{porc}}^A = \Delta \bar{H}^A = \underbrace{\bar{H}^{A'}}_{\text{Después}} - \underbrace{\bar{H}^A}_{\text{Antes}}$$

Antes → Reposo →  $\bar{H}^A = 0$



$$\bar{H}^{A'} = \bar{H}^{A'}_{\text{disco}} + \bar{H}^{A'}_{\text{vainilla}}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}^{A'}_{\text{disco}} &= \bar{A} \bar{G}_D \wedge \bar{V}_D^{G_D} \cdot m + \bar{H}_{*}^{G_D} = \text{Koenig} \\ &= -ma^2 w_1 \bar{k} + \frac{1}{2} ma^2 (-w_1) \bar{k} \\ \bar{H}^{A'}_{\text{disco}} &= -\frac{3}{2} ma^2 w_1 \bar{k} \end{aligned}$$

$$\bar{H}^{A'}_{\text{vainilla}} = \bar{A} \bar{G}_D \wedge \bar{V}_D^{G_D} \cdot m + \bar{H}_{*}^{G_D} = -ma^2 w_1 \bar{k} + \frac{1}{12} m(2a)^2 (-w_2) \bar{k}$$

$$\bar{H}^{A'}_{\text{vainilla}} = -ma^2 w_1 \bar{k} - \frac{1}{3} ma^2 w_2 \bar{k}$$

$$\bar{H}^{A'} = -\frac{5}{2} ma^2 w_1 \bar{k} - \frac{1}{3} ma^2 w_2 \bar{k}$$

(7)

Entonces:  $\Sigma \bar{M}_{\text{pore}}^A = \bar{H}^{A'} - \bar{H}^A \bar{O}$

(1)  $-P \cdot a \bar{K} = -\frac{5}{2} m a^2 \omega_1 \bar{K} - \frac{1}{3} m a^2 \omega_2 \bar{K}$

2)  $\Sigma M_{\text{pore}}^B = \bar{H}^{B'} - \bar{H}^B \bar{O}$  (Reposo)

Sólo a la  
vuelta

$\hookrightarrow \bar{B}^{Gr} \wedge \bar{V}^{Gr} \cdot m + \bar{H}^{Gr'} =$   
Kaernig

$D \equiv Gr$

$= m a^2 (\omega_1 - \omega_2) \bar{K} + \frac{1}{12} m (2a)^2 (-\omega_2) \bar{K}$   
 $\frac{1}{3} m a^2$

Entonces

$\bar{O} = \bar{H}^{B'} \rightarrow \omega_1 - \omega_2 + \frac{1}{3} (-\omega_2) = 0$

$\omega_1 = \frac{4}{3} \omega_2 \quad (2)$

Entre (1) y (2)

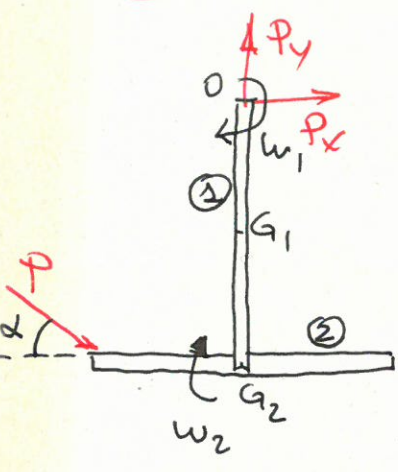
$-P \cdot a = -\frac{5}{2} m a^2 \cdot \frac{4}{3} \omega_2 - \frac{1}{3} m a^2 \omega_2$

$P = -\frac{11}{3} m a \omega_2 \rightarrow$

$\omega_2 = \frac{3}{11} \frac{P}{m a}$
$\omega_1 = \frac{4}{11} \frac{P}{m a}$



7.-



2)  $\sum \bar{M}_{pare} = \Delta \bar{H}^0 = \bar{H}^0 - \bar{H}^0 \text{ (Reposo)}$   
 a todo Después Antes

$\bar{H}^0 = \bar{H}^0_{(1)} + \bar{H}^0_{(2)}$  calculo cada vainilla por separado.

$\bar{H}^0_{(1)} = \bar{G}_1 \wedge \bar{V}^0_{G1} m + \bar{H}^0_{G1}$   
 Es sólido con pto fijo.

$= \frac{1}{3} m(2a)^2 (-w_1) \bar{k} = -\frac{4}{3} ma^2 w_1 \bar{k}$

$\bar{H}^0_{(2)} = \bar{G}_2 \wedge \bar{V}^0_{G2} m + \bar{H}^0_{G2}$   
 Koewy

$\bar{H}^0_{(2)} = -2a(2aw_2)m\bar{k} + \frac{1}{12} m(2a)^2 (-w_2)\bar{k}$

$\bar{H}^0 = -\frac{16}{3} ma^2 w_1 \bar{k} - \frac{1}{3} ma^2 w_2 \bar{k}$

Entonces:

$P \cdot a (2 \cos \alpha + \sin \alpha) = -\left(\frac{16}{3} w_1 + \frac{1}{3} w_2\right) m a^2 \quad (1)$

2)  $\sum \bar{M}_{pare}^{G2} = \Delta \bar{H}^{G2} = \bar{H}^{G2} - \bar{H}^{G2} \text{ (Reposo)}$   
 a vainilla (2)

$\bar{H}^{G2} = \bar{G}_2 \wedge \bar{V}^0_{G2} m + \bar{H}^{G2}_{G2} = \frac{1}{12} m(2a)^2 (-w_2) \bar{k}$

Entonces:

$P \cdot a \sin \alpha = -\frac{1}{3} ma^2 w_2$

Sustituyendo en (1)

$\rightarrow \boxed{w_2 = \frac{-P \cdot 3 \cdot \sin \alpha}{ma}}$

$P \cdot a (2 \cos \alpha + \sin \alpha) = -\frac{16}{3} ma^2 w_1 + P \cdot a \sin \alpha$

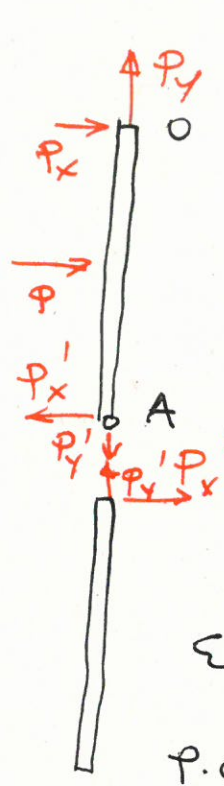
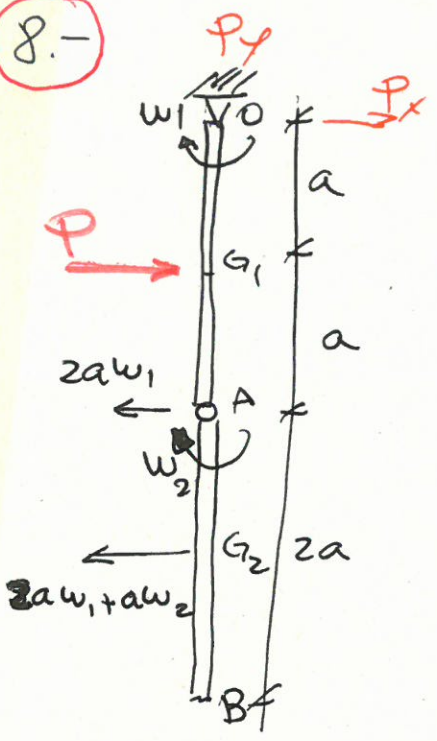
Para que las dos vainillas se muevan como un sólido rígido, como compartan el punto  $G_2$ , es suficiente con que  $w_1 = w_2$

$\boxed{w_1 = \frac{-3 \cdot P \cdot \cos \alpha}{8 \cdot m \cdot a}}$

$\frac{-3P \sin \alpha}{ma} = \frac{-3P \cos \alpha}{8 \cdot ma} \rightarrow \boxed{\text{tg } \alpha = \frac{1}{8}}$



8.-



\*  $\sum \bar{M}^0 = \Delta \bar{H}^0$   
 a todo  
 antes  $\rightarrow$  reposo, todo nulo.

Después  $\rightarrow \bar{H}^0 = \bar{H}_{OA}^0 + \bar{H}_{AB}^0$   
 $\bar{H}_{OA}^0 = \bar{I}^0 \cdot \bar{\omega}_1' = \frac{1}{3} m (2a)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_1 \end{pmatrix}$   
 Sol. pto fijo

$\bar{H}_{AB}^0 = \bar{O}G_2 \wedge \bar{V}G_2' m + \bar{I}^{G_2} \bar{\omega}_2' =$   
 Koenig  
 $= -3a(2aw_1 + aw_2) \bar{k} \cdot m + \frac{1}{12} m (2a)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_2 \end{pmatrix}$

Entonces:  $\sum \bar{M}^0 = \Delta \bar{H}^0$   
 a todo

$P \cdot a = - \frac{4}{3} ma^2 w_1 - 3a^2 (2w_1 + w_2) \cdot m - \frac{1}{3} ma^2 w_2$

(1)  $P \cdot a = - \frac{22}{3} ma^2 w_1 - \frac{10}{3} ma^2 w_2$

$\rightarrow = -a m (2aw_1 + aw_2) \bar{k} - \frac{1}{3} \underbrace{ma^2 w_2}_{\bar{I}_{AB}^{G_2} \cdot \bar{\omega}_2'} \cdot \bar{k}$

$0 = -2a^2 m w_1 - \frac{4}{3} ma^2 w_2$

$\rightarrow \boxed{w_2 = -\frac{3}{2} w_1}$  (2)

\*  $\sum \bar{M}^A = \Delta \bar{H}_{AB}^A$   
 a AB

antes  $\rightarrow$  reposo

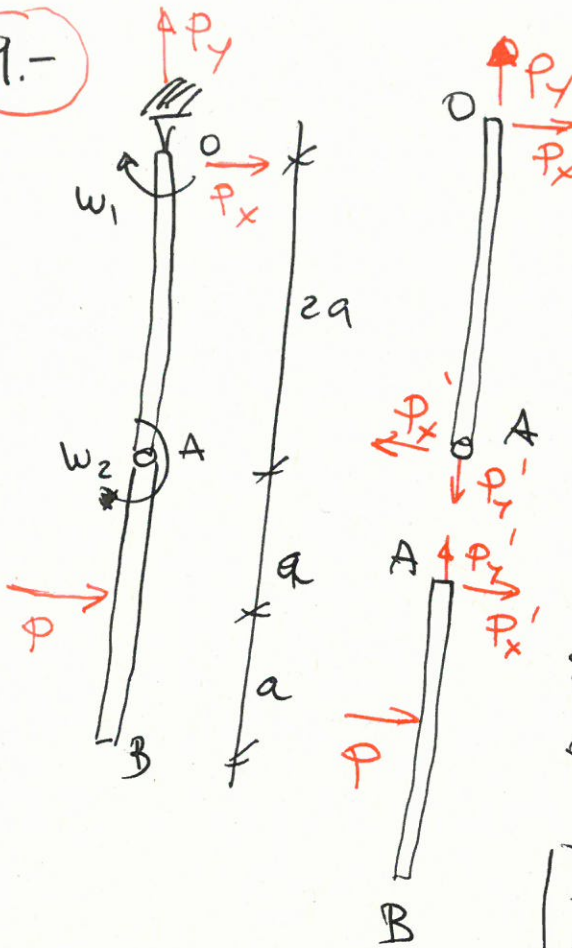
Después  $\rightarrow \bar{H}_{AB}^A = \bar{A}G_2 \wedge \bar{V}G_2' m + \bar{I}^{G_2} \bar{\omega}_2'$   
 Koenig

Entonces:  $\sum \bar{M}^A = \Delta \bar{H}_{AB}^A$   
 a AB  $\rightarrow$

Entrese (1) y (2)

$$\begin{cases} w_1 = -\frac{3P}{7ma} \\ w_2 = \frac{9P}{14ma} \end{cases}$$

9.-



\*  $\Sigma \bar{M}^O = \Delta \bar{H}^O$   
a todo  
 $\Delta \bar{H}^O \rightarrow$  igual que en ejercicios  
Entonces:

$$3Pa = -\frac{22}{3} ma^2 w_1 - \frac{10}{3} ma^2 w_2 \quad (1)$$

\*  $\Sigma \bar{M}^A = \Delta \bar{H}^A$   
a AB  
 $\Delta \bar{H}^A$  como en ejercicios  
Entonces:

$$P \cdot a = -2ma^2 w_1 - \frac{4}{3} ma^2 w_2 \quad (2)$$

$$\frac{-P}{2ma} = w_1 + \frac{2}{3} w_2$$

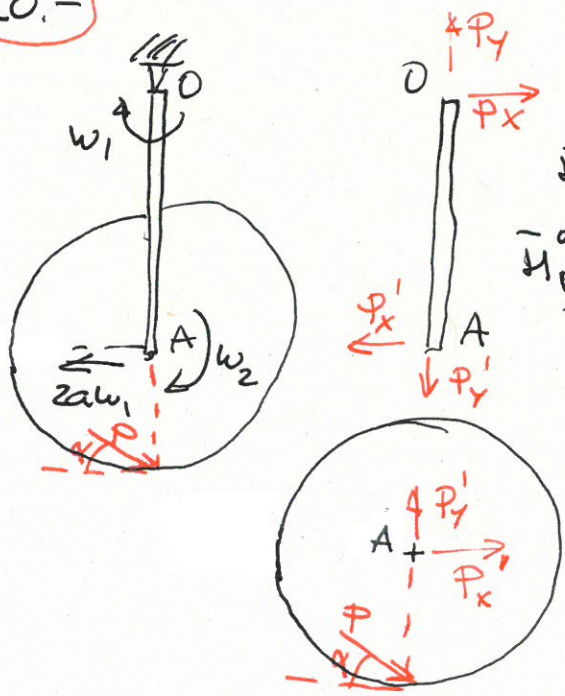
Entre (1) y (2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{-9P}{2ma} &= 11w_1 + 5w_2 \\ \frac{-P}{2ma} &= w_1 + \frac{2}{3}w_2 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} w_1 &= -\frac{3}{14} \frac{P}{m \cdot a} \\ w_2 &= -\frac{3}{7} \frac{P}{m \cdot a} \end{aligned} \right\}$$

10.-



\*  $\Sigma \bar{M}^O = \Delta \bar{H}^O$  antes reposo, todo nulo.  
a todo

Después:  $\bar{H}^O = \bar{H}^{varilla} + \bar{H}^{disco}$

$$\bar{H}^{varilla} = \bar{I}^O \cdot \bar{\omega}_1 = \frac{1}{3} m(2a)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} ma^2 w_1 \bar{k}$$

$$\bar{H}^{disco} = \bar{O} \bar{G}_D \bar{I} \bar{V} \bar{G}_D' m + \bar{H} \bar{G}_D' = -4a^2 m w_1 \bar{k} + \frac{1}{4} ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}^O = -\frac{4}{3} ma^2 w_1 \bar{k} - 4ma^2 w_1 \bar{k} - \frac{1}{2} ma^2 w_2 \bar{k}$$

$$\bar{H}^O = -\frac{16}{3} ma^2 w_1 \bar{k} - \frac{1}{2} ma^2 w_2 \bar{k}$$

$\Sigma \bar{H}^O = \Delta \bar{H}^O$  a todo

$$Pa(3 \cos \alpha) = -ma^2 \left( \frac{16}{3} w_1 + \frac{w_2}{2} \right) \quad (1)$$

$$3Pa \cos \alpha = -ma^2 \left( \frac{16}{3} w_1 + \frac{w_2}{2} \right)$$



\*  $\sum \bar{M}^A = \Delta \bar{H}^A$  Antes en reposo  $\bar{H}_{Disco}^A = \vec{0}$   
al disco

Después  $\bar{H}_{Disco}^A = \vec{r}_{GD} \wedge \vec{v}_{G_D} + \bar{H}_{G_D} = \frac{1}{4} ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 \end{pmatrix}$

$$\bar{H}_{Disco}^A = -\frac{1}{2} ma^2 \omega_2 \bar{k}$$

$$\sum \bar{M}^A = \Delta \bar{H}^A \rightarrow P a \cos \alpha = -\frac{1}{2} ma^2 \omega_2$$

$$\omega_2 = -\frac{2P \cdot \cos \alpha}{ma}$$

de (1)

$$\frac{-3P \cos \alpha}{ma} = \frac{16}{3} \omega_1 + \frac{\omega_2}{2}$$

$$\frac{16}{3} \omega_1 = -\frac{3P \cos \alpha}{ma} + \frac{P \cos \alpha}{ma} = -\frac{2P \cos \alpha}{ma}$$

$$\omega_1 = -\frac{3P \cos \alpha}{8ma}$$

Para que se muevan inicialmente como un único sólido, como tienen el punto A en común, valdrá con  $\omega_1 = \omega_2$

$$\frac{-3P \cos \alpha}{8ma} = \frac{-2P \cos \alpha}{ma}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{3}{8} = -2 \\ \cos \alpha = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{Imposible}$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$  y no hay movimiento, pues  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ .