Mecánica Racional y Analítica (GAE)

Tema 1: Cinemática de la partícula (Problemas)

1.1. Un punto se mueve en un plano de forma que el módulo de la velocidad es constante y vale a y la proyección de la velocidad sobre el vector de posición respecto al origen es b, también constante. Hallar:
1) Ecuación horaria del movimiento.
2) Ecuación de la trayectoria
3) Hodógrafa de velocidades
4). Aceleración del punto en función del tiempo
Nota: Para t=0 el punto se encuentra a una distancia R del origen.

1.2. Un punto se mueve por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con una velocidad constante $v=\omega R$, de forma que su trayectoria va cortando bajo un ángulo α=constante a las velocidades que pasan por OZ. Si inicialmente el punto se encuentra en (R, 0, 0), se pide:
1) Ecuación horaria del movimiento
2) Ecuación de la trayectoria
3). Aceleración del punto.
Ayuda: $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left[tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1.3. Un punto se mueve en un plano, siendo las ecuaciones del movimiento en coordenadas polares: $\left\{\begin{matrix}\rho = Re^{ct} \\ \theta = ct^2\end{matrix}\right\}$ siendo R y c constantes
Hallar:
1) La ecuación de la trayectoria
2) Vector velocidad
3) Ley horaria
4) Vector aceleración

1.4. Una partícula se mueve sobre un cilindro de eje OZ y radio a, de manera que el modulo de su velocidad aumenta con el tiempo según la ley $v= at$. Además el vector velocidad forma en cada instante un ángulo α, constante con las generatrices del cilindro.
Se pide:
1) Ecuación de la trayectoria
2) Velocidad
3) Ley horaria
4) Aceleración
NOTA: El móvil parte del punto (a, 0, 0).

1.5. Una partícula se mueve en $\Re^2$ con una velocidad dada en todo instante por: $\vec{v} = a\vec{u}_r + bt\vec{u}_\theta$, donde a y b son constantes dadas y t es el tiempo. Inicialmente la partícula se encuentra en el origen de coordenadas. Se pide:
1) Ecuación polar de la trayectoria
2) Aceleración para todo instante, en coordenadas polares y en coordenadas cartesianas
3) Aceleración tangencial en todo instante t
4) Radio de curvatura en el instante inicial t=0

1.6. Las componentes de la velocidad de una partícula vienen dadas por las expresiones: v_r=- $2b sen(2t)$ y $v_\theta = b\cos(2t)$, siendo b una constante y t el tiempo. Sabiendo que en t=0, r=b y □=0, se pide calcular:
1) la ecuación polar de la trayectoria
2) la aceleración de la partícula

1.7. El movimiento de un punto está dado en coordenadas polares por las ecuaciones $r=ae^{kt}$ y $\theta = kt$ siendo a y k constantes y t el tiempo. Hallar
1) La ecuación polar de la trayectoria
2) La velocidad
3) La aceleración
4) El radio de curvatura

1.8. Un punto se desplaza por una línea helicoidal. Las ecuaciones de movimiento de este punto son, en el sistema de coordenadas cilíndricas son: $r=a$, $\theta=kt$, $z=vt$, siendo a, k y v constantes y t el tiempo.
1) Calcular la aceleración en coordenadas cilíndricas
2) Calcular la aceleración en coordenadas cartesianas
3) Calcular el radio de curvatura
4) Calcular el espacio que recorre en una vuelta, desde $\theta=0$ hasta $\theta=2\pi$

1.9. Un móvil describe con velocidad constante v la curva de ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{matrix} x = \alpha\cos\alpha - sen\alpha \\ y = \alpha sen\alpha + \cos\alpha \end{matrix}\right\}$ En el instante inicial t=0, el valor de α=0. Calcular
1) La expresión de α en función del tiempo
2) Ecuaciones paramétricas de la hodógrafa de velocidades
3) Hodógrafa de aceleraciones
4) Componentes instrínsecas de la aceleración y radio de curvatura

1.10. Calcular la ecuación de la trayectoria y la ecuación general de la aceleración de una partícula que describe un movimiento dado por $\vec{v} = at\vec{u}_r + bt^2\vec{u}_\theta$. Se sabe que en el instante inicial la partícula se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular la aceleración tangencial.

1.12. El movimiento de un punto en el plano está definido en coordenadas polares por las siguientes ecuaciones: $\left\{\begin{matrix} r = t^2 \\ \theta = 5t \end{matrix}\right\}$. Calcular el radio de curvatura de la trayectoria que describe la partícula en el instante t =2 s

1.13. Una partícula de masa m describe una trayectoria, que en coordenadas cilíndricas viene dada por:
$\rho=R$
$\theta=\omega t$
$z= R\, ch(\omega t)$
siendo t el tiempo.
1) Calcular el vector velocidad
2) Calcular el vector aceleración
3) Calcular el espacio recorrido por la partícula desde el instante t=0 hasta un instante t
4) Calcular el módulo de la aceleración tangencial
Ayuda: $1 + sh^2(\omega t) = ch^2(\omega t)$

1.14. Una partícula se mueve en R^3 de tal forma que se cumple en todo momento que

$$v_r = b$$
$$v_\theta = bt \cdot sent$$
$$v_\varphi = bt$$

En $t = 0$ la partícula se encuentra en (0,0,0). Se pide:
1) Ecuaciones de la trayectoria en coordenadas esféricas:
2) aceleración tangencial en todo instante

1.15. Las componentes de la velocidad de una partícula vienen dadas por las expresiones $v_r = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $v_\theta = 2t \cdot \ln\left(t^2+1\right)$. Calcular la ecuación polar de la trayectoria

1.16. Se pide calcular la aceleración total de la partícula, el radio de curvatura en t=2π y la ecuación de la trayectoria para una partícula cuyo movimiento viene dado por las ecuaciones siguientes $\left(\begin{array}{l} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = \dfrac{b}{2\pi} \cdot \omega t \end{array}\right)$.

1.17. Una partícula parte del origen de coordenadas y se mueve en una curva plana de forma que las componentes de la velocidad vienen dadas por: $\left\{\begin{array}{l} v_r = 2 \\ v_\theta = 8t \end{array}\right\}$, calcular la ecuación de la trayectoria y la aceleración tangencial

1.18. Una partícula se mueve en una curva plana de forma que las componentes de la velocidad vienen dadas por: $\left\{\begin{array}{l} v_r = e^t \\ v_\theta = 2e^t \end{array}\right\}$, calcular la ecuación de la trayectoria y la aceleración tangencial

En t=0, r=1

1.19. La ecuación de movimiento de un punto de la llanta de una rueda que se mueve sin rozamiento sobre un riel rectilíneo tiene la forma:

$\left.\begin{array}{l} x = a\left(kt - \mathrm{sen}(kt)\right) \\ y = a\left(1 - \cos(kt)\right) \end{array}\right\}$ siendo a y k constantes positivas. Determinar:

1) Ecuación de la trayectoria
2) Vector velocidad y vector aceleración
3) Aceleración tangencial, normal y radio de curvatura

1.20. Las coordenadas paramétricas de un punto en coordenadas cartesianas vienen dadas por las ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x = A^{-ht}\cos\left(kt + \varepsilon\right) \\ y = A^{-ht}sen(kt + \varepsilon) \end{array}\right\}$ siendo A, h,k y ε constantes positivas. Determinar:

1) Ecuación polar de la trayectoria
2) Vector velocidad en coordenadas polares
3) Vector aceleración en coordenadas polares
4) Aceleración tangencial

1.21. Las coordenadas paramétricas de un punto en coordenadas cartesianas vienen dadas por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2a\cos^2\left(\dfrac{kt}{2}\right) \\ y = a\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{kt}{2}\right) \end{array}\right\}$$ siendo *A* y *h* constantes positivas. Determinar:

1) Ecuaciones de movimiento en coordenadas polares
2) Ecuación polar de la trayectoria
3) Vector velocidad en coordenadas polares y vector aceleración en coordenadas polares
4) Aceleración tangencial, normal y radio de curvatura

1.22. Las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas son:

$$\left.\begin{array}{l} r = R \\ \theta = kt \\ \varphi = kt \end{array}\right\}$$ siendo *k* constante positivas. Determinar:

1) Vector velocidad en coordenadas esféricas
2) Vector aceleración en coordenadas esféricas

1.23. Una partícula desliza sobre una curva con una velocidad de valor v=Kt (m/s) con K constante. ¿Cuál debe ser el valor del radio de curvatura para que la aceleración total de la partícula sea el doble de la tangencial a los dos segundos de haber comenzado el movimiento?

Autor: Dra Laura Abad Toribio

Asignatura: Mecánica Racional y Analítica

Titulación: Grado en Ingeniería Aeroespacial