,

Apuntes de Complementos Matemáticos para la Ingeniería Industrial

Tema 2.2. Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador

Ejercicios

UNED

ETS de Ingenieros Industriales

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

1. Curvas de Bézier

1. Sea $\mathbf{x}(t)$ la curva de Bézier con polígono de control formado por $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,-1)$, $(4,0)$. ¿Cuál es su ecuación?

   Solución: Tenemos 5 puntos, por lo que el grado va a ser menor o igual que 4, en principio, aunque podría ser 3. Determinando la ecuación de la curva, vemos que es 4.

   El polígono de control lo forman los puntos

   $$\mathbf{b}_0 = (-1,2),\ \mathbf{b}_1 = (0,1),\ \mathbf{b}_2 = (1,1),\ \mathbf{b}_3 = (2,-1),\ \mathbf{b}_4 = (4,0).$$

   La curva de Bézier cumple

   $$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

   para los polinomios de Bernstein

   $$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$

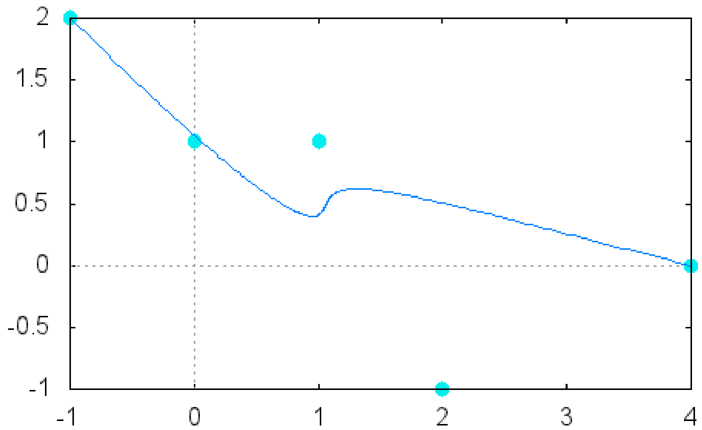
   Entonces la curva de Bézier es

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{x}(t) &= (-1,2)B_0^4(t) + (0,1)B_1^4(t) + (1,1)B_2^4(t) + (2,-1)B_4^4(t) + (4,0)B_4^4(t) \\
   &= (-1,2)\binom{4}{0} t^0 (1-t)^4 + (0,1)\binom{4}{1} t^1 (1-t)^3 \\
   &\quad + (1,1)\binom{4}{2} t^2 (1-t)^2 + (2,-1)\binom{4}{3} t^3 (1-t)^1 \\
   &\quad + (4,0)\binom{4}{4} t^4 (1-t)^0 \\
   &= (-1,2)(1-t)^4 + (0,1)4t^1(1-t)^3 + (1,1)6t^2(1-t)^2 \\
   &+ (2,-1)4t^3(1-t)^1 + (4,0)t^4 \\
   &= \big(4t^4 - (1-t)^4 + 8t^3(1-t) + 6t^2(1-t)^2, \\
   &\quad 2(1-t)^4 + 4t(1-t)^3 - 4t^3(1-t) + 6t^2(1-t)^2\big) \\
   &= \big(t^4 + 4t - 1, 8t^4 - 12t^3 + 6t^2 - 4t + 2\big).
   \end{aligned}$$

   La representación gráfica, con Maxima se hace con

```
>> wxplot2d([[discrete,[[-1,2],[0,1],[1,1],[2,-1],[4,0]]]
   ['parametric, t^4+4*t-1,8*t^4-12*t^3+6*t^2-4*t+2,
   [t, 0, 1], [nticks, 300]]],$
   [style, [points,3,0,1], [lines,1,1]],[legend,false])$
```

Si tomamos los puntos de control $(-1,2)$,$(2,-1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(4,0)$, la gráfica resultante es



2. Calcúlese la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(1,2,0)$, $(0,-1,1)$, $(3,0,1)$, $(1,-1,2)$, $(0,1,5)$.

   Ejercicio 62 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones"de Antonio Valdés.

   Solución: El polígono es

   $$\mathbf{b}_0 = (1,2,0),\ \mathbf{b}_1 = (0,-1,1),\ \mathbf{b}_2 = (3,0,1),\ \mathbf{b}_3 = (1,-1,2),\ \mathbf{b}_4 = (0,1,5).$$

   Entonces la curva de Bézier cumple

   $$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

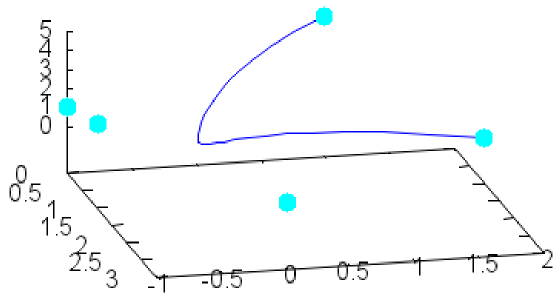
   para los polinomios de Bernstein

   $$B_i^n(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i},\ B_i^4(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{4-i}.$$

La curva de Bézier es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(t) &= (1,2,0)B_0^4\,(t) + (0,-1,1)B_1^4\,(t) + (3,0,1)B_2^4\,(t) \\
&+ (1,-1,2)B_3^4\,(t) + (0,1,5)B_4^4\,(t) \\
&= (1,2,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} t^0\,(1-t)^4 + (0,-1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t^1\,(1-t)^3 \\
&+ (3,0,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t^2\,(1-t)^2 + (1,-1,2)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^3\,(1-t)^1 \\
&+ (0,1,5)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t^4\,(1-t)^0 \\
&= (1,2,0)\,(1-t)^4 + (0,-1,1)\,4t^1\,(1-t)^3 + (3,0,1)\,6t^2\,(1-t)^2 \\
&+ (1,-1,2)\,4t^3\,(1-t)^1 + (0,1,5)\,t^4 \\
&= \big(1-4t+24t^2-36t^3+15t^4, 2-12t+24t^2-24t^3+11t^4\;, \\
&\quad 4t-6t^2+8t^3-t^4\big)\,.
\end{aligned}
$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



3. Sea C la curva dada por la ecuación $\mathbf{x}(t) = (t+2, t^3+t)$ con $t \in [0,1]$. Se pide escribirla como una curva de Bézier:

   a) con 3 vértices,

   b) con 4 vértices,

   c) con 5 vértices,

   d) con 6 vértices.

Solución:

a) Buscamos escribir

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbf{b}_i B_i^2(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) t^0 (1-t)^2 + \mathbf{b}_1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) t^1 (1-t)^1 \\
&\quad + \mathbf{b}_2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) t^2 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^2 + \mathbf{b}_1 2t (1-t) + \mathbf{b}_2 t^2.
\end{aligned}$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0)(1-t)^2 + 2(x_1, y_1) t (1-t) + (x_2, y_2) t^2 \\
&= \big(x_0 - 2x_0 t + x_0 t^2 + 2t x_1 - 2t^2 x_1 + t^2 x_2, \\
&\quad\ y_0 - 2y_0 t + y_0 t^2 + 2t y_1 - 2t^2 y_1 + t^2 y_2 \big) \\
&= \big(x_0 + (2x_1 - 2x_0) t + (x_0 - 2x_1 + x_2) t^2, \\
&\quad\ y_0 + (2y_1 - 2y_0) t + (y_0 - 2y_1 + y_2) t^2 \big) \\
&= (t + 2, t^3 + t).
\end{aligned}$$

Observamos ya que es imposible, porque no se puede conseguir que la segunda componente tenga grado 3.

b) El grado máximo de los polinomios que forman las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3, es decir, con 4 vértices.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right) t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) t^1 (1-t)^2 \\
&\quad + \mathbf{b}_2 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) t^3 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
\end{aligned}$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0)(1-t)^3 + (x_1, y_1)\, 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2)\, 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3)\, t^3 \\
&= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0 t + 3x_0 t^2 - x_0 t^3 + 3t x_1 - 6t^2 x_1 + 3t^3 x_1 + 3t^2 x_2 - 3t^3 x_2 + t^3 x_3, \\ y_0 - 3y_0 t + 3y_0 t^2 - y_0 t^3 + 3t y_{01} - 6t^2 y_1 + 3t^3 y_1 + 3t^2 y_2 - 3t^3 y_2 + t^3 y_3 \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)\, t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)\, t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)\, t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1)\, t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)\, t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)\, t^3 \end{pmatrix}^t \\
&= (t+2, t^3 + t).
\end{aligned}$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)\, t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)\, t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)\, t^3 = t^3 + t,$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0, \\
-3y_0 + 3y_1 &= 1 \Longrightarrow y_1 = \frac{1}{3}, \\
3y_0 - 6y_1 + 3y_2 &= 0 \Longrightarrow y_2 = \frac{2}{3}, \\
-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 &= 1 \Longrightarrow y_3 = 2.
\end{aligned}$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_0 + (-3x_0 + 3x_1)\, t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)\, t^2 \\
+ (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)\, t^3 = t + 2.
\end{aligned}$$

Se deduce:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2, \\
-3x_0 + 3x_1 &= 1 \Longrightarrow x_1 = \frac{7}{3}, \\
3x_0 - 6x_1 + 3x_2 &= 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{8}{3}, \\
-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \Longrightarrow x_3 = 3.
\end{aligned}$$

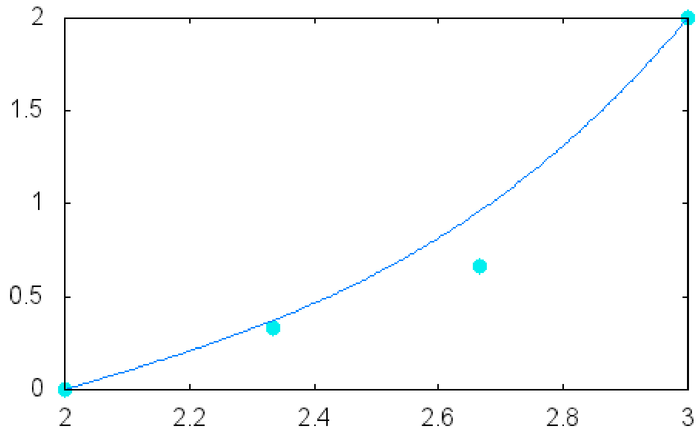
Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (t^3 - 2t + 1, 4t - 7) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= (2, 0)\, B_0^3(t) + \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) B_1^3(t) + \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) B_2^3(t) + (3, 2)\, B_3^3(t)\,.
\end{aligned}$$

Podemos desarrollar y tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (2,0)\,B_0^3(t) + \left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right) B_1^3(t) + \left(\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right) B_2^3(t) + (3,2)\,B_3^3(t) \\
&= (2,0)\,(1-t)^3 + 3\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right) t\,(1-t)^2 \\
&\quad + 3\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right) t^2\,(1-t) + (3,2)\,t^3 \\
&= \left(t+2, t+t^3\right).
\end{aligned}$$

La gráfica de la curva con el polígono de control es:



c) Repetimos el proceso con 5 vértices. Tenemos, para $\mathbf{b}_i$ como habitualmente

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \binom{4}{0} t^0\,(1-t)^4 + \mathbf{b}_1 \binom{4}{1} t^1\,(1-t)^3 \\
&\quad + \mathbf{b}_2 \binom{4}{2} t^2\,(1-t)^2 + \mathbf{b}_3 \binom{4}{3} t^3\,(1-t)^1 + \mathbf{b}_4 \binom{4}{4} t^4\,(1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0\,(1-t)^4 + \mathbf{b}_1 4t^1\,(1-t)^3 + \mathbf{b}_2 6t^2\,(1-t)^2 + \mathbf{b}_3 4t^3\,(1-t) + \mathbf{b}_4 t^4 \\
&= (t+2, t^3+t).
\end{aligned}$$

Entonces, resulta el sistema de ecuaciones, igualando la primera componente:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2, \\ -4x_0 + 4x_1 &= 1, \\ 6x_2 + 12x_1 - 6x_0 &= 0, \\ -4x_3 + 12x_2 - 12x_1 + 4x_0 &= 0, \\ -x_4 + 4x_3 - 6x_2 + 4x_1 - x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Su solución es

$$x_0 = 2,\ x_1 = \frac{9}{4},\quad x_2 = \frac{5}{2},\quad x_3 = \frac{11}{4},\quad x_4 = 3.$$

Para la segunda componente, resulta

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ -4y_0 + 4y_1 &= 1, \\ 6y_2 + 12y_1 - 6y_0 &= 0, \\ -4y_3 + 12y_2 - 12y_1 + 4y_0 &= 1, \\ -y_4 + 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0 &= 0. \end{aligned}$$

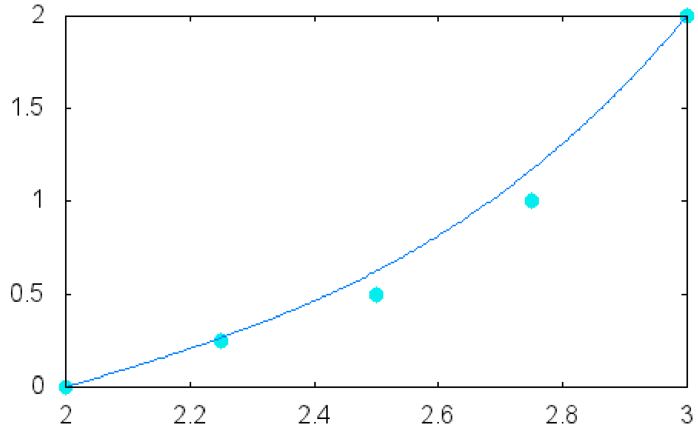
La solución es:

$$y_0 = 0,\quad y_1 = \frac{1}{4},\quad y_2 = \frac{1}{2},\quad y_3 = 1,\quad y_4 = 2.$$

Podemos desarrollar y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}_0 (1-t)^4 + \mathbf{b}_1 4t^1 (1-t)^3 + \mathbf{b}_2 6t^2 (1-t)^2 \\ &\quad + \mathbf{b}_3 4t^3 (1-t) + \mathbf{b}_4 t^4 \\ &= (2,0)(1-t)^4 + \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) 4t^1 (1-t)^3 \\ &\quad + \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) 6t^2 (1-t)^2 + \left(\frac{11}{4}, 1\right) 4t^3 (1-t) + (3,2)\, t^4 \\ &= \left(t+2, t+t^3\right). \end{aligned}$$

Las componentes son polinomios de grado 3, como era de esperar. Escribir la curva como curva de Bézier no significa escribirla con componentes de grado máximo permitido por los polinomios de Bernstein(en este caso, grado 4), sino expresada a partir de polinomios de Bernstein de grado 4. La curva con los puntos de control es



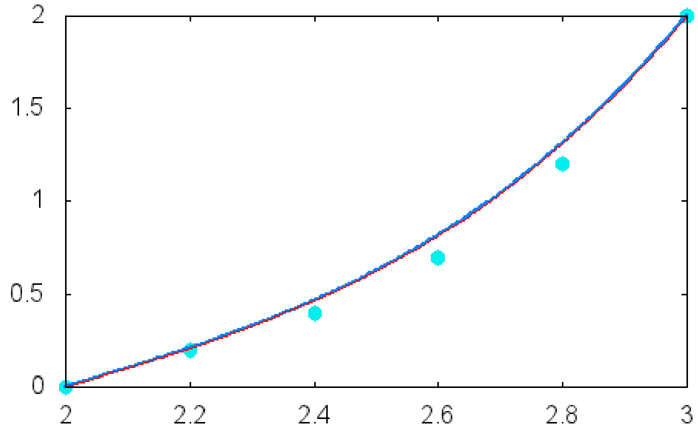
d) Para 6 puntos, simplemente escribimos el resultado. Los puntos de control son:

$$(2,0)\,,\left(\frac{11}{5},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{12}{5},\frac{2}{5}\right),\left(\frac{13}{5},\frac{7}{10}\right),\left(\frac{14}{5},\frac{6}{5}\right),(3,2)\,,$$

y la curva es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{5}\mathbf{b}_i B_i^5(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^5(t) + \mathbf{b}_1 B_1^5(t) + \mathbf{b}_2 B_2^5(t) + \mathbf{b}_3 B_3^5(t) + \mathbf{b}_4 B_4^5(t) + \mathbf{b}_5 B_5^5(t) \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^5 + \mathbf{b}_1 5t^1 (1-t)^4 + \mathbf{b}_2 10t^2 (1-t)^3 \\
&\quad + \mathbf{b}_3 10t^3 (1-t)^2 + \mathbf{b}_4 5t^4 (1-t) + \mathbf{b}_5 t^5 \\
&= (2,0)(1-t)^5 + \left(\frac{11}{5},\frac{1}{5}\right)5t^1(1-t)^4 + \left(\frac{12}{5},\frac{2}{5}\right)10t^2(1-t)^3 \\
&\quad + \left(\frac{13}{5},\frac{7}{10}\right)10t^3(1-t)^2 + \left(\frac{14}{5},\frac{6}{5}\right)5t^4(1-t) + (3,2)\,t^5 \\
&= \left(t+2,\, t+t^3\right).
\end{aligned}$$

La gráfica es



4. Escríbase la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 7)$ con $t \in [0, 1]$ como una curva de Bézier.

   Ejercicio 63 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.

   Solución: Como el grado máximo de los polinomios que dan las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^1 \\
&\quad + \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
\end{aligned}$$

   Si llamamos $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0)(1-t)^3 + (x_1, y_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3) t^3 \\
&= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0 t + 3x_0 t^2 - x_0 t^3 + 3t x_1 - 6t^2 x_1 + 3t^3 x_1 + 3t^2 x_2 - 3t^3 x_2 + t^3 x_3, \\ y_0 - 3y_0 t + 3y_0 t^2 - y_0 t^3 + 3t y_{01} - 6t^2 y_1 + 3t^3 y_1 + 3t^2 y_2 - 3t^3 y_2 + t^3 y_3 \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + (-3x_0 + 3x_1) t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2) t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3) t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1) t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2) t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) t^3 \end{pmatrix}^t \\
&= (t^3 - 2t + 1, 4t - 7).
\end{aligned}$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0+(-3y_0+3y_1)\,t+(3y_0-6y_1+3y_2)\,t^2+(-y_0+3y_1-3y_2+y_3)\,t^3=4t-7,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} y_0 &= -7,\\ -3y_0+3y_1=4 &\Longrightarrow 3y_1=4-21=-17 \Longrightarrow y_1=-\frac{17}{3},\\ 3y_0-6y_1+3y_2=0 &\Longrightarrow 3y_2=-3y_0+6y_1=21-6\cdot\frac{17}{3}=-13\\ &\Longrightarrow y_2=-\frac{13}{3},\\ -y_0+3y_1-3y_2+y_3=0 &\Longrightarrow y_3=y_0-3y_1+3y_2=-7+3\cdot\frac{17}{3}-3\cdot\frac{13}{3}\\ &= -3. \end{aligned}$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$\begin{aligned} &x_0+(-3x_0+3x_1)\,t\\ &\quad+(3x_0-6x_1+3x_2)\,t^2+(-x_0+3x_1-3x_2+x_3)\,t^3=t^3-2t+1. \end{aligned}$$

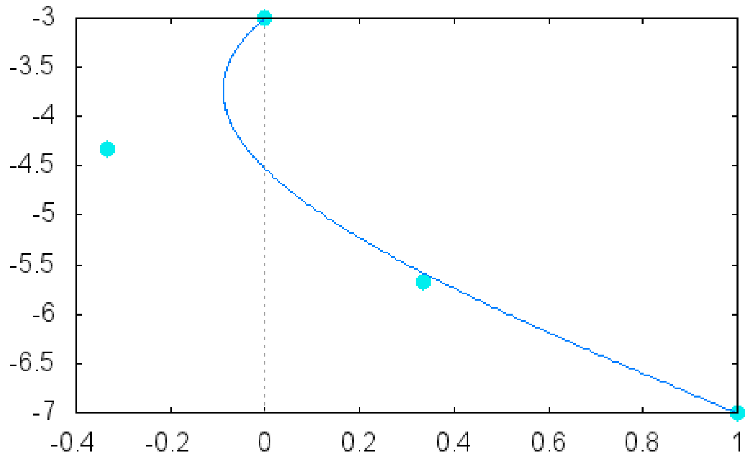
Se deduce:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1,\\ -3x_0+3x_1=-2 &\Longrightarrow 3x_1=-2+3=1 \Longrightarrow x_1=\frac{1}{3},\\ 3x_0-6x_1+3x_2=0 &\Longrightarrow 3x_2=-3x_0+6x_1=-3+6\cdot\frac{1}{3}=-1\\ &\Longrightarrow x_2=-\frac{1}{3},\\ -x_0+3x_1-3x_2+x_3=1 &\Longrightarrow x_3=1+x_0-3x_1+3x_2\\ &\Longrightarrow x_3=1+1-3\cdot\frac{1}{3}+3\left(-\frac{1}{3}\right)=0. \end{aligned}$$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (t^3-2t+1,4t-7)=\mathbf{b}_0B_0^3\,(t)+\mathbf{b}_1B_1^3\,(t)+\mathbf{b}_2B_2^3\,(t)+\mathbf{b}_3B_3^3\,(t)\\ &= (1,-7)\,B_0^3\,(t)+\left(\frac{1}{3},-\frac{17}{3}\right)B_1^3\,(t)+\left(-\frac{1}{3},-\frac{13}{3}\right)B_2^3\,(t)\\ &\quad+(0,-3)\,B_3^3\,(t)\,. \end{aligned}$$

La gráfica es:



5. Escríbase la curva $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 5t - 1, 4t^2 - 1)$ con $t \in [-3, 2]$ como una curva de Bézier. (Indicación: compóngase la curva con una transformación afín que lleve el intervalo $[0, 1]$ en $[-3, 2]$).

   Ejercicio 64 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.

   Solución: Determinamos la transformación afín que lleva el intervalo $[-3, 2]$ en el intervalo $[0, 1]$. Debe cumplir:

$$f(-3) = -3a + b = 0,$$
$$f(2) = 2a + b = 1.$$

   De aquí se deduce que

$$s = f(t) = \frac{1}{5}t + \frac{3}{5}$$

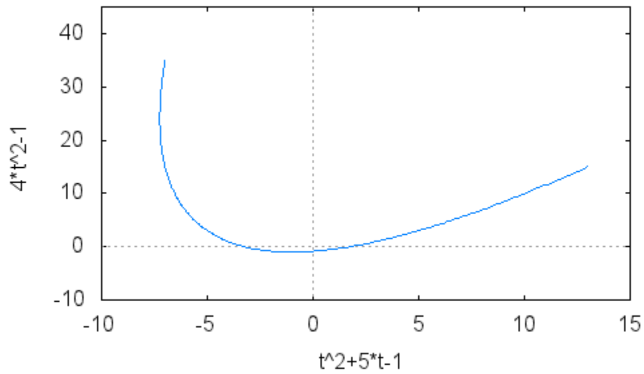
   transforma el intervalo $[-3, 2]$ en el intervalo $[0, 1]$. La transformación inversa es

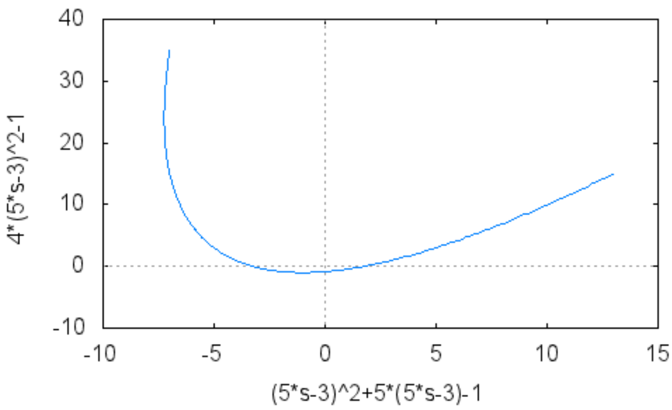
$$f^{-1}(s) = 5s - 3 = t.$$

   Entonces, $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 5t - 1, 4t^2 - 1)$ con $t \in [-3, 2]$ es lo mismo que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \mathbf{x}(f^{-1}(s)) \\ &= ((5s-3)^2 + 5(5s-3) - 1, 4(5s-3)^2 - 1) \\ &= \left(25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35\right). \end{aligned}$$

   Si representamos las gráficas de $\mathbf{x}(t)$ y de $\mathbf{y}(s)$ vemos que coinciden:





Por otro lado $\mathbf{y}(s)$ es una curva definida sonbre $[0,1]$ y podemos expresarla a partir de los polinomios de Bernstein:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbf{b}_i B_i^2(s) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^2(s) + \mathbf{b}_1 B_1^2(s) + \mathbf{b}_2 B_2^2(s) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} s^0 (1-s)^2 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} s^1 (1-s)^1 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} s^2 (1-s)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-s)^2 + 2\mathbf{b}_1 s (1-s) + \mathbf{b}_2 s^2 \\
&= \left(x_0 (1-s)^2 + 2x_1 s (1-s) + x_2 s^2, y_0 (1-s)^2 + 2y_1 s (1-s) + y_2 s^2\right),
\end{aligned}$$

para $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i)$. Desarrollando esta expresión, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \left(25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35\right) \\
&= \left(x_0 + 2s(-x_0 + x_1) + s^2 (x_0 - 2x_1 + x_2),\right. \\
&\qquad \left. y_0 + 2s(y_0 + y_1) + s^2 (y_0 - 2y_1 + y_2)\right).
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
25 &= x_0 - 2x_1 + x_2, \\
-5 &= 2\left(-x_0 + x_1\right), \\
-7 &= x_0, \\
100 &= y_0 - 2y_1 + y_2, \\
-120 &= 2\left(y_0 + y_1\right), \\
35 &= y_0.
\end{aligned}$$

De aquí deducimos:

$$x_0 = -7, \quad x_1 = -\frac{19}{2}, \quad x_2 = 13, \quad y_0 = 35, \quad y_1 = -25, \quad y_2 = 75.$$

Para resolverlo con `Maxima`, escribimos `linsolve([25=x0-2*x1+x2, -5=2*(-x0+x1), -7=x0, 10=y0-2*y1+y2, -120=2*(-y0+y1), 35=y0], [x0,x1,x2,y0,y1,y2]);`.

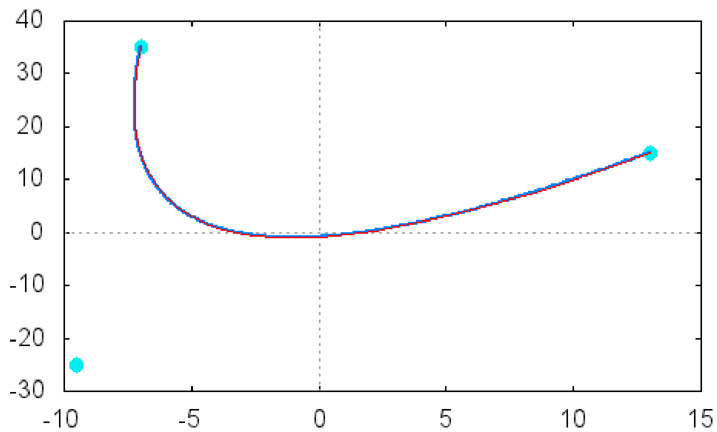
Tenemos ya la expresión de $\mathbf{y}(s)$ a partir de los polinomios de Bernstein:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \mathbf{b}_0 B_0^2(s) + \mathbf{b}_1 B_1^2(s) + \mathbf{b}_2 B_2^2(s) \\
&= (-7, 35)\, B_0^2(s) + \left(-\frac{19}{2}, -25\right) B_1^2(s) + (13, 75)\, B_2^2(s).
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que convertir, de nuevo, el intervalo en $[-3, 2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(f(t)) &= (-7, 35)\, B_0^2\left(\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{19}{2}, -25\right) B_1^2\left(\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}\right) \\
&+ (13, 75)\, B_2^2\left(\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}\right).
\end{aligned}$$

Representamos el polígono de control con las dos curvas:



6. Escríbase la curva de Bézier del ejercicio anterior como una curva de Bézier de grado tres, es decir, con un polígono de control de cuatro vértices.

   Ejercicio 65 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.

   Solución: Tenemos que escribir

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(s) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(s) + \mathbf{b}_1 B_1^3(s) + \mathbf{b}_2 B_2^3(s) + \mathbf{b}_3 B_3^3(s) \\
&= \mathbf{b}_0 \binom{3}{0} s^0 (1-s)^3 + \mathbf{b}_1 \binom{3}{1} s^1 (1-s)^2 \\
&\quad + \mathbf{b}_2 \binom{3}{2} s^2 (1-s)^1 + \mathbf{b}_3 \binom{3}{3} s^3 (1-s)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-s)^3 + 3\mathbf{b}_1 s (1-s)^2 + 3\mathbf{b}_2 s^2 (1-s) + \mathbf{b}_3 s^3 \\
&= \big(x_0 (1-s)^3 + 3x_1 s (1-s)^2 + 3x_2 s^2 (1-s) + x_3 s^3, \\
&\qquad y_0 (1-s)^3 + 3y_1 s (1-s)^2 + 3y_2 s^2 (1-s) + y_3 s^3\big),
\end{aligned}$$

   si $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i)$. Además, sabemos que $\mathbf{y}(s) = (25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35)$. Podemos desarrollar la expresión anterior e igualar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \big(25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35\big) \\
&= \big(x_0 + (-3x_0 + 3x_1) s + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2) s^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3) s^3 , \\
&\qquad y_0 + (-3y_0 + 3y_1) s + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2) s^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) s^3\big) .
\end{aligned}$$

   Igualando coeficientes de las potencias de s, resulta un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 &= -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3, \\
25 &= 3x_0 - 6x_1 + 3x_2, \\
-5 &= -3x_0 + 3x_1, \\
-7 &= x_0, \\
0 &= -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\
100 &= 3y_0 - 6y_1 + 3y_2, \\
-120 &= -3y_0 + 3y_1, \\
35 &= y_0.
\end{aligned}$$

Lo resolvemos y tenemos las soluciones

$$x_0 = -7, \quad x_1 = -\frac{26}{3}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 13,$$
$$y_0 = 35, \quad y_1 = -5, \quad y_2 = -\frac{35}{3}, \quad y_3 = 15.$$

Entonces tenemos

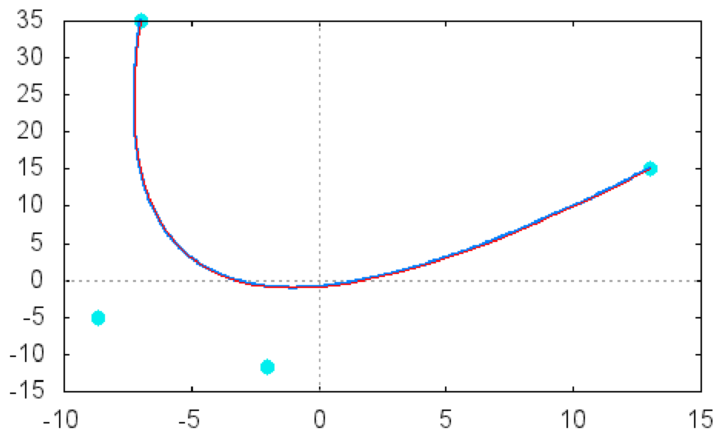
$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \mathbf{b}_0 B_0^3(s) + \mathbf{b}_1 B_1^3(s) + \mathbf{b}_2 B_2^3(s) + \mathbf{b}_3 B_3^3(s) \\
&= (-7, 35)\, B_0^3(s) + \left(-\frac{26}{3}, -5\right) B_1^3(s) + \left(-2, -\frac{35}{3}\right) B_2^3(s) \\
&\quad + (13, 15)\, B_3^3(s) \\
&= \big(x_0 (1-s)^3 + 3x_1 s (1-s)^2 + 3x_2 s^2 (1-s) + x_3 s^3\,, \\
&\quad y_0 (1-s)^3 + 3y_1 s (1-s)^2 + 3y_2 s^2 (1-s) + y_3 s^3\big) \\
&= \big(-7(1-s)^3 - 26s(1-s)^2 - 6s^2(1-s) + 13s^3\,, \\
&\quad 35(1-s)^3 - 15s(1-s)^2 - 35y_2 s^2 (1-s) + 15s^3\big)\,.
\end{aligned}$$

Si desarrollamos llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) &= \big(-7(1-s)^3 - 26s(1-s)^2 - 6s^2(1-s) + 13s^3\,, \\
&\quad 35(1-s)^3 - 15s(1-s)^2 - 35s^2(1-s) + 15s^3\big) \\
&= \big(25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35\big)\,.
\end{aligned}$$

Las componentes son polinomios de grado 2, como era de esperar. Pero escribir la curva como curva de Bézier no significa escribirla con componentes de grado 3, sino expresada a partir de polinomios de Bernstein de grado 3.

La gráfica es



7. Calcúlense las curvas de Bézier de grado 3 que en sus extremos $(1,2)$ y $(1,5)$ tienen velocidades $(6,-9)$ y $(-3,9)$, respectivamente.

   Ejercicio 68 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.

   Solución: Como es de grado 3 debe ser

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 \\
&\quad + \mathbf{b}_3 \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
\end{aligned}$$

   Por otro lado, sabemos (ejercicio 52) que

$$\mathbf{b}_0 = (1,2), \mathbf{b}_3 = (1,5).$$

   Además, sabemos que una curva de Bézier es tangente al polígono de control en los extremos del mismo (ejercicio 61) y que (ejercicio 60)

$$\mathbf{b}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t).$$

   donde $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$. En este caso, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}'(t) &= \sum_{i=0}^{2} 3\Delta \mathbf{b}_i B_i^2(t) = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) B_0^2(t) \\
&\quad + 3(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) B_1^2(t) + 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) B_2^2(t) \\
&= 3(1-t)^2 (\mathbf{b}_1 - (1,2)) + 6t(1-t)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) B_1^2(t) + 3t^2((1,5) - \mathbf{b}_2).
\end{aligned}$$

   Además,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}'(0) &= 3(\mathbf{b}_1 - (1,2)) \text{ es paralelo a } (6,-9), \\
\mathbf{b}'(1) &= 3((1,5) - \mathbf{b}_2) \text{ es paralelo a } (-3,9).
\end{aligned}$$

   Por eso, es

$$\begin{aligned}
(x_1 - 1, y_1 - 2) &= k(2,-3), \\
(1 - x_2, 5 - y_2) &= k'(-1,3).
\end{aligned}$$

Puede ser

$$\mathbf{b}_1 = (3, -1)\,, \quad \mathbf{b}_2 = (2, 2)\,.$$

Su gráfica es