Tema 3: ~~Sucesiones~~ Series infinitas

Def 1 Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión real, definimos S (serie infinita generada por los x_n's) como $S = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} x_j}_{:= S_N} = \lim_{N\to\infty} S_N$

(y S_N, $N=1,2,\ldots$ se denominan sumas parciales de la serie S); informalmente, $S = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$

Obs 1: Dada cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ real, la sucesión de sumas parciales S_N está bien definida, sea convergente o no.

Obs 2: A veces se consideran sucesiones $(x_n)_{n=k}^{\infty}$ y series $S = \sum_{j=k}^{\infty} x_k$

Def 2: $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_j$ se denomina:

- Convergente, si $\exists \lim_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R}$; divergente en otro caso.
- Absolutamente convergente si $\exists \lim_{N\to\infty} S'_N \in \mathbb{R}$, siendo $S' = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ y $S'_N = \sum_{j=1}^{N} |x_j|$

Ejemplos:

i) Sea $|r|<1$ y $S = \sum_{j=1}^{\infty} r^j$. Entonces

S es convergente.

Dem: Si $S_N = \sum_{j=1}^{N} r^j \Rightarrow rS_N = \sum_{j=1}^{N} r^{j+1} = \sum_{j=2}^{N+1} r^j$

$= S_N + r^{N+1} - r \Rightarrow (r-1)S_N = r^{N+1} - r$

$\Rightarrow S_N = \dfrac{r - r^{N+1}}{1-r} \longmapsto \dfrac{r}{1-r}$, por ser $|r|<1$.

ii) Si $S = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^n$, S es divergente.

Dem: $S_N = \sum_{j=1}^{N} (-1)^n = \dfrac{-1-(-1)^{N+1}}{1-(-1)} = \dfrac{-1}{2}(1+(-1)^N)$

$= \begin{cases} -1, & N \text{ par} \\ 0, & N \text{ impar} \end{cases}$, y S_N es divergente.

Prop 1: Si $S = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ es convergente $\Rightarrow x_n \mapsto 0$.

Dem: Para $n = 2, 3, \ldots$, $x_n = S_n - S_{n-1}$, y si

S es convergente, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \in \mathbb{R}$,

luego $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$

Obs: El recíproco de la Prop 1. es falso, como veremos más adelante.

Def 2: Sea $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. s se dice sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ $\exists N$ t.q. $m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \wedge (m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon))$

Prop 2: $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de números reales sii es de Cauchy

Dem:

$\Rightarrow$): Si s es convergente, y $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists N$ t.q. $n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon/2$.

Tomando $m, n \geq N$, tenemos

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x_n - x)|$$

$$\leq \underbrace{|x_m - x|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|x_n - x|}_{< \varepsilon/2} \quad (\text{pues } m, n \geq N)$$

$$< 2 \cdot (\varepsilon/2) = \varepsilon$$

y por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$): Si $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ a de Cauchy,

~~consider~~ observemos primero que s es acotada:

Tomando $\varepsilon = 1$ $\exists N$ t.q. $m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| \leq 1$

En particular, si $n \geq N$, $|x_n - x_N| \leq 1$

$$\Rightarrow |x_n| = |(x_n - x_N) + x_N|$$
$$\leq \underbrace{|x_n - x_N|}_{\leq 1} + |x_N|$$
$$\leq 1 + |x_N| \quad \forall n \geq N.$$

Como $|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\} = M$ si $1 \leq n \leq N$,

se sigue que $|x_n| \leq M + 1 \quad \forall n \geq 1$.

Consideramos ahora, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{cases} z_n = \sup\{x_m : m \geq n\} \\ y_n = \inf\{x_m : m \geq n\} \end{cases}$$ (bien definidos, por ser $\{x_n : n \geq 1\}$ acotado)

Observamos $x_n \in \{x_m : m \geq n\}$, de donde (1).

$$y_n \leq x_n \leq z_n \quad \forall n.$$

Además $\{x_m : m \geq n\} \supset \{x_m : m \geq n+1\}$ implica que

$$\begin{cases} z_{n+1} \leq z_n & ; (z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es decreciente (y acotada)} \\ y_{n+1} \geq y_n & ; (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es creciente (" ")} \end{cases}$$

Por tanto, $$\begin{cases} \exists x' = \lim_{n \to \infty} z_n \\ \exists x'' = \lim_{n \to \infty} y_n \end{cases}$$ y (1) $\Rightarrow x' \leq x''$

(usando lo visto en el Tema 2 sobre sucesiones monótonas y acotadas). Si somos capaces de demostrar que $x' = x''$, usando el "Lema del Sandwich" (o Principio del Encaje), se deduciría que $\exists\, x = \lim_{n\to\infty} x_n$ con $x = x' = x''$:

Dado $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy implica que si $n \geq N$, $|x_n - x_N| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x_n - x_N < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} + x_N < x_n < x_N + \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_n = \sup\{x_m : m \geq n\} \leq x_N + \varepsilon/2 & \text{si } n \geq N \\ y_n = \inf\{x_m : m \geq n\} \geq x_N - \varepsilon/2 & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_n - y_n \leq (x_N + \varepsilon/2) - (x_N - \varepsilon/2) = \varepsilon \quad \text{si } n \geq N$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} (z_n - y_n) = 0$$

$$\Rightarrow x' = x'' \qquad \blacksquare$$

La Prop.? es el ingrediente esencial de la siguiente Proposición fundamental:

Prop 3: Sea $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' x_j$ serie absolutamente convergente. Entonces S es convergente.

Observación: Si $x_j \geq 0 \ \forall j$, puesto que para $n = 1, 2, \ldots$, $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' x_j = S_n' = \sum_{j=1}^{n}{}' |x_j|$, para una tal sucesión, convergencia y convergencia absoluta son conceptos equivalentes

Dem (Prop 3) Veamos que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, siendo $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' x_j$:

Si damos índices $1 \leq m \leq n$, tenemos

- Si $m = n$, $S_n - S_m = 0$.
- Si $m < n$, $S_n - S_m = \sum_{j=m+1}^{n}{}' x_j$, luego

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{j=m+1}^{n}{}' x_j\right| \leq \sum_{j=m+1}^{n}{}' |x_j|.$$

Por tanto, dados índices $m, n \geq 1$ cualesquiera,

$$|S_n - S_m| \leq \sum_{j=\min\{n,m\}+1}^{\max\{n,m\}}{}' |x_j| \qquad (1).$$

Siendo $\sum_{j=1}^{\infty}{}' x_j$ absolutamente convergente,

$(S_n')_{n=1}^{\infty}$ es convergente, con $S_n' = \sum_{j=1}^{n}{}' |x_j|$.

Observamos que $(S_n')_{n=1}^{\infty}$ es creciente,

pues $S_{n+1}' - S_n' = |x_{n+1}| \geq 0 \quad \forall n$. y si

es además convergente, $0 \leq S_n' \leq S' \quad \forall n$,

siendo $S' = \lim_{n\to\infty} S_n'$ (S' es "$\sum_{j=1}^{\infty}{}' |x_j|$").

Dado $\varepsilon > 0$, como $S_n' \longmapsto S'$, $\exists N$ t.q.

$n \geq N \Rightarrow |S' - S_n'| < \varepsilon$

$\Rightarrow S' - \varepsilon < S_n' \leq S' \quad \forall n \geq N$ (2).

(por ser $S_n' \leq S' \; \forall n$).

Tomando en (2) $N \leq n \leq m$,

$S' - \varepsilon < S_n' \leq S_m' \leq S'$ (3)

$\Rightarrow 0 \leq S_m' - S_n' < \varepsilon \quad (N \leq n \leq m)$ (4).

Pero (1) $\Rightarrow |S_m - S_n| \leq \sum_{j=n+1}^{m}{}' |x_j| = S_m' - S_n' < \varepsilon$,

si $N \leq n \leq m$, y por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario,

7)

se deduce que $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$, o lo que es

lo mismo, $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' x_j$ es convergente $\boxed{\text{M}}$

Prop 4 (Criterio de Comparación).

Sean $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' x_j$, $S' = \sum_{j=1}^{\infty}{}' y_j$ dos

series con:

i) $|x_j| \leq |y_j| \quad \forall j$.

ii) S' es absolutamente convergente.

Entonces S es también absolutamente convergente.

Dem: Si $n = 1, 2, \ldots$, $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' x_j$ cumple

$$|S_n| \leq \sum_{j=1}^{n}{}' \underbrace{|x_j|}_{\leq |y_j|} \leq \sum_{j=1}^{n}{}' |y_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty}{}' |y_j| < \infty$$

(por ser S' absolutamente convergente).

Pero entonces, $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}{}' |x_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty}{}' |y_j| < \infty$,

de donde S es absolutamente convergente.

Obs 1: Si en i) de la Prop. 4 cambiamos la hipótesis por: $|x_j| \leq A|y_j|$ $\forall j$ (con $0 \leq A < \infty$ cierta constante) obtenemos la misma conclusión:

Obs 2: Si en i) de la Prop. 4 suponemos $|x_j| \leq |y_j|$ $\forall j \geq N$ (y N cierto índice fijo), obtenemos también la misma conclusión.

La Prop. 4 admite el siguiente recíproco:

Prop. 5 Si S y S' son como en la Prop. 4 ($|x_j| \leq |y_j|$ $\forall j$), pero ii) lo cambiamos por ii)' S no es absolutamente convergente, entonces S' tampoco lo es.

Dem: Si para $n = 1, 2, \ldots$ $S_n' = \sum_{j=1}^{n}{}' |y_j|$, tenemos $S_n' \geq \sum_{j=1}^{n}{}' |x_j| \longmapsto \infty$, por ser S no absolutamente convergente, luego $S_n' \mapsto \infty$, y entonces S' no es absolutamente convergente

—. Series de términos positivos. —

Def 3: Decimos que $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' x_j$ es una serie de términos positivos si $x_j \geq 0 \ \forall j$.

Obs: Para estas sucesiones, convergencia y convergencia absoluta coinciden.

Prop 5: Sean $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' x_j$, $S' = \sum_{j=1}^{\infty}{}' y_j$ dos series de términos estrictamente positivos ($x_j, y_j > 0 \ \forall j$) y tales que $\exists \lim_{j \to \infty} \frac{x_j}{y_j} = \ell \in (0, \infty)$.

Entonces S y S' convergen o divergen simultáneamente.

Dem: Puesto que $\lim_{j \to \infty} \frac{x_j}{y_j} = \ell > 0$, $\exists N$ t.q. $j \geq N \Rightarrow \frac{x_j}{y_j} \geq \frac{\ell}{2} > 0$ (pues $\left| \ell - \frac{x_j}{y_j} \right| < \frac{\ell}{2}$ para j suficientemente grande, luego $\frac{x_j}{y_j} = \ell + \left(\frac{x_j}{y_j} - \ell \right) \geq \ell - \underbrace{\left| \frac{x_j}{y_j} - \ell \right|}_{< \ell/2} > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$),

luego $y_j \leq \frac{2}{\ell} x_j$ ($j \geq N$).

De modo similar, para j suf. grande,

$$\frac{x_j}{y_j} \leq \frac{3}{2}\ell \quad (j \geq N'') \Rightarrow x_j \leq \left(\frac{3}{2}\ell\right) y_j \quad (j \geq N'').$$

Usando las Obs. (i,ii) tras la Prop. 3, se sigue que si $S' < \infty \Leftrightarrow S < \infty$ (ó ambas son ∞), esto es, convergen o diverga simultáneamente. $\boxed{}$

Def 4: Si $x_j \geq 0$ $\forall j = 1, 2 \ldots$ y $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' (-1)^{j-1} x_j$ ($S = x_1 - x_2 + x_3 \ldots$), decimos que S es una serie alternada (cada término $(-1)^{j-1} x_j$ va alternando signo con el siguiente).

Prop 6: Sea $S = \sum_{j=1}^{\infty}{}' (-1)^{j-1} x_j$ ~~...~~ sucesión alternada con $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ sucesión decreciente. Entonces S es convergente, si además $x_j \longmapsto 0$

Ejemplo: Sea $\alpha > 0$ un exponente y $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$

pues $0 < n^{-\alpha}$ $\forall n = 1, 2 \ldots$ y $0 < \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \Big(\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{>1}\Big)^{-\alpha} < 1^{-\alpha} = 1$

$\Rightarrow (n+1)^{-\alpha} < n^{-\alpha}$

Dem: Consideremos $S_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j$, $n = 1, 2, \dots$

Entonces, usando que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, tenemos:

$$S_1 = x_1 \geq x_1 - x_2 = S_2 \geq 0 \quad (\text{pues } x_1 \geq x_2).$$

$$S_3 = \underbrace{x_1 - \overbrace{(x_2 - x_3)}^{\geq 0}}_{\leq S_1} \geq \underbrace{(x_1 - x_2)}_{:= S_2 \geq 0} + \underbrace{(x_3 - x_4)}_{\geq 0} = S_4 \geq 0; \; S_4 \geq S_2$$

esto es, $S_1 \geq S_3 \geq S_4 \geq 0$).

Para $k = 1, 2, \dots$, obtenemos, siguiendo este proceso:

$$S_1 \geq S_3 \geq \dots \geq S_{2k-1} \geq S_{2k} \geq S_{2k-2} \geq \dots \geq S_{2k} \geq 0. \quad (1)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

De (1) se deduce:

- Cualquier suma parcial S_n con n impar es mayor o igual que cualquier otra suma parcial S_m con m impar. En particular, el conjunto de todas las sumas parciales impares está acotado inferiormente (por ejemplo, por 0), mientras que el conjunto de todas las sumas parciales pares lo está superiormente (por $S_1 = x_1$)

121

→ Las sucesiones $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ y $(S_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$, son crecientes y decrecientes, respectivamente.

· Por tanto, existen $\left| \begin{array}{l} x' = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \\ x'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} \end{array} \right.$

con $0 \leq x' \leq x''$ (2).

Además de (1) también se deduce

$0 \leq S_{2n+1} - S_{2n} = -(-1)^{2n-1} x_{2n} = x_{2n} \longmapsto 0$ (3).

$\Rightarrow 0 \leq x'' - x' \leq \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0 \Rightarrow x' = x'' = x$ (4).

(lema del Sandwich)

Veamos por último que $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = x$:

Puesto que $S_{2n}, S_{2n-1} \longmapsto x$, dado $\varepsilon > 0$

$\exists M$ t.q. $m \geq M \Rightarrow |S_{2m} - x|, |S_{2m-1} - x| < \varepsilon$. (5).

Pero si $n \geq M$, n será par o impar, y en cualquiera de los casos, $|S_n - x| < \varepsilon$ (por (5)) $\boxtimes$

Obs: La convergencia de $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n$ que asegura la Prop. 6 en general no es absoluta.

Prop 7 (Criterio de Condensación)

Sea $S = {\sum_{n=1}^{\infty}}' x_n$ con $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de términos ≥ 0 y decreciente. Entonces S converge sii $S' = {\sum_{n=0}^{\infty}}' 2^n x_{2^n}$ converge.

Dem: Puesto que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0 \ \forall n$,

$$S = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + \dots + x_7) + \dots + (\overbrace{x_{2^n} + \dots + x_{2^{n+1}-1}}^{2^n \text{ sumandos}}) + \dots$$

$$\begin{cases} \geq 2x_3 \\ \leq 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \geq 2^2 x_7 \\ \leq 2^2 x_4 \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \geq 2^n x_{2^{n+1}-1} \\ \leq 2^n x_{2^n} \end{cases}$$

(pues si $2^n \leq j \leq 2^{n+1}-1$, $x_{2^n} \geq x_j \geq x_{2^{n+1}-1}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} S \geq x_1 + 2x_3 + \dots + 2^n x_{2^{n+1}-1} + \dots = {\sum_{n=0}^{\infty}}' 2^n x_{2^{n+1}-1} & (1) \\ S \leq x_1 + 2x_2 + \dots + 2^n x_{2^n} + \dots = {\sum_{n=0}^{\infty}}' 2^n x_{2^n} & (2). \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow S \leq S'$, mientras que

$$(1) \Rightarrow S \geq {\sum_{n=0}^{\infty}}' 2^n \underbrace{x_{2^{n+1}-1}}_{\geq x_{2^{n+1}}} = {\sum_{n=0}^{\infty}}' 2^n x_{2^{n+1}}$$

$$= x_1 + {\sum_{n=1}^{\infty}}' 2^n x_{2^{n+1}} \underset{n+1=m}{=} \underbrace{x_1}_{\geq \frac{1}{2} x_1} + {\sum_{m=1}^{\infty}}' 2^{m-1} x_{2^m}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}{}' 2^m x_{2^m} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}{}' 2^m x_{2^m} = \frac{1}{2}S'$$

Por tanto, $0 \leq \frac{1}{2}S' \leq S \leq S'$ (3),

luego S y S' son finitas o infinitas simultáneamente $\boxed{\text{B}}$

Ejemplo:

La serie $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n}$ diverge (se le conoce como serie armónica)

Sol: Si $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n > 0$ $\forall n$ y a_n es decreciente,

luego aplicando el Criterio de Condensación, la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=0}^{\infty}{}' 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}{}' 1$,

que es obviamente divergente.

Obs: Según la Prop. 6 (sumas alternadas),

$S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ $\left(= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right)$ es convergente,

luego éste es un ejemplo de serie que converge,

pero no absolutamente.

—. Ejemplos de series que se pueden sumar explícitamente (ó decidir su comportamiento)

i) Sea $r \in \mathbb{R}$ fijo y $n = 1, 2, \ldots$, entonces, si $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' r^j$ tenemos | S_n es la suma de una "serie geométrica".

$$rS_n = \sum_{j=1}^{n}{}' r^{j+1} = \sum_{j=2}^{n+1}{}' r^j = r^{n+1} + S_n - r$$

$$\Rightarrow (r-1)S_n = r^{n+1} - r$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r} \quad (\text{si } r \neq 1).$$

y como para $|r| < 1$, $r^{n+1} \to 0$, obtenemos:

$$S_n \longmapsto \frac{r}{1-r} := \sum_{n=1}^{\infty}{}' r^n$$

En cambio, si $|r| > 1$, r^{n+1} diverge, luego

$S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' r^n$ es divergente.

—. Para $r = 1$, $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' 1 = n$, que también diverge.

—. Para $r = -1$, $S_n = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$,

también divergente

ii) (Series telescópicas).

Si $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' x_n$ y $x_n = y_{n+1} - y_n$ (para una cierta sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ apropiada), entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}'(y_{n+1} - y_n)$ se denomina <u>suma telescópica</u>.

<u>Prop 8</u>: Si $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}'(y_{n+1} - y_n)$ es una suma telescópica y además $y_n \mapsto 0$, entonces S es convergente, y de hecho, $S = -y_1$

<u>Dem</u>: Si $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}'(y_{j+1} - y_j)$ son las sumas parciales de esa serie, $S_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j+1=k}}^{n}{}' y_{j+1} - \left(\sum_{j=1}^{n}{}' y_j\right) =$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1}{}' y_k}_{= y_{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}{}' y_k\right) - y_1} - \left(\sum_{j=1}^{n}{}' y_j\right) = y_{n+1} - y_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} -y_1$$

$\boxtimes$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n(n+1)}$:

<u>Sol</u>: Si $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $x_n = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ (comprobarlo), luego $S = -(-1) = 1$

(iii) Serie $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbb{R}$ exponente fijo)

Prop 9: S converge sii $p > 1$.

Dem: Usamos el Criterio de Condensación:

. Si $x_n = n^{-p}$ con $p \leq 0$, $x_n = n^{|p|} \geq 1$ $\forall n$, luego x_n no tiende a 0 y S diverge.

. Si $p > 0$, $x_n = n^{-p}$, $x_n > 0$ $\forall n$ y

$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1}{}^{-p} < 1^{-p} \leq 1 \Rightarrow 0 < x_{n+1} < x_n$,

luego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente; claramente, $x_n \to 0$.

Podemos aplicar entonces el Criterio de Condensación:

Si $y_n = 2^n x_{2^n}$, $y_n = 2^n (2^n)^{-p} = (2^{-p+1})^n$.

Pero $0 < 2^{-p+1} < 1$, ~~por~~ sii $-p+1 < 0$ $\Leftrightarrow 1 < p$ (y ya sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}{}' r^n$ es convergente para ~~[illegible]~~ $r \geq 0$ sii además $r < 1$)

Para terminar, un último criterio de convergencia que puede ser útil (Criterio del Cociente)

Prop 10: Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' x_n$ con $x_n > 0$ $\forall n$ y además $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r \in [0,\infty)$. Entonces:

i) Si $0 \le r < 1$, S es convergente.

ii) Si $r > 1$, S es divergente.

Dem: i) Si $0 \le r < 1$, $\exists N$ t.q. $n \ge N \Rightarrow 0 \le \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \rho < 1$, siendo $\rho = \frac{1+r}{2}$ $(r < \rho < 1)$. Así, si $n \ge N$,

$0 \le x_n \le \rho\, x_{n-1} \le \ldots \le \rho^{n-N} x_N \Rightarrow 0 \le x_n \le A\rho^n$ si $n \ge N$

(con $A = \rho^{-N} x_N < \infty$). Entonces la convergencia de S puede obtenerse (por comparación), usando la de $\sum_{n=N}^{\infty}{}' \rho^n < \infty$ (pues $0 < \rho < 1$).

ii) Si $r > 1$, $\exists N$ t.q. $n \ge N \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \ge \rho > 1$, tomando $\rho = \frac{1+r}{2}$ $(1 < \rho < r)$, y entonces $x_n \ge A\rho^n$ si $n \ge N$, con $A = \rho^{-N} x_N$, luego la divergencia de S se obtiene de nuevo, por comparación, de la de $\sum_{n=N}^{\infty}{}' \rho^n = \infty$ (pues $\rho > 1$).

Obs: Si $r = 1$ el criterio no proporciona información (como ocurre, por ejemplo, con $x_n = n^{-p}$)

Muy similar al Criterio del Cociente es el siguiente

Prop 11 (Criterio de la Raíz)

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ para cual $\exists \lim_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} = r \in [0,\infty)$.

Entonces:

i) Si $0 \leq r < 1$, S es absolutamente convergente

ii) Si $r > 1$, S es divergente

Dem:

i) Si $0 \leq r < 1$, $\exists N$ t.q. $n \geq N \Rightarrow |x_n|^{1/n} \leq \rho < 1$ (tomando $\rho \in (r,1)$, por ejemplo $\rho = \frac{1+r}{2}$)

Pero entonces $|x_n| \leq \rho^n$ si $n \geq N$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de la serie geométrica $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^n$, pues $0 \leq \rho < 1$.

ii) Si $r > 1$, $\exists N$ t.q. $|x_n|^{1/n} \geq \rho > 1$ (tomando $\rho \in (1,r)$, por ejemplo $\rho = \frac{1+r}{2}$). Entonces $|x_n| \geq \rho^n > 1$ y la divergencia de S se deduce de que $x_n \not\to 0$.

Ejemplos:

i) Sea $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (con $x \in \mathbb{R}$ fijo). Entonces

S es absolutamente convergente:

Si $x_n = \frac{x^n}{n!}$, $|x_n| = \frac{|x|^n}{n!} \Rightarrow |x_n|^{1/n} = \frac{|x|}{(n!)^{1/n}}$.

Pero si $n = 2m$ ($m = 1, 2, \ldots$), $n! = \underbrace{[n \cdot (n-1) \cdots (m+1)]}_{m \text{ factores } \geq m} \cdot \underbrace{m!}_{\geq 1} \geq m^m = \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$.

Si $n = 2m+1$, $n! = (2m+1) \cdot (2m)! \geq (2m+1) \cdot m^m = n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

En ambos casos, $n! \geq \left[\frac{n}{2}\right]^{[n/2]}$, con $[n/2]$: parte entera de n

$\Rightarrow |x_n|^{1/n} \leq |x| \left(\left[\frac{n}{2}\right]^{[n/2]}\right)^{-1/n} = |x| \left[\frac{n}{2}\right]^{-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]}$

Como $\left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2} < \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \Rightarrow \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] \leq 1/2 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] = 1/2$

y del mismo modo, para $n \gg 1$, $\left[\frac{n}{2}\right]^{-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]}$ es "esencialmente" $\left(\frac{n}{2}\right)^{-1/2} \longmapsto 0$, $n \to \infty$. Por tanto S es absolutamente convergente

(Obs: Este es más fácil con el Criterio del Cociente:

$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \longmapsto 0$, $n \to \infty$)

ii) $S=\sum_{j=1}^{\infty}{}' \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$: Si $x_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$, $x_n>0$ y $x_n^{1/n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \longrightarrow e^{-1}\in(0,1)$. Por tanto, S es convergente

<u>Material adicional:</u>

<u>Prop 12:</u> La serie $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$ es absolutamente convergente $\forall x\in\mathbb{R}$ y su suma es $\exp(x)=e^x$.

<u>Dem:</u> a) La convergencia absoluta de $S(x)$ ya la conocemos (por el Criterio del Cociente ó de la Raíz).

b) Queremos ver que $S(x)=\exp(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>b.1)</u> $S(x)\geq 1$ $\forall x\geq 0$: obvio, pues $\frac{x^n}{n!}\geq 0$ $\forall n$ en este caso, y el 1er término es $\frac{x^0}{0!}=1$ (consideramos $0^0=1$)

b.2) Si $x,y\in\mathbb{R}$, $S(x+y)=S(x)S(y)$:

Puesto que $S(x)$, $S(y)$ y $S(x+y)$ son series absolutamente convergentes, $S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}{}'\frac{x^j}{j!}$, $S(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}{}'\frac{y^j}{j!}$, etc

Entonces $S(x)S(y) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n}{}' \frac{x^j}{j!}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}{}' \frac{y^k}{k!}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n}{}' \frac{x^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}{}' \frac{y^k}{k!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n}{}' \frac{x^j y^k}{j!\,k!} \qquad (1).$$

Para n fijo, la suma doble $\sum_{j,k=0}^{n}{}' \frac{x^j y^k}{j!\,k!}$ puede

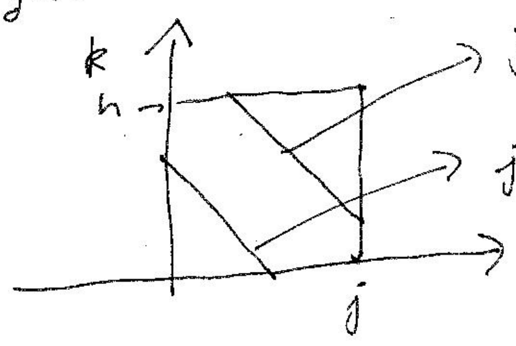
escribirse como $\sum_{l=0}^{2n}{}' \left(\sum_{\substack{0\le j,k\le n \\ j+k=l}}{}' \frac{x^j y^k}{j!\,k!} \right)$.

–. Si $0 \le l \le n$, $\sum_{\substack{0\le j,k\le n \\ j+k=l}}{}' \frac{x^j y^k}{j!\,k!} = \sum_{j=0}^{l}{}' \frac{1}{l!} \frac{l!}{j!\,k!} x^j y^{l-j}$; $k! = (l-j)!$

$$= \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{l}{}' \binom{l}{j} x^j y^{l-j} = \frac{1}{l!}(x+y)^l \qquad (2)$$

–. Si $n+1 \le l \le 2n$, $\left| \sum_{\substack{0\le j,k\le n \\ j+k=l}}{}' \frac{x^j y^k}{j!\,k!} \right| \le \sum_{\substack{0\le j,k\le n \\ j+k=l}}{}' \frac{|x|^j |y|^{l-j}}{j!\,(l-j)!}$

$$\le \sum_{j=0}^{l}{}' \frac{|x|^j |y|^{l-j}}{j!\,(l-j)!} = \frac{(|x|+|y|)^l}{l!} \qquad (3)$$



$j+k=l$ con $n < l \le 2n$ (no aparecen todos los sumandos)

$j+k<l$ con $0 \le l \le n$

Usando (1), (2) y (3), $S_n = \sum_{\ell=0}^{n}{}' \frac{1}{\ell!}(x+y)^\ell + S_n'$,

con $|S_n'| \leq \sum_{\ell=n+1}^{2n}{}' \frac{1}{\ell!}(|x|+|y|)^\ell \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty}{}' \frac{(|x|+|y|)^\ell}{\ell!} \mapsto 0$,

pues la serie $\sum_{\ell=0}^{\infty}{}' \frac{(|x|+|y|)^\ell}{\ell!}$ es convergente

y de términos ≥ 0.

Puesto que S_n tiene límite y $S_n' \mapsto 0$,

se deduce que $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n}{}' \frac{1}{\ell!}(x+y)^\ell}_{= S(x+y) \text{ (por definición de } S(x+y))} = \lim_{n\to\infty} S_n = S(x)S(y)$

<u>b.3)</u> $S(x)$ es una función > 0 $\forall x$ y creciente estrictamente ($x < y \Rightarrow S(x) < S(y)$).

<u>Dem.</u> Por b.2), si $x \leq 0$, $S(x)\cdot S(-x) = S(0) = 1$
$\Rightarrow S(x) = S(-x)^{-1} > 0$, pues $S(-x) \geq 1$ ($-x \geq 0$).

. Además es estrictamente creciente, pues si $x < y$,
$S(y) = S(x + (y-x)) = S(x)\, S(y-x)$ (por b.2)
y $S(x) > 0$ y $S(y-x) \geq 1$ (si $z > 0$, $S(z) \geq 1+z \geq 1$)
$\Rightarrow S(y) > S(x)$.

b.4) $S(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

Dem: Por b.3, para $n = 1, 2, \ldots$, podemos escribir $S(x) = S(\underbrace{\tfrac{x}{n} + \cdots + \tfrac{x}{n}}_{n \text{ veces}}) = S(\tfrac{x}{n})^n \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Por otra parte, $S(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{x^n}{n!}$, luego

$$S(\tfrac{x}{n}) = 1 + \frac{x}{n} + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{(x/n)^k}{k!} = 1 + \frac{x}{n} + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{x^k}{k!\, n^k},$$

luego $S(\tfrac{x}{n}) = 1 + a_n$, con $a_n = \frac{x}{n} + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{x^k}{k!\, n^k}$.

Pero $n a_n = x + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{x^k}{k!\, n^{k-1}} = x + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{x^k}{k!\, n^{k-2}}}_{:= c_n}$.

$$|c_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{1}{k!\, n^{k-2}} |x|^k$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{|x|^k}{k!} \quad (\text{pues } \forall k \geq 2 \text{ y } n \geq 1,\ n^{k-2} \geq 1).$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{|x|^k}{k!} = \frac{1}{n} S(|x|) \longmapsto 0$$

Por tanto, $n a_n \mapsto x$, luego usando lo que sabemos de sucesiones, $S(x) = (1 + a_n)^n \quad \forall n$

$$\Rightarrow S(x) = \lim_{n \to \infty}{}' (1 + a_n)^n = e^{l};\ l = \lim_{n \to \infty}{}' n a_n = x.$$

$\boxed{\checkmark}$