

# Apuntes de Complementos Matemáticos para la Ingeniería Industrial

## Tema 2.2. Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador

Ejercicios



Este material ha sido elaborado por Esther Gil Cid y se difunde bajo la  
licencia Creative Commons Reconocimiento- CompartirIgual 3.0.

Puede leer las condiciones de la licencia en  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right. Below the text is a horizontal orange bar with a gradient effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## 1. Curvas de Bézier

1. Sea  $\mathbf{x}(t)$  la curva de Bézier con polígono de control formado por  $(-1, 2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(4, 0)$ . ¿Cuál es su ecuación?

**Solución:** Tenemos 5 puntos, por lo que el grado va a ser menor o igual que 4, en principio, aunque podría ser 3. Determinando la ecuación de la curva, vemos que es 4.

El polígono de control lo forman los puntos

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 2), \mathbf{b}_1 = (0, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1), \mathbf{b}_3 = (2, -1), \mathbf{b}_4 = (4, 0).$$

La curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (-1, 2)B_0^4(t) + (0, 1)B_1^4(t) + (1, 1)B_2^4(t) + (2, -1)B_3^4(t) + (4, 0)B_4^4(t) \\ &= (-1, 2) \binom{4}{0} t^0 (1-t)^4 + (0, 1) \binom{4}{1} t^1 (1-t)^3 \\ &\quad + (1, 1) \binom{4}{2} t^2 (1-t)^2 + (2, -1) \binom{4}{3} t^3 (1-t)^1 \\ &\quad + (4, 0) \binom{4}{4} t^4 (1-t)^0 \\ &= (-1, 2)(1-t)^4 + (0, 1)4t^1(1-t)^3 + (1, 1)6t^2(1-t)^2 \\ &\quad + (2, -1)4t^3(1-t)^1 + (4, 0)t^4 \\ &= (4t^4 - (1-t)^4 + 8t^3(1-t) + 6t^2(1-t)^2, \\ &\quad 2(1-t)^4 + 4t(1-t)^3 - 4t^3(1-t) + 6t^2(1-t)^2) \\ &= (t^4 + 4t - 1, 8t^4 - 12t^3 + 6t^2 - 4t + 2). \end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima se hace con

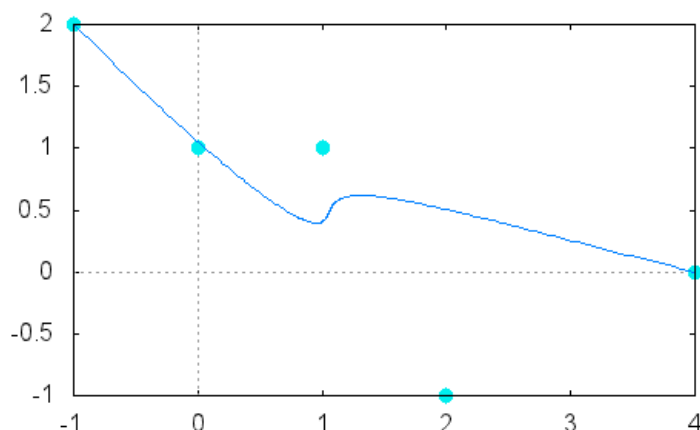
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

Si tomamos los puntos de control  $(-1, 2), (2, -1), (1, 1), (0, 1), (4, 0)$ , la gráfica resultante es



2. Calcúlese la curva de Bézier cuyo polígono de control es  $(1, 2, 0), (0, -1, 1), (3, 0, 1), (1, -1, 2), (0, 1, 5)$ .

**Ejercicio 62 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.**

**Solución:** El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (1, 2, 0), \mathbf{b}_1 = (0, -1, 1), \mathbf{b}_2 = (3, 0, 1), \mathbf{b}_3 = (1, -1, 2), \mathbf{b}_4 = (0, 1, 5).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

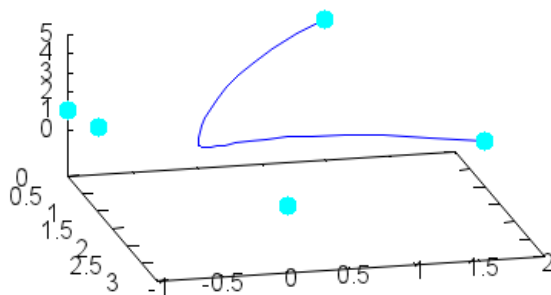
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

La curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= (1, 2, 0)B_0^4(t) + (0, -1, 1)B_1^4(t) + (3, 0, 1)B_2^4(t) \\
 &\quad + (1, -1, 2)B_3^4(t) + (0, 1, 5)B_4^4(t) \\
 &= (1, 2, 0) \binom{4}{0} t^0 (1-t)^4 + (0, -1, 1) \binom{4}{1} t^1 (1-t)^3 \\
 &\quad + (3, 0, 1) \binom{4}{2} t^2 (1-t)^2 + (1, -1, 2) \binom{4}{3} t^3 (1-t)^1 \\
 &\quad + (0, 1, 5) \binom{4}{4} t^4 (1-t)^0 \\
 &= (1, 2, 0) (1-t)^4 + (0, -1, 1) 4t^1 (1-t)^3 + (3, 0, 1) 6t^2 (1-t)^2 \\
 &\quad + (1, -1, 2) 4t^3 (1-t)^1 + (0, 1, 5) t^4 \\
 &= (1 - 4t + 24t^2 - 36t^3 + 15t^4, 2 - 12t + 24t^2 - 24t^3 + 11t^4, \\
 &\quad 4t - 6t^2 + 8t^3 - t^4).
 \end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



3. Sea  $C$  la curva dada por la ecuación  $\mathbf{x}(t) = (t + 2, t^3 + t)$  con  $t \in [0, 1]$ .  
Se pide escribirla como una curva de Bézier:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Solución:**

a) Buscamos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^2 \mathbf{b}_i B_i^2(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t) \\ &= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^2 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^1 \\ &\quad + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^0 \\ &= \mathbf{b}_0 (1-t)^2 + \mathbf{b}_1 2t(1-t) + \mathbf{b}_2 t^2. \end{aligned}$$

Si llamamos  $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0) (1-t)^2 + 2(x_1, y_1) t(1-t) + (x_2, y_2) t^2 \\ &= (x_0 - 2x_0t + x_0t^2 + 2tx_1 - 2t^2x_1 + t^2x_2, \\ &\quad y_0 - 2y_0t + y_0t^2 + 2ty_1 - 2t^2y_1 + t^2y_2) \\ &= (x_0 + (2x_1 - 2x_0)t + (x_0 - 2x_1 + x_2)t^2, \\ &\quad y_0 + (2y_1 - 2y_0)t + (y_0 - 2y_1 + y_2)t^2) \\ &= (t + 2, t^3 + t). \end{aligned}$$

Observamos ya que es imposible, porque no se puede conseguir que la segunda componente tenga grado 3.

b) El grado máximo de los polinomios que forman las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3, es decir, con 4 vértices.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Si llamamos  $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0)(1-t)^3 + (x_1, y_1)3t^1(1-t)^2 + (x_2, y_2)3t^2(1-t)^1 + (x_3, y_3)t^3 \\ &= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0t + 3x_0t^2 - x_0t^3 + 3tx_1 - 6t^2x_1 + 3t^3x_1 + 3t^2x_2 - 3t^3x_2 + t^3x_3, \\ y_0 - 3y_0t + 3y_0t^2 - y_0t^3 + 3ty_1 - 6t^2y_1 + 3t^3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^3y_2 + t^3y_3 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 \end{pmatrix}^t \\ &= (t+2, t^3+t). \end{aligned}$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = t^3 + t,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ -3y_0 + 3y_1 &= 1 \implies y_1 = \frac{1}{3}, \\ 3y_0 - 6y_1 + 3y_2 &= 0 \implies y_2 = \frac{2}{3}, \\ -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 &= 1 \implies y_3 = 2. \end{aligned}$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$\begin{aligned} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 \\ + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 = t + 2. \end{aligned}$$

Se deduce:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2, \\ -3x_0 + 3x_1 &= 1 \implies x_1 = \frac{7}{3}, \\ 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 &= 0 \implies x_2 = \frac{8}{3}, \\ -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \implies x_3 = 3. \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

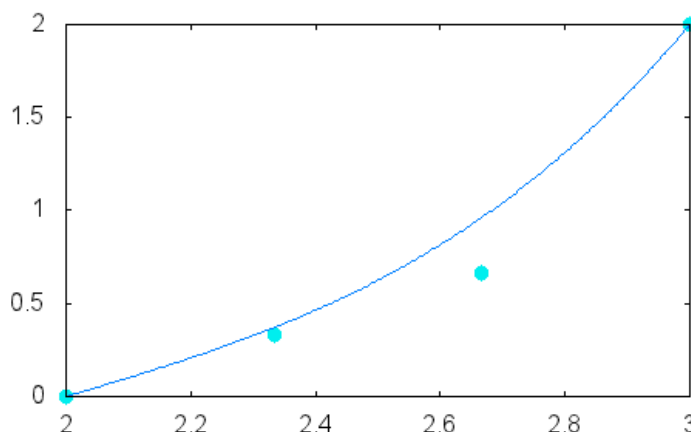
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

Podemos desarrollar y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (2, 0) B_0^3(t) + \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) B_1^3(t) + \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) B_2^3(t) + (3, 2) B_3^3(t) \\ &= (2, 0) (1-t)^3 + 3 \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) t(1-t)^2 \\ &\quad + 3 \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) t^2(1-t) + (3, 2) t^3 \\ &= (t+2, t+t^3). \end{aligned}$$

La gráfica de la curva con el polígono de control es:



- c) Repetimos el proceso con 5 vértices. Tenemos, para  $\mathbf{b}_i$  como habitualmente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^4 \mathbf{b}_i B_i^4(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^4(t) + \mathbf{b}_1 B_1^4(t) + \mathbf{b}_2 B_2^4(t) + \mathbf{b}_3 B_3^4(t) + \mathbf{b}_4 B_4^4(t) \\ &= \mathbf{b}_0 \binom{4}{0} t^0 (1-t)^4 + \mathbf{b}_1 \binom{4}{1} t^1 (1-t)^3 \\ &\quad + \mathbf{b}_2 \binom{4}{2} t^2 (1-t)^2 + \mathbf{b}_3 \binom{4}{3} t^3 (1-t)^1 + \mathbf{b}_4 \binom{4}{4} t^4 (1-t)^0 \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



componente:

$$\begin{aligned}x_0 &= 2, \\-4x_0 + 4x_1 &= 1, \\6x_2 + 12x_1 - 6x_0 &= 0, \\-4x_3 + 12x_2 - 12x_1 + 4x_0 &= 0, \\-x_4 + 4x_3 - 6x_2 + 4x_1 - x_0 &= 0.\end{aligned}$$

Su solución es

$$x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{9}{4}, \quad x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_3 = \frac{11}{4}, \quad x_4 = 3.$$

Para la segunda componente, resulta

$$\begin{aligned}y_0 &= 0, \\-4y_0 + 4y_1 &= 1, \\6y_2 + 12y_1 - 6y_0 &= 0, \\-4y_3 + 12y_2 - 12y_1 + 4y_0 &= 1, \\-y_4 + 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0 &= 0.\end{aligned}$$

La solución es:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 2.$$

Podemos desarrollar y tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}_0(1-t)^4 + \mathbf{b}_1 4t^1(1-t)^3 + \mathbf{b}_2 6t^2(1-t)^2 \\&\quad + \mathbf{b}_3 4t^3(1-t) + \mathbf{b}_4 t^4 \\&= (2, 0)(1-t)^4 + \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) 4t^1(1-t)^3 \\&\quad + \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) 6t^2(1-t)^2 + \left(\frac{11}{4}, 1\right) 4t^3(1-t) + (3, 2)t^4 \\&= (t+2, t+t^3).\end{aligned}$$

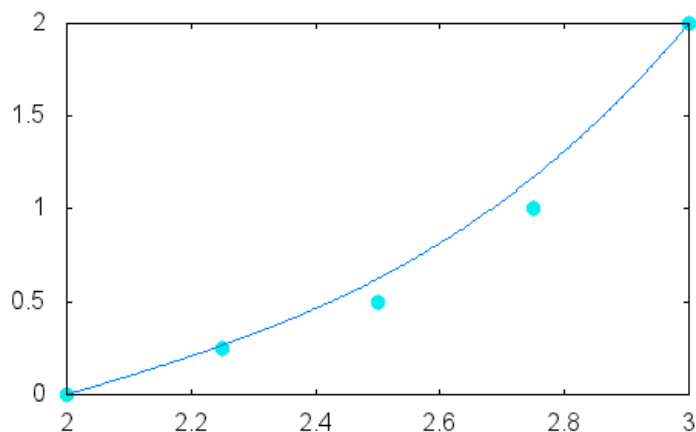
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**







d) Para 6 puntos, simplemente escribimos el resultado. Los puntos de control son:

$$(2, 0), \left(\frac{11}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{12}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{13}{5}, \frac{7}{10}\right), \left(\frac{14}{5}, \frac{6}{5}\right), (3, 2),$$

y la curva es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^5 \mathbf{b}_i B_i^5(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^5(t) + \mathbf{b}_1 B_1^5(t) + \mathbf{b}_2 B_2^5(t) + \mathbf{b}_3 B_3^5(t) + \mathbf{b}_4 B_4^5(t) + \mathbf{b}_5 B_5^5(t) \\ &= \mathbf{b}_0 (1-t)^5 + \mathbf{b}_1 5t^1 (1-t)^4 + \mathbf{b}_2 10t^2 (1-t)^3 \\ &\quad + \mathbf{b}_3 10t^3 (1-t)^2 + \mathbf{b}_4 5t^4 (1-t) + \mathbf{b}_5 t^5 \\ &= (2, 0) (1-t)^5 + \left(\frac{11}{5}, \frac{1}{5}\right) 5t^1 (1-t)^4 + \left(\frac{12}{5}, \frac{2}{5}\right) 10t^2 (1-t)^3 \\ &\quad + \left(\frac{13}{5}, \frac{7}{10}\right) 10t^3 (1-t)^2 + \left(\frac{14}{5}, \frac{6}{5}\right) 5t^4 (1-t) + (3, 2) t^5 \\ &= (t + 2, t + t^3). \end{aligned}$$

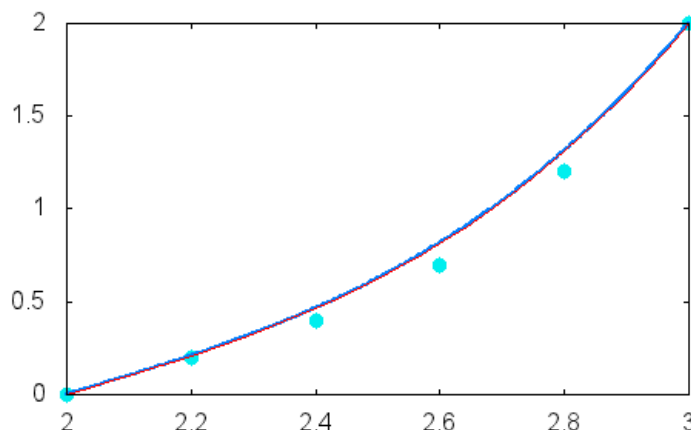
La gráfica es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





4. Escribese la curva  $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 7)$  con  $t \in [0, 1]$  como una curva de Bézier.

**Ejercicio 63 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés.**

**Solución:** Como el grado máximo de los polinomios que dan las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 \\ &\quad + \mathbf{b}_3 \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 \\ &= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3. \end{aligned}$$

Si llamamos  $\mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2)$ , entonces

$$\mathbf{x}(t) = (x_0, y_0) (1-t)^3 + (x_1, y_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3) t^3$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = 4t - 7,$$

lo que implica

$$y_0 = -7,$$

$$-3y_0 + 3y_1 = 4 \implies 3y_1 = 4 - 21 = -17 \implies y_1 = -\frac{17}{3},$$

$$3y_0 - 6y_1 + 3y_2 = 0 \implies 3y_2 = -3y_0 + 6y_1 = 21 - 6 \cdot \frac{17}{3} = -13$$

$$\implies y_2 = -\frac{13}{3},$$

$$\begin{aligned} -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 = 0 &\implies y_3 = y_0 - 3y_1 + 3y_2 = -7 + 3 \cdot \frac{17}{3} - 3 \cdot \frac{13}{3} \\ &= -3. \end{aligned}$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$\begin{aligned} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t \\ + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 = t^3 - 2t + 1. \end{aligned}$$

Se deduce:

$$x_0 = 1,$$

$$-3x_0 + 3x_1 = -2 \implies 3x_1 = -2 + 3 = 1 \implies x_1 = \frac{1}{3},$$

$$3x_0 - 6x_1 + 3x_2 = 0 \implies 3x_2 = -3x_0 + 6x_1 = -3 + 6 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$\implies x_2 = -\frac{1}{3},$$

$$-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \implies x_3 = 1 + x_0 - 3x_1 + 3x_2$$

$$\implies x_3 = 1 + 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$$

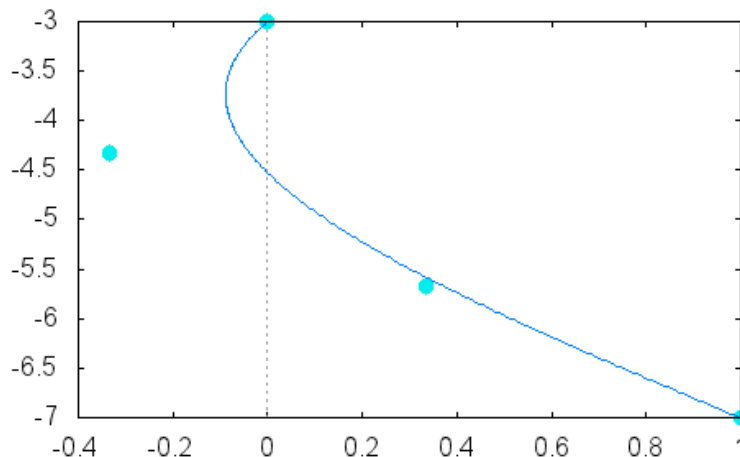
Entonces, se puede escribir:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

**Cartagena99**



5. Escribese la curva  $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 5t - 1, 4t^2 - 1)$  con  $t \in [-3, 2]$  como una curva de Bézier. (Indicación: compóngase la curva con una transformación afín que lleve el intervalo  $[0, 1]$  en  $[-3, 2]$ ).

**Ejercicio 64 del documento “Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones” de Antonio Valdés.**

**Solución:** Determinamos la transformación afín que lleva el intervalo  $[-3, 2]$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Debe cumplir:

$$f(-3) = -3a + b = 0,$$

$$f(2) = 2a + b = 1.$$

De aquí se deduce que

$$s = f(t) = \frac{1}{5}t + \frac{3}{5}$$

transforma el intervalo  $[-3, 2]$  en el intervalo  $[0, 1]$ . La transformación inversa es

$$f^{-1}(s) = 5s - 3 = t.$$

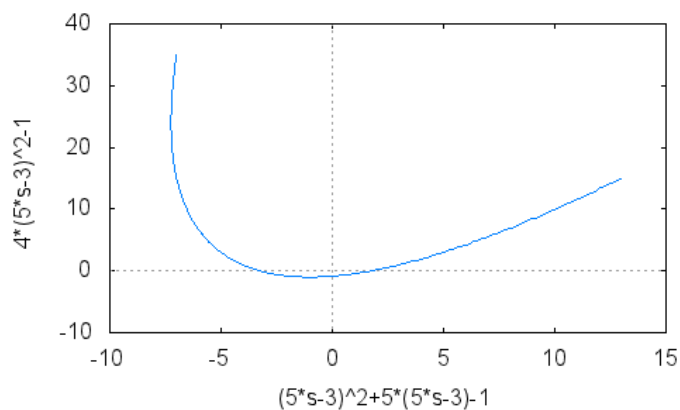
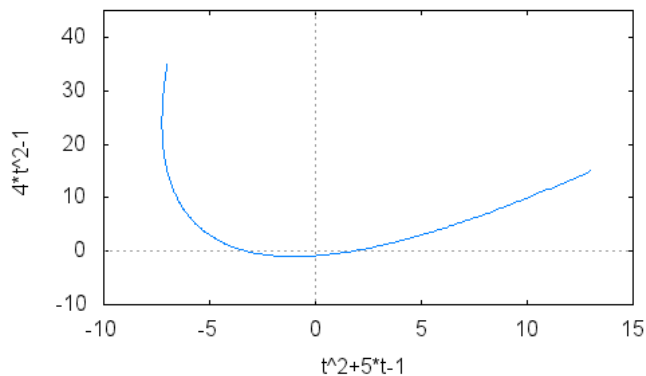
Entonces,  $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 5t - 1, 4t^2 - 1)$  con  $t \in [-3, 2]$  es lo mismo que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





Por otro lado  $y(s)$  es una curva definida sobre  $[0, 1]$  y podemos expresarla a partir de los polinomios de Bernstein:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \sum_{i=0}^2 \mathbf{b}_i B_i^2(s) \\
 &= \mathbf{b}_0 B_0^2(s) + \mathbf{b}_1 B_1^2(s) + \mathbf{b}_2 B_2^2(s) \\
 &= \mathbf{b}_0 \binom{2}{0} s^0 (1-s)^2 + \mathbf{b}_1 \binom{2}{1} s^1 (1-s)^1 + \mathbf{b}_2 \binom{2}{2} s^2 (1-s)^0 \\
 &= \mathbf{b}_0 (1-s)^2 + 2\mathbf{b}_1 s (1-s) + \mathbf{b}_2 s^2 \\
 &= (x_0 (1-s)^2 + 2x_1 s (1-s) + x_2 s^2, y_0 (1-s)^2 + 2y_1 s (1-s) + y_2 s^2),
 \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Igualando coeficientes, tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25 &= x_0 - 2x_1 + x_2, \\ -5 &= 2(-x_0 + x_1), \\ -7 &= x_0, \\ 100 &= y_0 - 2y_1 + y_2, \\ -120 &= 2(y_0 + y_1), \\ 35 &= y_0. \end{aligned}$$

De aquí deducimos:

$$x_0 = -7, \quad x_1 = -\frac{19}{2}, \quad x_2 = 13, \quad y_0 = 35, \quad y_1 = -25, \quad y_2 = 75.$$

Para resolverlo con Maxima, escribimos `linsolve([25=x0-2*x1+x2, -5=2*(-x0+x1), -7=x0, 10=y0-2*y1+y2, -120=2*(-y0+y1), 35=y0], [x0,x1,x2,y0,y1,y2]);`.

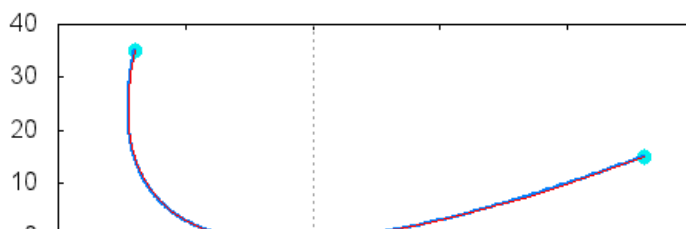
Tenemos ya la expresión de  $\mathbf{y}(s)$  a partir de los polinomios de Bernstein:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \mathbf{b}_0 B_0^2(s) + \mathbf{b}_1 B_1^2(s) + \mathbf{b}_2 B_2^2(s) \\ &= (-7, 35) B_0^2(s) + \left(-\frac{19}{2}, -25\right) B_1^2(s) + (13, 75) B_2^2(s). \end{aligned}$$

Ahora tenemos que convertir, de nuevo, el intervalo en  $[-3, 2]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(f(t)) &= (-7, 35) B_0^2\left(\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{19}{2}, -25\right) B_1^2\left(\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}\right) \\ &+ (13, 75) B_2^2\left(\frac{1}{5}t + \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Representamos el polígono de control con las dos curvas:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



6. Escribese la curva de Bézier del ejercicio anterior como una curva de Bézier de grado tres, es decir, con un polígono de control de cuatro vértices.

**Ejercicio 65 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.**

**Solución:** Tenemos que escribir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(s) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(s) \\
 &= \mathbf{b}_0 B_0^3(s) + \mathbf{b}_1 B_1^3(s) + \mathbf{b}_2 B_2^3(s) + \mathbf{b}_3 B_3^3(s) \\
 &= \mathbf{b}_0 \binom{3}{0} s^0 (1-s)^3 + \mathbf{b}_1 \binom{3}{1} s^1 (1-s)^2 \\
 &\quad + \mathbf{b}_2 \binom{3}{2} s^2 (1-s)^1 + \mathbf{b}_3 \binom{3}{3} s^3 (1-s)^0 \\
 &= \mathbf{b}_0 (1-s)^3 + 3\mathbf{b}_1 s (1-s)^2 + 3\mathbf{b}_2 s^2 (1-s) + \mathbf{b}_3 s^3 \\
 &= (x_0 (1-s)^3 + 3x_1 s (1-s)^2 + 3x_2 s^2 (1-s) + x_3 s^3, \\
 &\quad y_0 (1-s)^3 + 3y_1 s (1-s)^2 + 3y_2 s^2 (1-s) + y_3 s^3),
 \end{aligned}$$

si  $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i)$ . Además, sabemos que  $\mathbf{y}(s) = (25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35)$ . Podemos desarrollar la expresión anterior e igualar:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(s) &= (25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35) \\
 &= (x_0 + (-3x_0 + 3x_1)s + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)s^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)s^3, \\
 &\quad y_0 + (-3y_0 + 3y_1)s + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)s^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)s^3).
 \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de las potencias de  $s$ , resulta un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 0 &= -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3, \\
 25 &= 3x_0 - 6x_1 + 3x_2, \\
 -5 &= -3x_0 + 3x_1, \\
 -7 &= x_0.
 \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Lo resolvemos y tenemos las soluciones

$$x_0 = -7, \quad x_1 = -\frac{26}{3}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 13,$$

$$y_0 = 35, \quad y_1 = -5, \quad y_2 = -\frac{35}{3}, \quad y_3 = 15.$$

Entonces tenemos

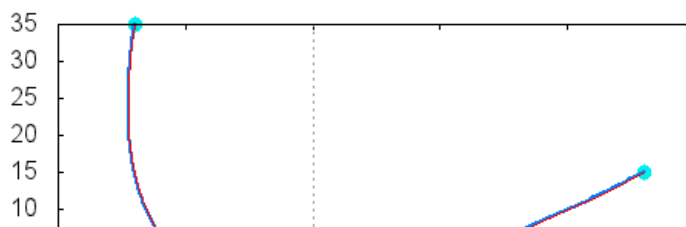
$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \mathbf{b}_0 B_0^3(s) + \mathbf{b}_1 B_1^3(s) + \mathbf{b}_2 B_2^3(s) + \mathbf{b}_3 B_3^3(s) \\ &= (-7, 35) B_0^3(s) + \left(-\frac{26}{3}, -5\right) B_1^3(s) + \left(-2, -\frac{35}{3}\right) B_2^3(s) \\ &\quad + (13, 15) B_3^3(s) \\ &= (x_0(1-s)^3 + 3x_1s(1-s)^2 + 3x_2s^2(1-s) + x_3s^3, \\ &\quad y_0(1-s)^3 + 3y_1s(1-s)^2 + 3y_2s^2(1-s) + y_3s^3) \\ &= (-7(1-s)^3 - 26s(1-s)^2 - 6s^2(1-s) + 13s^3, \\ &\quad 35(1-s)^3 - 15s(1-s)^2 - 35s^2(1-s) + 15s^3). \end{aligned}$$

Si desarrollamos llegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= (-7(1-s)^3 - 26s(1-s)^2 - 6s^2(1-s) + 13s^3, \\ &\quad 35(1-s)^3 - 15s(1-s)^2 - 35s^2(1-s) + 15s^3) \\ &= (25s^2 - 5s - 7, 100s^2 - 120s + 35). \end{aligned}$$

Las componentes son polinomios de grado 2, como era de esperar. Pero escribir la curva como curva de Bézier no significa escribirla con componentes de grado 3, sino expresada a partir de polinomios de Bernstein de grado 3.

La gráfica es



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





7. Calcúlense las curvas de Bézier de grado 3 que en sus extremos (1, 2) y (1, 5) tienen velocidades (6, -9) y (-3, 9), respectivamente.

**Ejercicio 68 del documento "Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones" de Antonio Valdés.**

**Solución:** Como es de grado 3 debe ser

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 \\ &\quad + \mathbf{b}_3 \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 \\ &= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos (ejercicio 52) que

$$\mathbf{b}_0 = (1, 2), \mathbf{b}_3 = (1, 5).$$

Además, sabemos que una curva de Bézier es tangente al polígono de control en los extremos del mismo (ejercicio 61) y que (ejercicio 60)

$$\mathbf{b}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t).$$

donde  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$ . En este caso, es

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(t) &= \sum_{i=0}^2 3 \Delta \mathbf{b}_i B_i^2(t) = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) B_0^2(t) \\ &\quad + 3(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) B_1^2(t) + 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) B_2^2(t) \\ &= 3(1-t)^2 (\mathbf{b}_1 - (1, 2)) + 6t(1-t) (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) B_1^2(t) + 3t^2 ((1, 5) - \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{b}'(0) = 3(\mathbf{b}_1 - (1, 2)) \text{ es paralelo a } (6, -9),$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

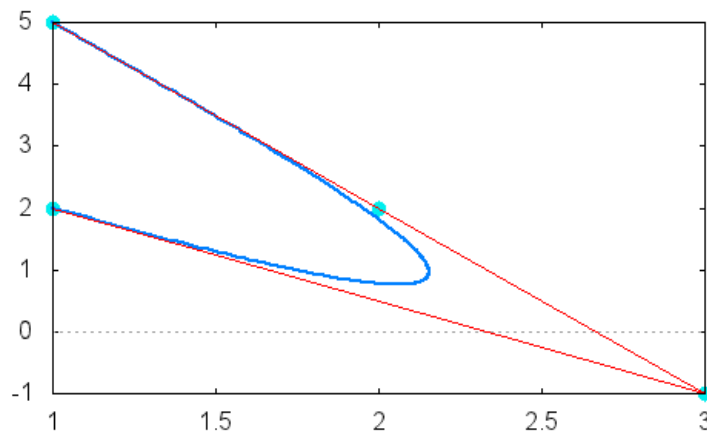
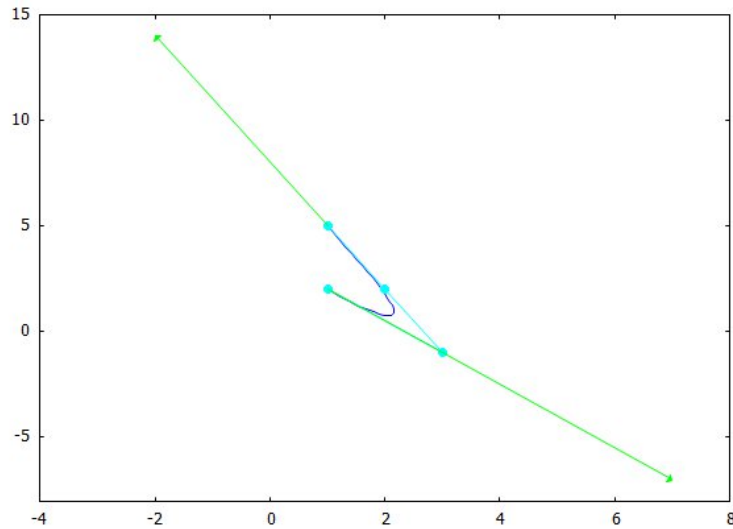
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**



Puede ser

$$\mathbf{b}_1 = (3, -1), \quad \mathbf{b}_2 = (2, 2).$$

Su gráfica es




**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**