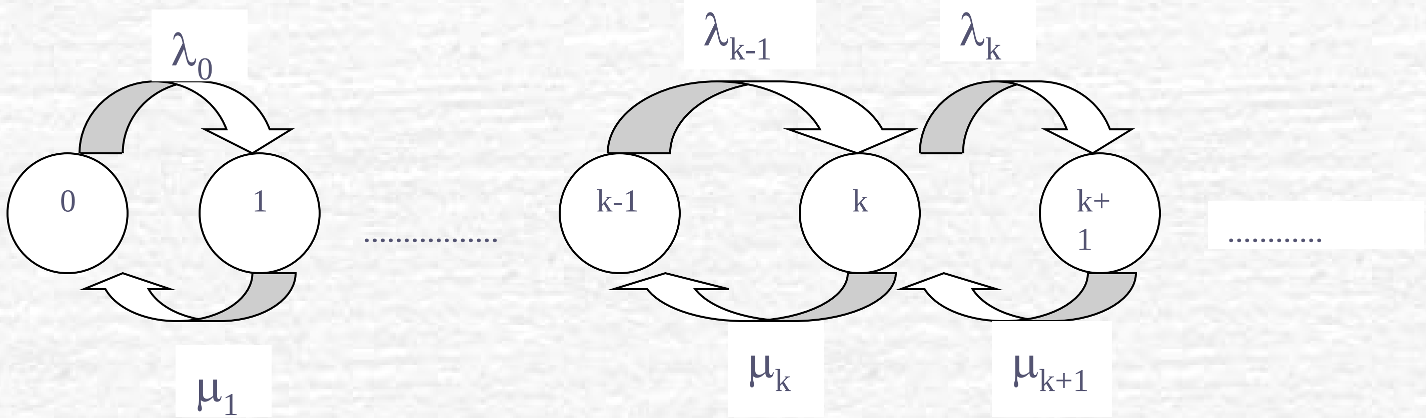
REDES ABIERTAS O DE JACKSON

- Los clientes pueden entrar y salir por cualquier nodo de la red.
- *Las llegadas a cualquier nodo siguen un proceso de Poisson de tasa γ.*
- *El tiempo de servicio en cualquier servidor es exponencial*. Puede haber uno o varios servidores en cada nodo.
- El tamaño de las colas debe ser infinito.
- Los clientes servidos en el nodo *i* pueden ir a cualquier nodo *j* con probabilidad r_{ij}.

Resultados relacionados

- Teorema de Burke. El proceso de salidas de clientes de un sistema *M/M/c con tasa de llegadas* λ *es un proceso de Poisson de tasa* λ
- Disney (1981): el número de llegadas a cada nodo de una red **no** sigue un proceso de Poisson. En una red en tandem sí lo sería.
- Usaremos el diagrama de flujo entre estados y que, en equilibrio, la tasa de entrada en un estado es igual a la tasa de salida del mismo.

- Flujos de entrada-salida para una cola



Tasa de entrada en estado k, k≥1 $= p_{k-1}\lambda_{k-1} + p_{k+1}\mu_{k+1}$

Tasa de salida del estado k, k≥1 $= p_k\left(\lambda_k + \mu_k\right)$

Igualando, obteníamos un sistema de ecuaciones cuya solución eran las probabilidades de equilibrio, p_k .

- Representamos el diagrama de flujo para el caso de dos nodos con un servidor por nodo con tasas de servicio respectivas μ_1 y μ_2.
- El estado del sistema de esta red es un par (k_1,k_2) donde k_1 representa el número de clientes en el nodo 1 y k_2, el número de clientes en el nodo 2. Necesitamos definir los estados "vecinos" al estado (k_1,k_2).
- Queremos obtener las probabilidades estacionarias de la red, si existen, p (k_1,k_2) usando que el flujo de entrada en el estado (k_1,k_2) será igual al de salida, en equilibrio.

- El flujo de entrada en el estado (k_1,k_2) es:

$$\gamma_1 p\left(k_1 - 1, k_2\right) + \gamma_2 p\left(k_1, k_2 - 1\right) + \mu_1 r_{10} p\left(k_1 + 1, k_2\right) +$$
$$+ \mu_2 r_{20} p\left(k_1, k_2 + 1\right) + \mu_1 r_{12} p\left(k_1 + 1, k_2 - 1\right) + \mu_2 r_{21} p\left(k_1 - 1, k_2 + 1\right)$$

- Este flujo se puede entender como:

Flujo total de entrada en el estado (k_1,k_2) =

= Flujo de llegadas desde el exterior + Flujo de salidas al exterior + Flujo debido a las transiciones.

- ¿Qué términos habría que eliminar si fueran colas en tandem?

- El flujo de salida del estado (k_1,k_2) es:

$$\gamma_1 p(k_1,k_2)+\gamma_2 p(k_1,k_2)+\mu_1 r_{10} p(k_1,k_2)+$$
$$\mu_2 r_{20} p(k_1,k_2)+\mu_1 r_{12} p(k_1,k_2)+\mu_2 r_{21} p(k_1,k_2)=$$
$$=\left(\gamma_1+\gamma_2+\mu_1(1-r_{11})+\mu_2(1-r_{22})\right)p(k_1,k_2)$$

- Este flujo se puede entender como:

Flujo total de salida en el estado (k_1,k_2) =

= Flujo de llegadas desde el exterior + Flujo de salidas al exterior + Flujo debido a las transiciones.

- El Flujo de salidas al exterior + Flujo debido a las transiciones = 1- Flujo debido a quedarse en el mismo nodo una vez que se recibe el servicio.

- Igualando el flujo de entrada en el estado (k_1,k_2) con el flujo de salida se llega a un sistema de ecuaciones cuya solución son las probabilidades de equilibrio, $p\,(k_1,k_2)$.
- Jackson (1963) demostró que las probabilidades estacionarias existen si

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1,\ i = 1,2$$

siendo λ_i la tasa de llegadas total al nodo i-ésimo, $i=1,2$.

- Jackson demostró que las probabilidades son:

$$p\left(k_1, k_2\right) = \left(1 - \rho_1\right) \rho_1^{k_1} \left(1 - \rho_2\right) \rho_2^{k_2}$$

- Comprobad en el caso de dos colas en tandem que se cumplen las ecuaciones.
- Este resultado indica que aunque los nodos **no** son colas M/M/1 (salvo que fuesen colas en tandem), **se comportan** como si lo fuesen y tuviesen un comportamiento independiente.
- Entonces,

$$L_R = L_1 + L_2 \ \text{ y } \ W_R = \frac{L_R}{\lambda_R}, \text{ donde } \quad \lambda_R = \gamma_1 + \gamma_2$$

es el número medio total de llegadas desde el exterior.

PROBABILIDADES DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE n NODOS, 1 SERVIDOR POR NODO

- El estado de la red es un vector $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ donde k_i representa el número de clientes en el nodo i-ésimo, $i = 1, \ldots, n$.

- Queremos estudiar la existencia y, en su caso, obtener las probabilidades estacionarias de la red, $p(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, y los parámetros de rendimiento habituales de la misma, L_R y W_R .

- Razonamos como en el caso de dos nodos: en equilibrio, el flujo de entrada a cualquier estado (k_1,k_2,..., k_n) será igual al de salida.
- Aunque el sistema de ecuaciones que resulta es más complejo y difícil de resolver, la solución del mismo es muy sencilla:

Jackson (1963) demostró que las probabilidades estacionarias existen si

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1, \; i = 1, \ldots, n$$

- Vamos a obtener λ_i = tasa de llegadas **total** al nodo i-ésimo, i=1,…,n.
- Las llegadas a un nodo pueden producirse desde el exterior de la red o mediante transición desde otros nodos. En equilibrio, la tasa total de entrada en un nodo debe de ser igual a la tasa de salida total del nodo.
- Entonces,

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{n} r_{ji}\lambda_j,\ i = 1,\ldots,n$$

- Las probabilidades son:

$$p(k_1,k_2,\ldots,k_n)=(1-\rho_1)\rho_1^{k_1}(1-\rho_2)\rho_2^{k_2}\cdots(1-\rho_n)\rho_n^{k_n}$$

- Este resultado indica que aunque los nodos **no** son colas M/M/1, **se comportan** como si lo fuesen y tuviesen un comportamiento independiente.
- Entonces,

$$L_R=\sum_{i=1}^{n} L_i \text{ y } W_R=\frac{L_R}{\lambda_R}, \text{ donde } \quad \lambda_R=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$$

es el número medio total de llegadas desde el exterior y L_i, i =1,…,n se obtiene para el nodo i-ésimo que se comporta como un sistema M/M/1.

- Este resultado se puede generalizar al caso de varios servidores por nodo, s_i.
- Ahora, la condición de estabilidad para cada nodo es:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{s_i \mu_i} < 1,\ i = 1,\ldots,n$$

- Cada nodo se comporta ahora como si fuese un nodo M/M/s_i independiente de los demás por lo que podemos obtener los resultados para cada nodo y proceder al cálculo de los resultados para la red.

- Puede generalizarse este resultado si hay límite de capacidad en un nodo “terminal”:
  - todos los clientes que son servidos en ese nodo abandonan la red (no influyen en las llegadas a los otros nodos)
  - los clientes que no caben abandonan la red (si no, producirían el bloqueo de la misma)
  - Este nodo se comportaría como un sistema M/M/Si/K independiente de los demás.
- Si suponemos que es el nodo n-ésimo:

$$p\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)=p_{M/M/s_1}\left(k_1\right)\cdot p_{M/M/s_2}\left(k_2\right)\ldots\cdot p_{M/M/s_n/K}\left(k_n\right)$$