

Estática

3

Equilibrio de una Partícula



Objetivos

- Concepto de diagrama de cuerpo libre para una partícula.
 - Solución de problemas de equilibrio de una partícula usando las ecuaciones de equilibrio.
-

Índice

1. Condiciones de equilibrio de una partícula.
 2. Diagrama de cuerpo libre.
 3. Sistema coplanar.
 4. Sistemas de fuerzas tridimensionales.
-

3.1 Condición para el equilibrio de una partícula

- Una partícula está en *equilibrio* si:
 - Está en reposo.
 - Se mueve a velocidad constante.

- De la primera ley de Newton,

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

siendo $\sum \mathbf{F}$ la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

3.1 Condición para el equilibrio de una partícula

- De la segunda ley de Newton

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

- Cuando las fuerzas cumplen las condiciones de la primera ley de Newton,

$$m\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a} = 0$$

por lo que la partícula se mueve con velocidad constante o está en reposo.

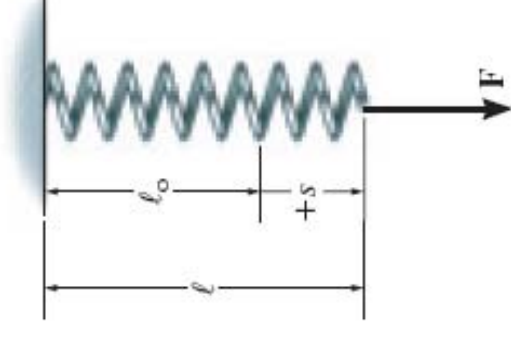
3.2 Diagrama de cuerpo libre

- Permite representar todas las fuerzas que actúan sobre una partícula ($\Sigma \mathbf{F}$).
 - Es un esquema que muestra la partícula libre de su entorno, con todas las fuerzas que actúan sobre ella.
 - Consideraremos dos casos comunes de conexión con el entorno:
 - Muelles
 - Cables y Poleas
-

3.2 Diagrama de cuerpo libre

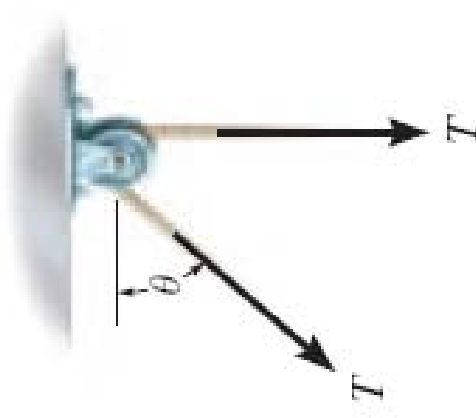
- Muelles
 - Muelle lineal elástico: el cambio en su longitud es proporcional a la fuerza que actúa sobre él
 - *Constante del muelle* o *rígidez* k : define la elasticidad del muelle.
 - La magnitud de la fuerza cuando el muelle se alarga o comprime

$$\rightarrow F = ks$$



3.2 Diagrama de cuerpo libre

- Cables y poleas
 - Los cables (o cuerdas) se suponen que tienen peso despreciable y no pueden deformarse.
 - La Tensión siempre actúa en la dirección del cable.
 - La fuerza de Tensión debe de tener una magnitud constante en equilibrio.
 - Para cualquier ángulo θ , el cable está sujeto a tensión T constante.



Cable is in tension

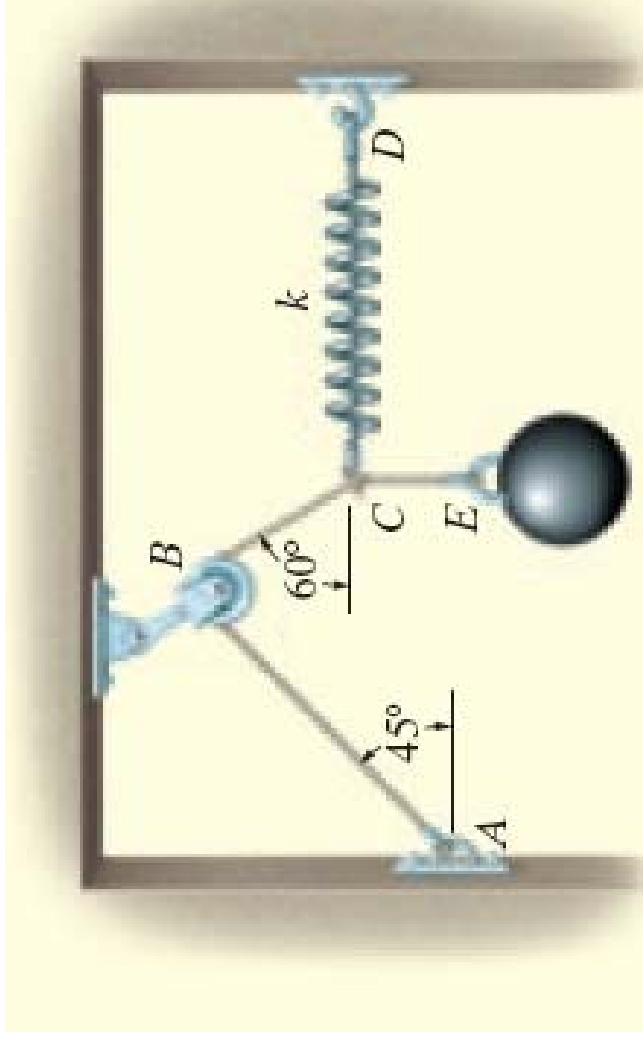
3.2 Diagrama de cuerpo libre

Procedimiento para dibujar un DCL

1. Esboza las formas del cuerpo
2. Dibuja todas las fuerzas
 - Fuerzas activas: movimiento de la partícula.
 - Fuerzas reactivas: ligaduras que evitan el movimiento.
3. Identifica cada fuerza
 - Las fuerzas conocidas en magnitud and dirección
 - Usa letras para representar las magnitudes y direcciones

Ejemplo

La esfera tiene una masa de 6 kg. Dibuje un DCL para la esfera, la cuerda CE y el nudo en C.

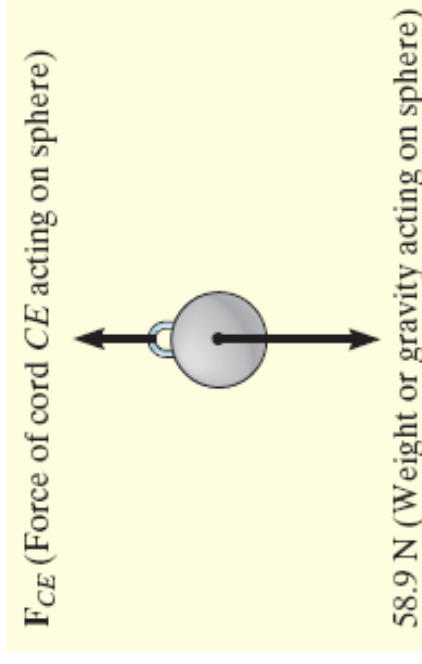


Solución

DCL de la Esfera

Dos fuerzas actúan, el peso y la fuerza que hace la cuerda CE.

Peso de 6 kg (9.81m/s^2) = 58.9N



Cuerda CE

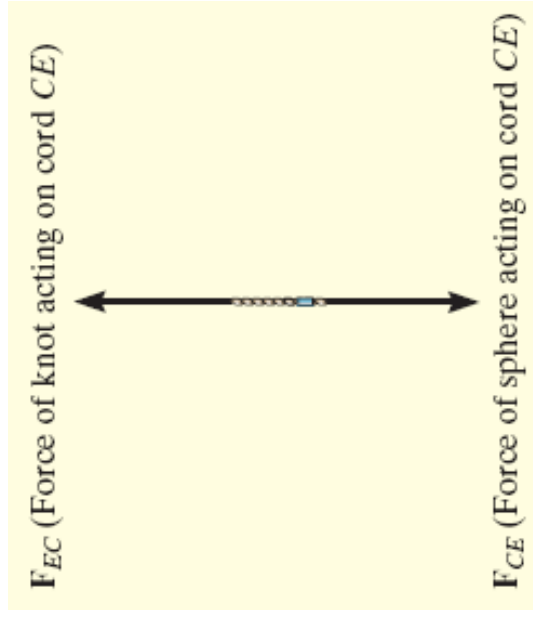
Dos fuerzas actúan: esfera y nudo

3ª ley de Newton:

F_{CE} es igual pero opuesta

F_{CE} y F_{EC} tiran de la cuerda en tensión

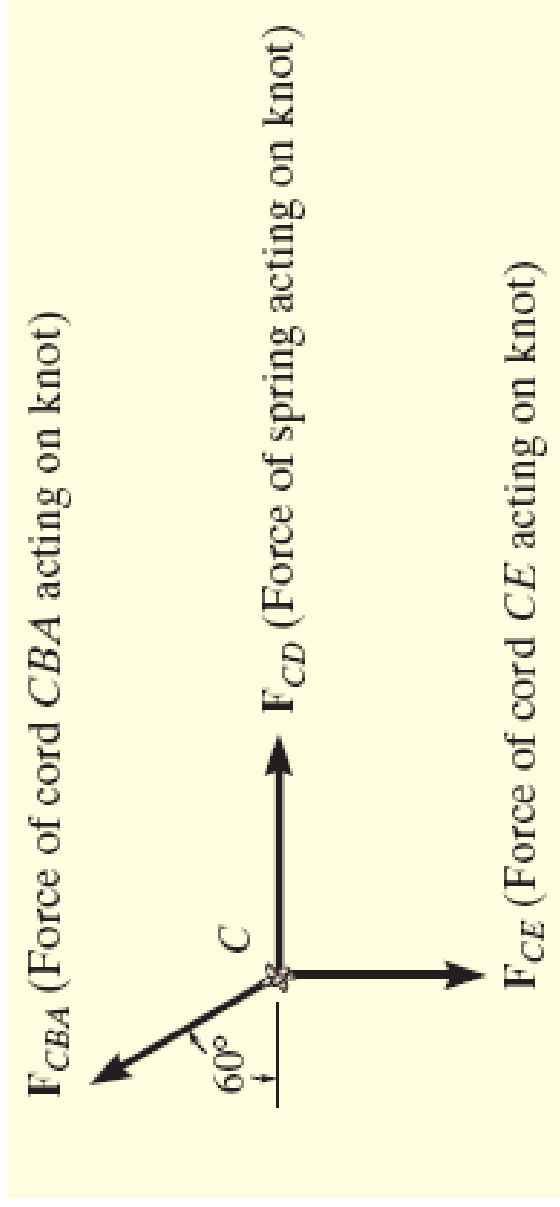
En equilibrio, $F_{CE} = F_{EC}$



Solución

DCL en el nudo

Actúan 3 fuerzas: la cuerda CBA, la cuerda CE y el muelle CD. Es importante ver que el peso de la esfera no actúa directamente sobre el nudo, sino a través de la cuerda CE.



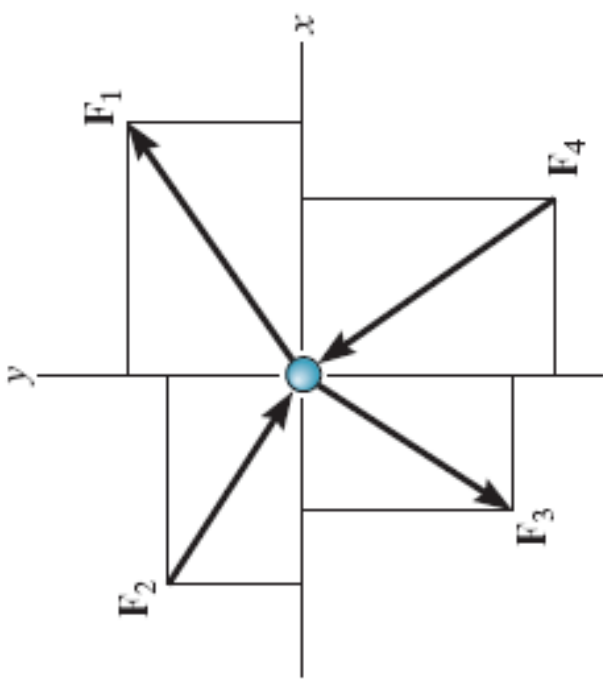
3.3 Sistema Coplanar

- Una partícula sujeta a fuerzas coplanares en el plano x-y.
- Lo resolvemos en las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} para el equilibrio

$$\sum \mathbf{F}_x = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_y = 0$$

- Las ecuaciones escalares de equilibrio requieren que la suma algebraica de las componentes x, y son igual a cero.
equal to zero

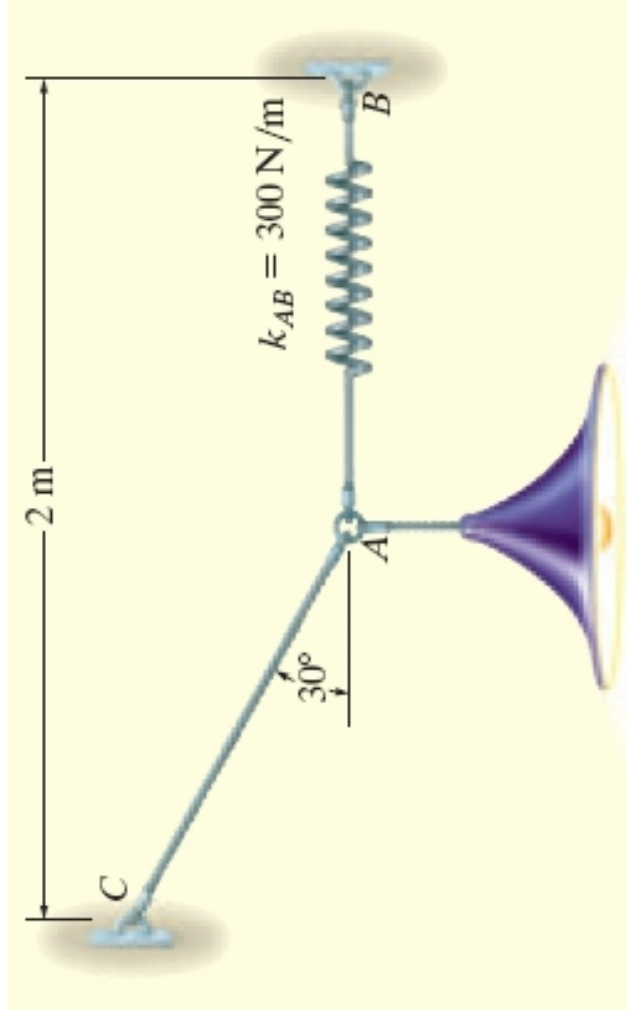


3.3 Sistema Coplanar

- Procedimiento de análisis
 1. DCL
 - escoja los ejes x , y .
 - Etiquete todas las fuerzas, conocidas y desconocidas
 2. Ecuaciones de Equilibrio
 - Aplique $F = ks$ para las fuerzas de los muelles
 - Si el resultado de la fuerza es negativo, es el sentido el que cambia.
 - Aplique las ecuaciones de equilibrio
$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \quad \sum \mathbf{F}_y = 0$$

Ejemplo

Determine la longitud requerida para la cuerda AC de manera que la lámpara de 8 kg quede sujeta. La longitud del muelle AB sin deformar es $l'_{AB} = 0.4\text{m}$, y tiene una constante de rigidez de $k_{AB} = 300\text{N/m}$.



Solución

DCL en el punto A

Actúan 3 fuerzas, la del cable AC, la del muelle AB y la del peso de la lámpara.

Si la fuerza AB es conocida, la deformación del muelle se obtiene de $F = ks$.

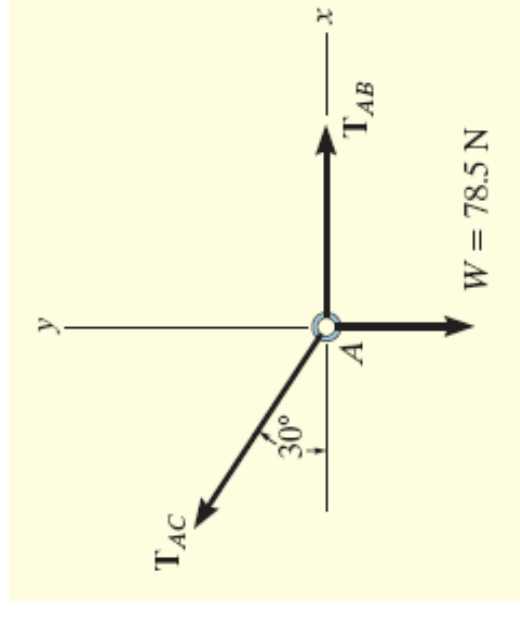
$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad T_{AB} - T_{AC} \cos 30^\circ = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{AB} \sin 30^\circ - 78.5N = 0$$

Resolviendo,

$$T_{AC} = 157.0\text{kN}$$

$$T_{AB} = 136.0\text{kN}$$



Solución

$$T_{AB} = k_{AB} s_{AB}; \quad 136.0\text{N} = 300\text{N/m}(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.453\text{N}$$

la longitud total del muelle estirado,

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB}$$

$$l_{AB} = 0.4\text{m} + 0.453\text{m} \\ = 0.853\text{m}$$

Para la distancia horizontal BC,

$$2\text{m} = l_{AC} \cos 30^\circ + 0.853\text{m}$$

$$l_{AC} = 1.32\text{m}$$

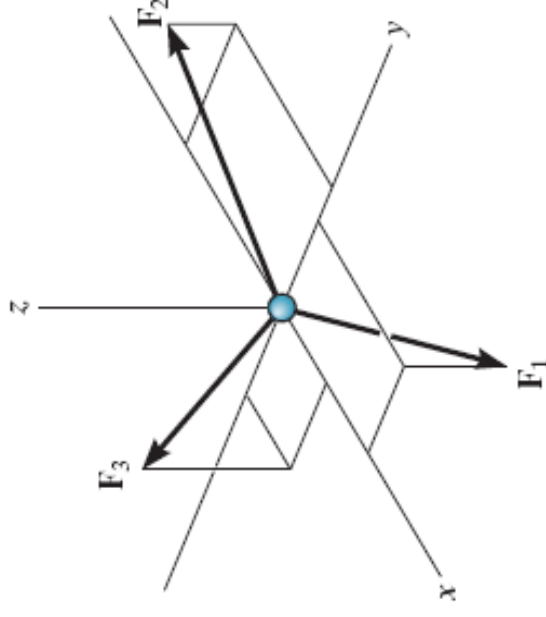
3.4 Sistemas de fuerzas 3D

- Para la partícula en equilibrio
$$\sum \mathbf{F} = 0$$
- Resolviendo en componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}
$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0$$
- 3 ecuaciones escalares representando la suma algebraica de las fuerzas en x , y ,

$$\sum F_x \mathbf{i} = 0$$

$$\sum F_y \mathbf{j} = 0$$

$$\sum F_z \mathbf{k} = 0$$



3.4 Sistemas de fuerzas 3D

- Procedimiento de análisis

DCL

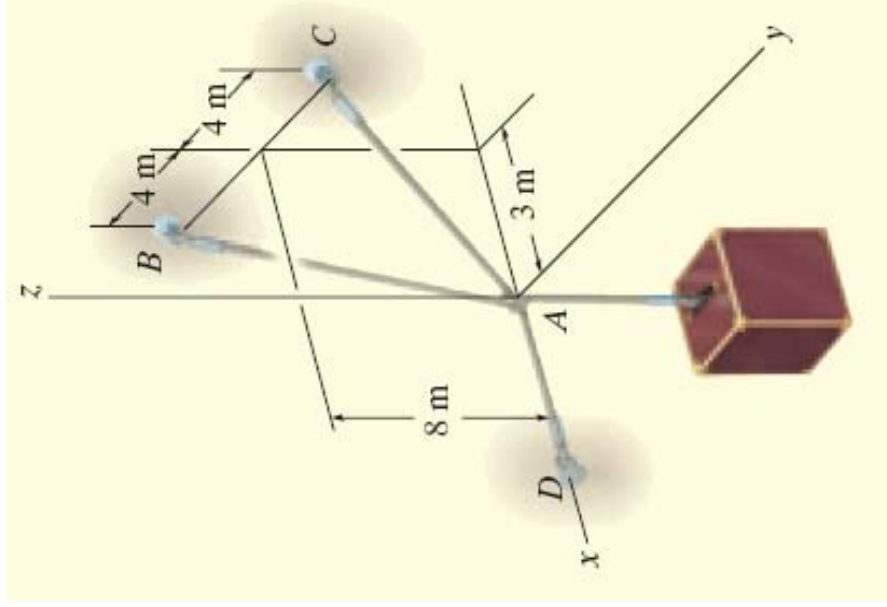
- Elija los ejes x , y , z
- Etiquete todas las fuerzas (conocidas y no conoc)

Ecuaciones de Equilibrio

- Aplique $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$
- Substituya los vectores en $\sum \mathbf{F} = 0$ y haga las componentes i , j , $k = 0$
- Resultados con signo negativo indican que el sentido de la fuerza es contrario al dibujado.

Ejemplo

Determine la fuerza que se desarrolla en cada cable para mantener la carga de 40 kN.



Solución

DCL en el punto A

Aparecen las tres fuerzas de los cables que tenemos que determinar.

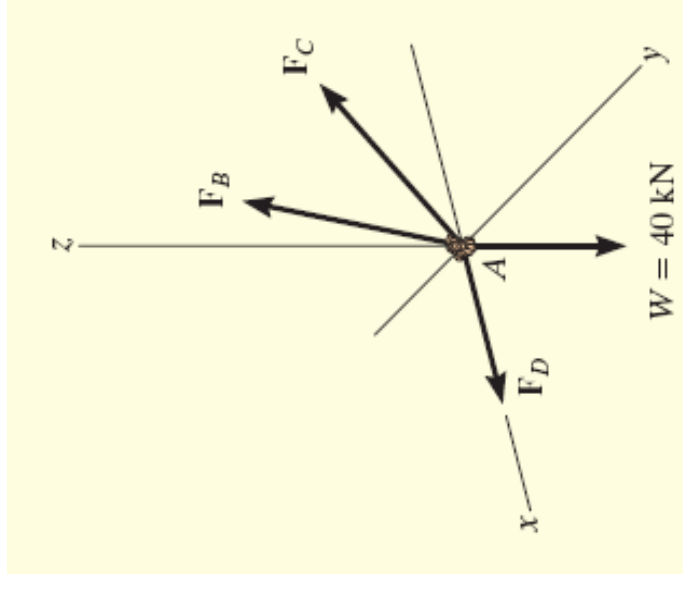
Ecuaciones de Equilibrio

Cada fuerza en forma cartesiana

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B &= F_B(\mathbf{r}_B / r_B) \\ &= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k} \\ \mathbf{F}_C &= F_C(\mathbf{r}_C / r_C) \\ &= -0.318F_C\mathbf{i} - 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = -40\mathbf{k}$$



Solución

En equilibrio,

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} = 0; \quad & \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = 0 \\ & -0.318F_B \mathbf{i} - 0.424F_B \mathbf{j} + 0.848F_B \mathbf{k} - 0.318F_C \mathbf{i} \\ & \quad - 0.424F_C \mathbf{j} + 0.848F_C \mathbf{k} + F_D \mathbf{j} - 40\mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

$$\sum F_x = 0; \quad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -0.424F_B - 0.424F_C = 0$$

$$\sum F_z = 0; \quad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0$$

Resolviendo,

$$F_B = F_C = 23.6 \text{ kN}$$

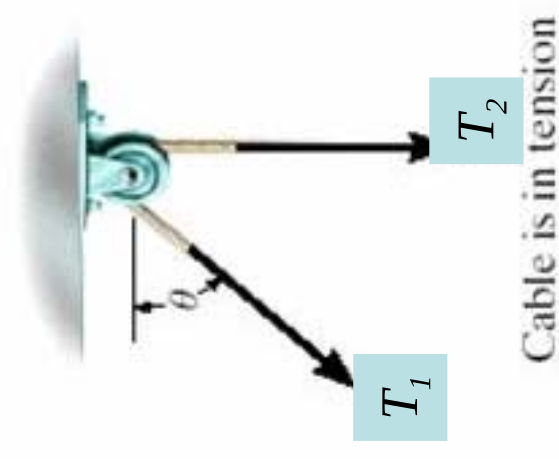
$$F_D = 15.0 \text{ kN}$$

QUIZ

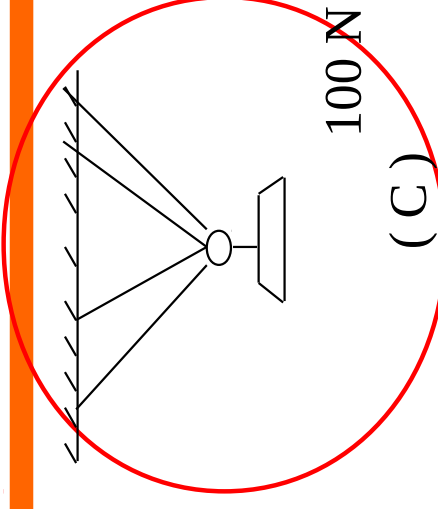
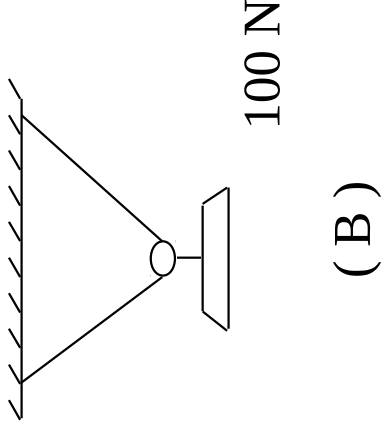
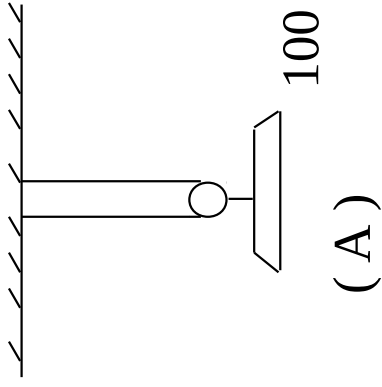
1. Cuando una partícula está en equilibrio, la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es igual a ____.
- A) una constante B) un número positivo **C) cero**
D) un número negativo E) un número entero

2. Para una polea y cable sin fricción, las tensiones en los cables están relacionadas como

- A) $T_1 > T_2$
B) $T_1 = T_2$
C) $T_1 < T_2$
D) $T_1 = T_2 \sin \theta$



QUIZ

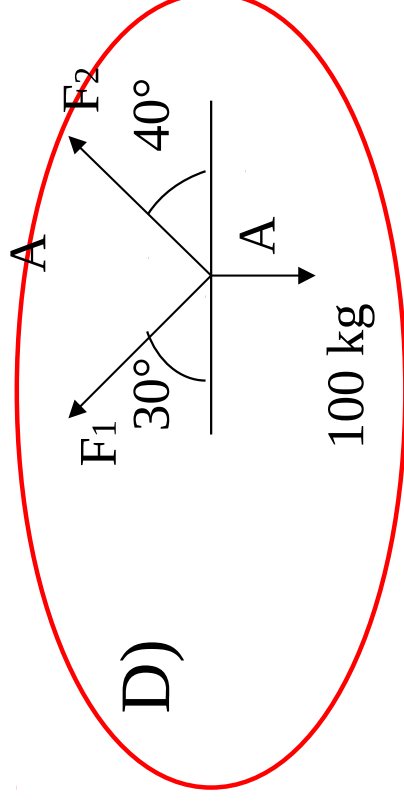
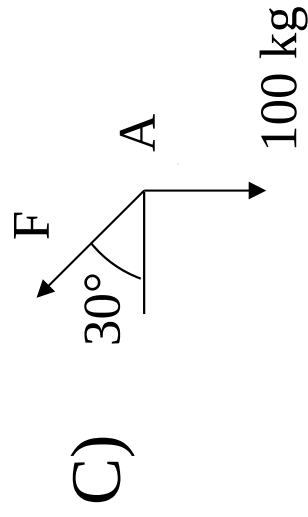
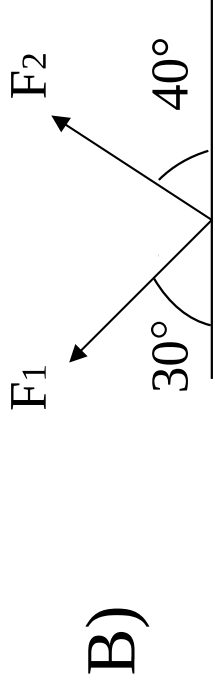
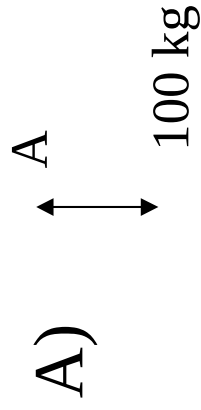
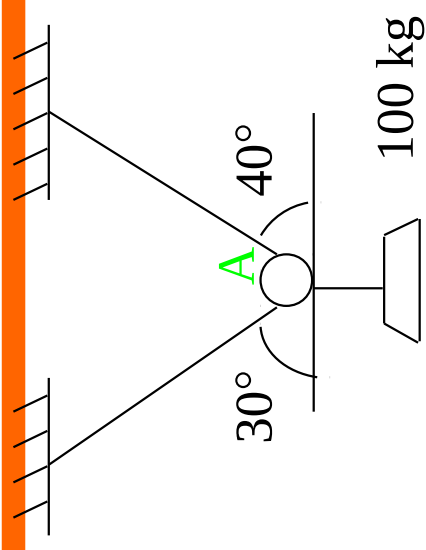


3. Asumiendo que conoce la geometría de los cables, en cuál sistema no se podría determinar las fuerzas que actúan?

4. ¿Por qué?
- A) El peso es demasiado grande.
 - B) Los cables son demasiados delgados.
 - C) Hay más incógnitas que ecuaciones.
 - D) Hay pocos cables para un peso de 100 kg.

QUIZ

5. Selecciona el DCL para A.



QUIZ

6. La partícula P está en equilibrio con 5 fuerzas actuando en un espacio 3-D. ¿Cuántas ecuaciones escalares de equilibrio se pueden escribir para P?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. En 3-D, cuando una partícula está en equilibrio, ¿cuál de las siguientes ecuaciones es válida?

A) $(\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k} = 0$

B) $\Sigma \mathbf{F} = 0$

C) $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$

D) Todas.

E) Ninguna.

QUIZ

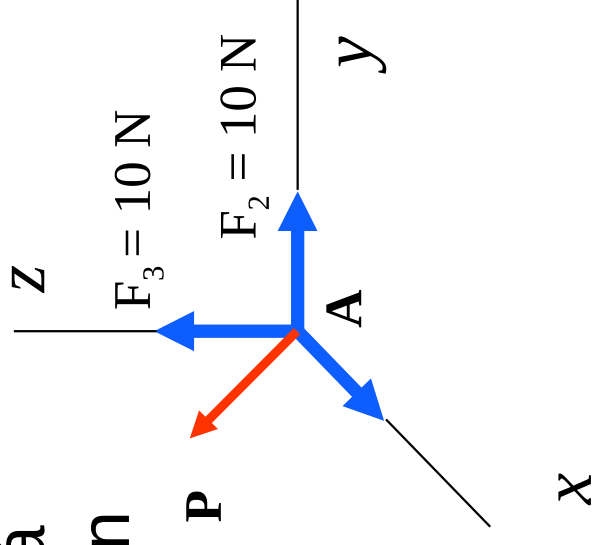
8. En 3-D, cuando se conoce la dirección de una fuerza pero no su magnitud, ¿cuántas incógnitas correspondientes a esa fuerza quedan?
- A) Una B) Dos C) Tres D) Cuatro
9. Si sobre una partícula actúan fuerzas tridimensionales y está en equilibrio estático, las componentes de la fuerza resultante ____.
- A) deben de sumar cero, ej. $-5i + 3j + 2k$
- B) deben de ser igual a cero, ej. $0i + 0j + 0k$
- C) deben de ser positivas, ej. $5i + 5j + 5k$
- D) deben de ser negativas, ej. $-5i - 5j - 5k$

QUIZ

10. Cuatro fuerzas actúan en A que está en equilibrio. Seleccione la expresión correcta para la fuerza **P**.

- A) $\{-20 \mathbf{i} + 10 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}\} \text{ N}$
- B) $\{-10 \mathbf{i} - 20 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}\} \text{ N}$
- C) $\{+20 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}\} \text{ N}$

D) Ninguna de las anteriores.



12. En 3-D, cuando no se conoce la magnitud ni la dirección de una fuerza, ¿cuántas incógnitas quedan para determinarlas?

- A) Una
- B) Dos
- C) Tres
- D) Cuatro