CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Tema 1.

Cálculo Vectorial y Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas

P1.- Dado un vector $\vec{A} = -\hat{u}_x + 2\hat{u}_y - 2\hat{u}_z$ en coordenadas cartesianas, encuentre:

(a) su magnitud $A = \left|\vec{A}\right|$,

(b) la expresión del vector unitario $\hat{u}_{\vec{A}}$ en la dirección de $\vec{A}$, y

(c) el ángulo que forma $\vec{A}$ con el eje *z*.

Solución:

(a) $A = 3$

(b) $\hat{u}_{\vec{A}} = -\frac{1}{3}\hat{u}_x + \frac{2}{3}\hat{u}_y - \frac{2}{3}\hat{u}_z$

(c) $\theta_z = 131.8^{\text{o}}$

P2.- Dado $\vec{A} = 5\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + y\hat{u}_z$ y $\vec{B} = -3\hat{u}_x + 4\hat{u}_z$, calcule:

(a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$,

(b) $\vec{A} \times \vec{B}$, y

(c) $\theta_{\vec{A}\vec{B}}$.

Solución:

(a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = -11$

(b) $\vec{A} \times \vec{B} = -8\hat{u}_x - 23\hat{u}_y - 6\hat{u}_z$

(c) $\theta_{\vec{A}\vec{B}} = 113.7^{\text{o}}$

P3.- **(a)** Escriba la expresión del vector que va desde el punto $P_1(1,3,2)$ hasta el punto $P_2(3,-2,4)$ en coordenadas cartesianas.

(b) Determine la longitud de la línea $\overline{P_1P_2}$.

(c) Encuentre la distancia perpendicular desde el origen hasta esta línea ($\left|\overrightarrow{ON}\right|$).

Solución:

(a) $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\hat{u}_x - 5\hat{u}_y + 2\hat{u}_z$

(b) $\overline{P_1P_2} = \sqrt{33}$

(c) $\left|\overrightarrow{ON}\right| = 3.4$

P4.- Suponiendo que un campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas es $\vec{A} = 3\cos\phi \cdot \hat{u}_r - 2r \cdot \hat{u}_\phi + z \cdot \hat{u}_z$,

(a) ¿Cuál es el campo en el punto $P(4, 60^o, 5)$?

(b) Exprese el campo $\vec{A}_p$ en P en coordenadas cartesianas.

(c) Exprese la situación del punto P en coordenadas cartesianas.

Solución:

(a) $\vec{A}_p = \frac{3}{2}\hat{u}_r - 8\hat{u}_\phi + 5\hat{u}_z$

(b) $\vec{A}_p = 7.68 \cdot \hat{u}_x - 2.7 \cdot \hat{u}_y + 5 \cdot \hat{u}_z$

(c) $2, 2\sqrt{3}, 5$

P5.- Exprese el vector unitario $\hat{u}_z$ en coordenadas esféricas.

Solución: $\hat{u}_z = \cos\theta \cdot \hat{u}_r - \sin\theta \cdot \hat{u}_\theta$

P6.- Suponiendo que una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas con radios de 2 y 5 cm tiene una densidad de carga de:

$$\rho_v = -\frac{3 \cdot 10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi \quad \left(C/m^3\right)$$

Encuentre la carga total contenida en la región.

Solución: $Q = -1.8\pi \quad (\mu C)$

P7.- Obtenga la fórmula de la superficie de una esfera con radio R_0 integrando el área superficial diferencial en coordenadas esféricas.

Solución: $4\pi R_0^2$

P8.- La intensidad de campo electrostático $\vec{E}$ puede derivarse como el gradiente negativo de un potencial eléctrico escalar *V*; es decir, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V$. Determine $\vec{E}$ en el punto $(1,1,0)$ si

(a) $V = V_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$,

(b) $V = E_0 R \cos\theta$.

Solución:

(a) $\vec{E}(1,1,0) = \left(\hat{u}_x - \frac{\pi}{4} \hat{u}_y \right) \frac{V_0}{\sqrt{2}}$

(b) $\vec{E}(1,1,0) = -E_0 \cdot \hat{u}_z$

P9.- Calcule la divergencia del vector de posición de un punto arbitrario en el sistema de coordenadas:

(a) cartesianas y

(b) esféricas.

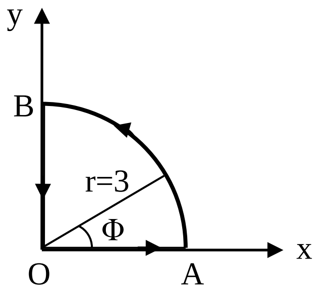
Solución:

(a) y **(b)** 3

P10.- Dado $\vec{F} = kR \cdot \hat{u}_r$, determine si el teorema de la divergencia es válido para la capa encerrada por las superficies esféricas en $R = R_1$ y $R = R_2$ $(R_2 > R_1)$, con centro en el origen.

Solución: Sí se verifica $\left(4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right)$

P11.- Dado un campo vectorial $\vec{F} = xy \cdot \hat{u}_x - 2x \cdot \hat{u}_y$, encuentre su circulación alrededor de la trayectoria *OABO* mostrada en la figura.



Solución: $\oint_{OABO} \vec{F} \cdot \vec{dl} = -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

P12.- Demuestre que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ si

(a) $\vec{A} = \frac{k}{r}\hat{u}_\phi$ en coordenadas cilíndricas, donde *k* es una constante, o

(b) $\vec{A} = f(R) \cdot \hat{u}_r$ en coordenadas esféricas, donde $f(R)$ es cualquier función de la distancia radial *R*.

P13.- Determine si los campos vectoriales siguientes son irrotacionales, solenoidales, ambos o ninguno.

(a) $\vec{A} = xy \cdot \hat{u}_x - y^2 \cdot \hat{u}_y + xz \cdot \hat{u}_z$

(b) $\vec{B} = r\left(\sin\phi \cdot \hat{u}_r + 2\cos\phi \cdot \hat{u}_\phi\right)$

(c) $\vec{C} = x \cdot \hat{u}_x - 2y \cdot \hat{u}_y + z \cdot \hat{u}_z$

(d) $\vec{D} = \frac{k}{R} \cdot \hat{u}_r$

Solución:

(a) Ninguno

(b) Solenoidal

(c) Ambos

(d) Irrotacional

P14.- Sea un campo vectorial $\vec{A} = 2xy \cdot \hat{u}_x + 3 \cdot \hat{u}_y + z^2 y \cdot \hat{u}_z$. Verificar el **Teorema de la Divergencia** para un cubo de lado unidad. El cubo está situado en el primer octante del sistema de coordenadas cartesianas con un vértice en el origen.

P15.- Sea el campo vectorial $\vec{F} = \hat{u}_y$. Hallar el **flujo** de $\vec{F}$ a través de un cilindro cerrado de longitud 2m y radio 2cm.

P16.- Calcular la **circulación** del campo vectorial $\vec{v} = x^2 \cdot \hat{u}_x + xy \cdot \hat{u}_y + xyz \cdot \hat{u}_z$ entre los puntos $O(0,0,0)$ y $Q(4,0,0)$,

(a) según la recta que un ambos puntos, y

(b) a lo largo del segmento $\overline{OB}$, con $B\left(2,2\sqrt{3},0\right)$, más el arco de circunferencia BQ centrado en O.

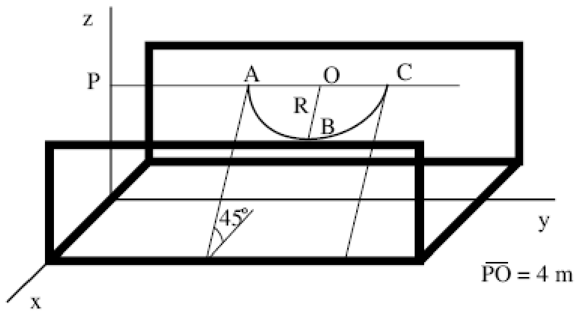
P17.- Dado el paralelepípedo delimitado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$, calcular el **flujo del rotacional** del campo vectorial $\vec{v} = x^2 y \cdot \hat{u}_x + xy \cdot \hat{u}_y + xy \cdot \hat{u}_z$ que atraviesa, en sentido saliente, la superficie formada por todas las caras de dicho cuerpo excepto la que yace en el plano $z = 0$.

Solución: Flujo=1

P18.- En un canal de riego, de sección rectangular, que tiene 1m de profundidad y 2m de ancho, se tiene que la velocidad de las partículas de agua viene dada por $\vec{v} = \sqrt{z}\left(1 - x^2\right) \cdot \hat{u}_y$ (m/s), donde las coordenadas cartesianas se miden en metros. Calcular:

(a) La **circulación del rotacional** de $\vec{v}$ a lo largo de la semicircunferencia ABC, de radio 0.5m, situada en un plano que forma un ángulo de 45º con el plano XY, y apoyada en un diámetro situado en la línea de máxima velocidad, tal y como se indica en la figura.

(b) El caudal (o flujo del campo de velocidades) en m^3/s de agua, que atraviesa una sección recta cualquiera del canal.



Solución: **(a)** Circulación del rotacional =0

(b) Flujo =8/9

P19.- Encontrar el gradiente de los siguientes campos escalares:

(a) $V = e^{-z} \sin 2x \cosh y$
(b) $U = \rho^2 z \cos 2\phi$

(c) $W = 10\, r \sin^2\theta \cos\phi$

P20.- Determinar la divergencia de los siguientes campos vectoriales

(a) $P = x^2 y z\, \boldsymbol{ax} + xz\, \boldsymbol{az}$
(b) $Q = \rho \sin\phi\, \boldsymbol{a\rho} + \rho^2 z\, \boldsymbol{a_\phi} + z\cos\phi\, \boldsymbol{az}$
(c) $T = 1/r^2 \cos\theta\, \boldsymbol{ar} + r\sin\theta\cos\phi\, \boldsymbol{a_\theta} + \cos\theta\, \mathbf{a_\phi}$

Solución: (a) $2xyz + x$ $\quad (b) 2sin\phi + cos\phi$ $\quad (c)\ 2cos\theta cos\phi$

P21.- Determinar el rotacional de los siguientes campos vectoriales

(a) $P = x^2 y z\, \boldsymbol{ax} + xz\, \boldsymbol{az}$
(b) $Q = \rho \sin\phi\, \boldsymbol{a\rho} + \rho^2 z\, \boldsymbol{a_\phi} + z\cos\phi\, \boldsymbol{az}$
(c) $T = 1/r^2 \cos\theta\, \boldsymbol{ar} + r\sin\theta\cos\phi\, \boldsymbol{a_\theta} + \cos\theta\, \mathbf{a_\phi}$

Solución: $(a)\ (x^2y - z)\vec{a}_y - x^2z\vec{a}_z$

$(b)\ -\frac{1}{\rho}(zsin\phi + \rho^3)\vec{a}_\rho + 3\rho z - cos\phi)\vec{a}_z$

$(c)\left(\frac{cos2\theta}{rsin\theta} + sin\phi\right)\vec{a}_r - \frac{cos\theta}{r}\vec{a}_\theta + \left(2cos\phi + \frac{1}{r^3}\right)sin\theta\vec{a}_\phi$

P22.- Verificar el teorema de la divergencia para los siguientes campos

(a) $\mathbf{A} = xy^2\,\boldsymbol{a_x} + y^3\,\boldsymbol{a_y} + y^2 z\,\boldsymbol{a_z}$

S es la superficie del cubo definido por

$0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$

(b) $\mathbf{A} = 2\rho z\,\boldsymbol{a_\rho} + 3z \sin\phi\,\boldsymbol{a_\phi} - 4\rho \cos\phi\,\boldsymbol{a_z}$

S es la superficie definida por

$0 < \rho < 2,\ 0 < \phi < 45°,\ 0 < z < 5$

(c) $\mathbf{A} = r^2\,\mathbf{a_r} + r \sin\theta \cos\phi\,\mathbf{a_\theta}$

S es la superficie de cuarto de esfera definida por

$0 < r < 3,\ 0 < \phi < \pi/2,\ 0 < \theta < \pi/2.$