## Problemas de series de potencias y de integrales impropias.

**1.** *Determinar el intervalo de convergencia de las series de potencias, y su dominio de convergencia en los casos en que sea posible:*

*1.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ *2.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ *3.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$ *4.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n4^n}x^n$

*5.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 4^n}x^n$ *6.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}x^n$ *7.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\sqrt{n}}x^n$ *8.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^{2n+1}$

*9.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!\Big(\frac{x}{n}\Big)^n$ *10.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log n}{n}x^n$ *11.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n\tan\frac{a}{2^n}$

**2.** *Desarrollar en series de potencias de $x$ las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:*

*1.* $\dfrac{x}{9+x^2}$ *2.* $\dfrac{1}{4-x^4}$ *3.* $\dfrac{x}{a^2-b^2x^2}$ $a,b>0$

*4.* $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ *5.* $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ *6.* $\log\dfrac{a+bx}{a-bx}$ $a,b>0$

*7.* $\sqrt[3]{8+x}$ *8.* $(1+e^x)^3$ *9.* $(1+x)e^{-x}$ *10.* $\cos^2 x$

*11.* $\cos x\,\mathrm{sen}^2 x$ *12.* $\mathrm{sen}^2 2x$ *13.* $\mathrm{sen}\, x - x\cos x$ *14.* $\dfrac{1}{x-1}+x^2\,\mathrm{sen}\, x$

*15.* $\displaystyle\int_0^x e^{-z^2}\,dz$ *16.* $\displaystyle\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$

**3.** *Encontrar la única serie de potencias $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ con radio de convergencia no nulo que cumple $f''+f=0$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$. Identificar esta función.*

**4.** *Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias*

*1.* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{|x-1|}$ *2.* $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$ *3.* $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\log x}$

*4.* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+3}}$ *5.* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *6.* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

*7.* $\displaystyle\int_2^{\infty}e^{-x^3}\,dx$ *8.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\, x}{1+x^2}\,dx$

**5.** *Estudiar la convergencia de la integral impropia*

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{|x(1-x^2)|}}.$$

**6** (Funciones gamma y beta de Euler)**.**

1. *Probar que, dados* $x, y \in (0, \infty)$, *las siguientes integrales son convergentes:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt.$$

2. *Probar que* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *para todo* $x > 0$.
3. *Probar que* $\Gamma(n+1) = n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**7.** *Teniendo en cuenta las propiedades de la función* $\Gamma$ *y sabiendo que* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, *calcular las siguientes integrales:*

*1.* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ *2.* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$ *3.* $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$