

Estática

4

Resultantes de Sistemas de
Fuerzas



Objetivos

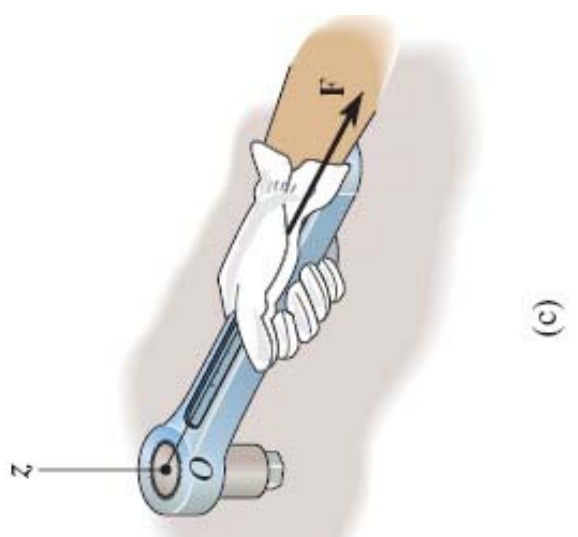
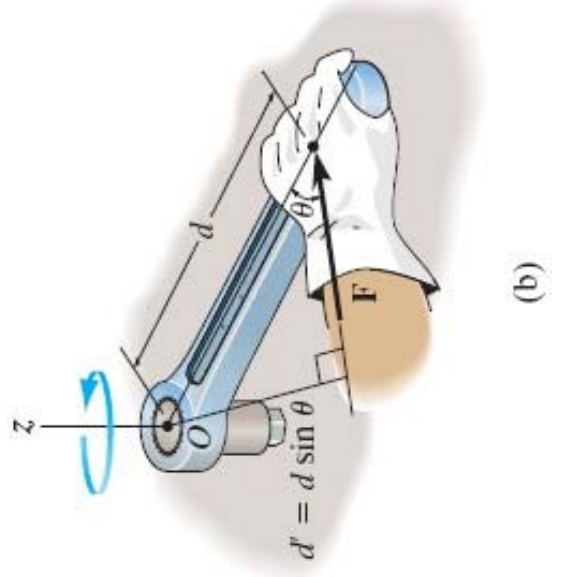
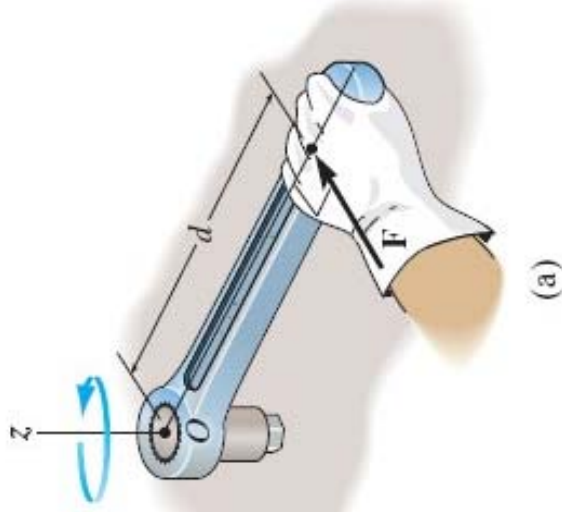
- Concepto de momento de una fuerza en una y dos dimensiones.
 - Método para encontrar el momento de una fuerza referido a un eje dado.
 - Definir el momento de un par.
 - Determinar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrente.
 - Reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una localización específica.
-

Índice

1. Momento de una fuerza – Construcción escalar
 2. Producto vectorial
 3. Momento de una fuerza – Formulación vectorial
 4. Principio de momentos
 5. Momento de una fuerza respecto a un eje
 6. Momento de un par
 7. Simplificación de un sistema de fuerza y par
 8. Simplificación extra de un sistema de fuerza y par
 9. Reducción de una carga simplemente distribuida
-

4.1 Momento de una fuerza – construcción escalar

- *Momento* de una fuerza respecto a un punto o un eje
 - mide la tendencia de la fuerza que causa la rotación de un cuerpo respecto a un punto o un eje.
- Torque – tendencia a rotar causada por \mathbf{F}_x o momento $(M_0)_z$



4.1 Momento de una fuerza - construcción escalar

Magnitud

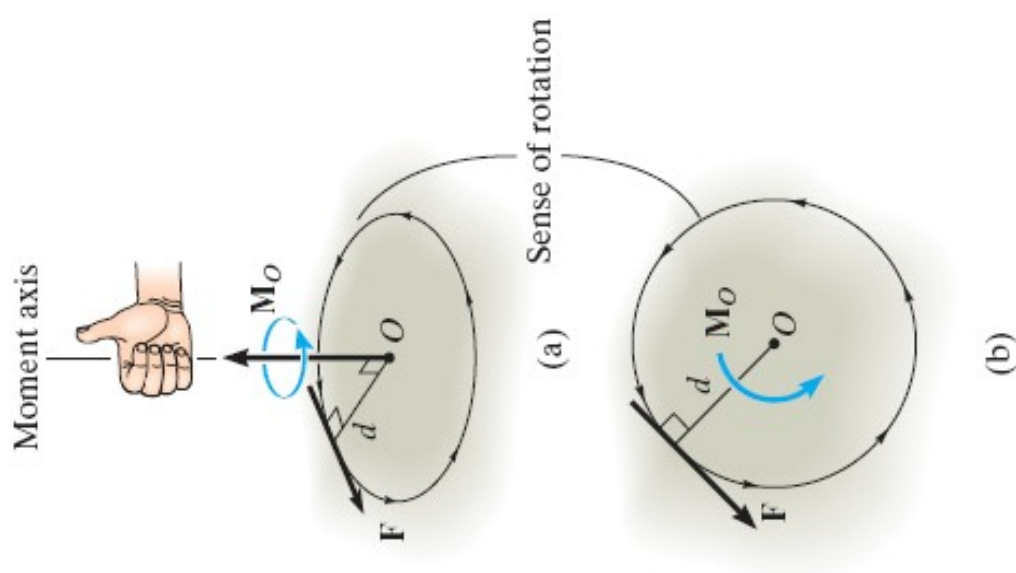
- La magnitud de M_0 ,

$$M_0 = Fd \text{ (Nm)}$$

siendo d = distancia perpendicular desde O a la línea de acción de la fuerza

Dirección

- Dirección mediante “la regla del sacacorchos”

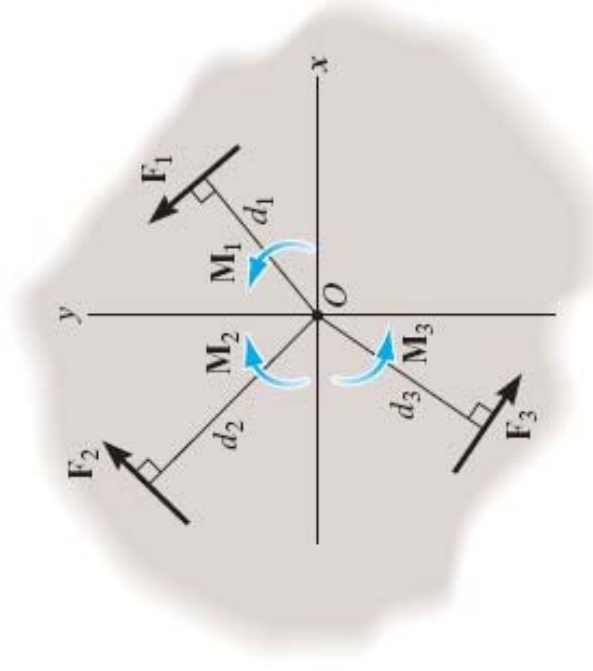


4.1 Momento de una fuerza – construcción escalar

Momento resultante

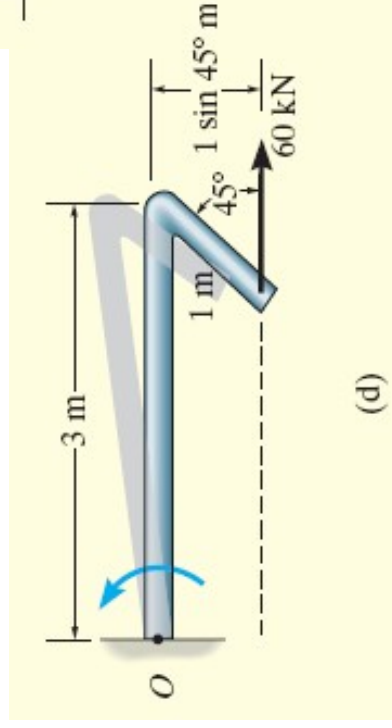
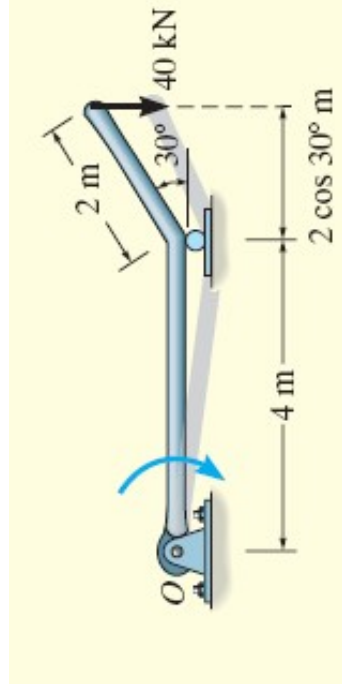
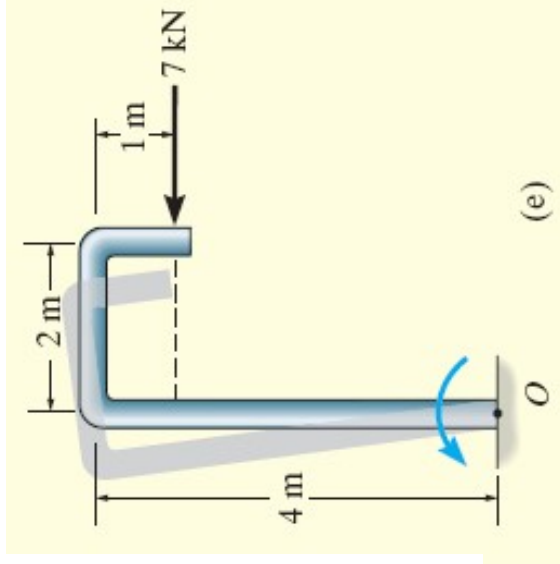
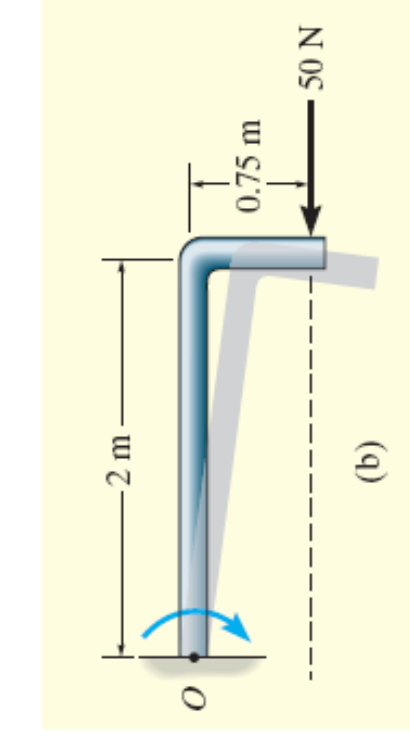
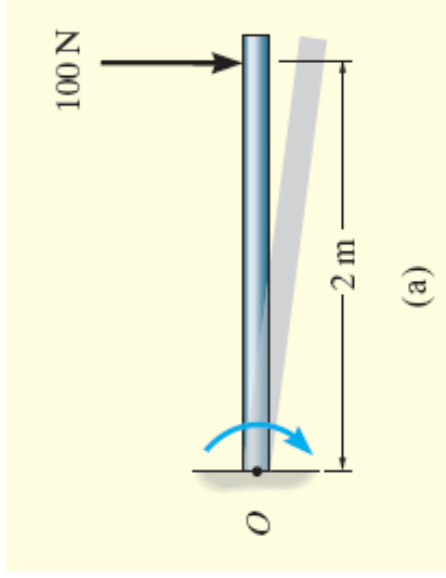
- Momento resultante,

\mathbf{M}_{R0} = momentos de todas las fuerzas, $\mathbf{M}_{R0} = \sum Fd$



Ejemplo

Para cada caso, determine el momento de la fuerza respecto al punto O.

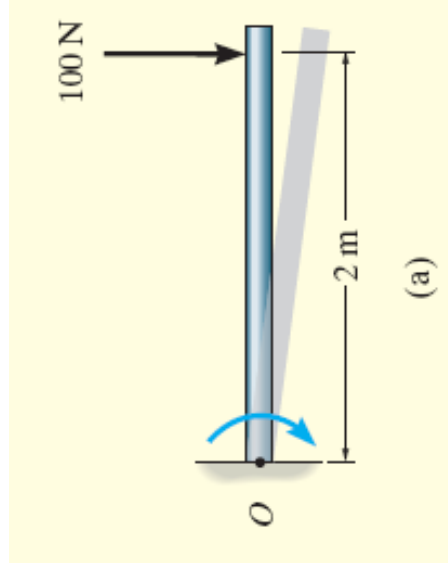


Solución

La línea de acción se extiende hasta establecer el brazo del momento d .

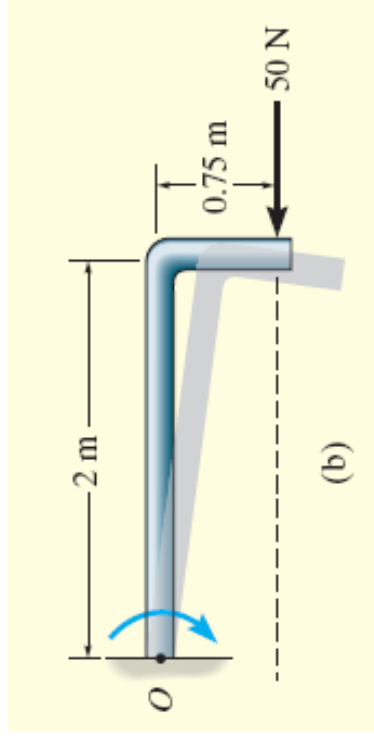
La tendencia a rotar y el sentido de giro se indican mediante un arco orientado.

$$M_o = (100 \text{ N})(2\text{m}) = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (CW)}$$

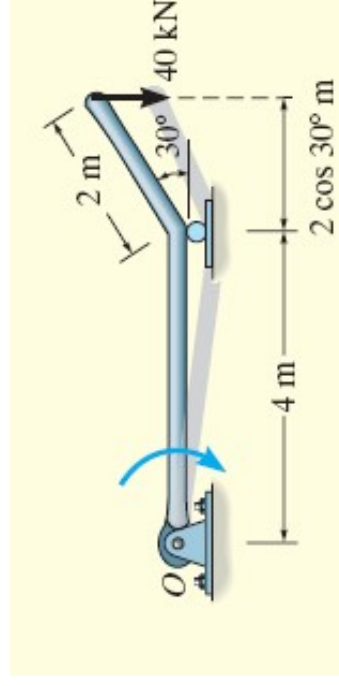


Solución

$$(b) M_o = (50 \text{ N})(0.75 \text{ m}) = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (CW)}$$

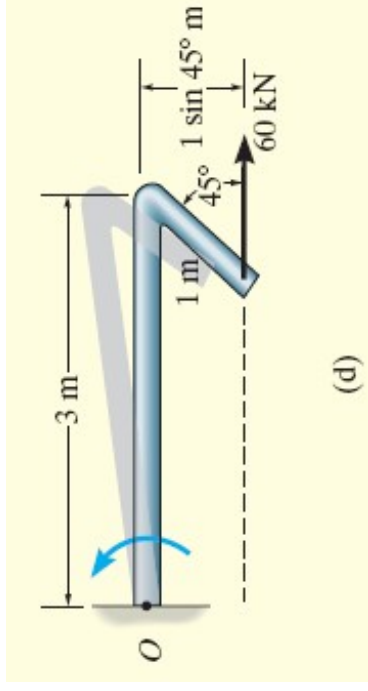


$$(c) M_o = (40 \text{ N})(4 \text{ m} + 2 \cos 30^\circ \text{ m}) = 229 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (CW)}$$

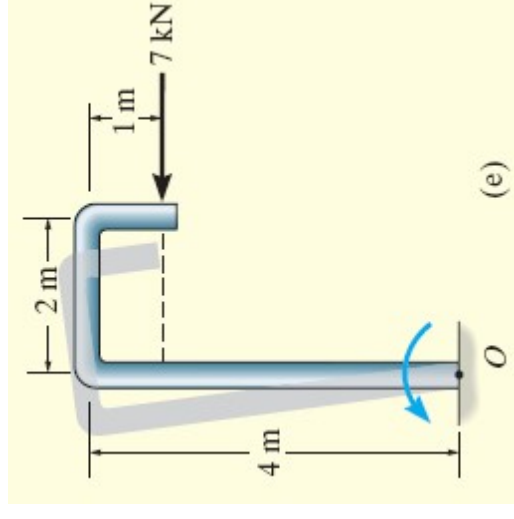


Solución

$$(d) M_o = (60 \text{ N})(1 \sin 45^\circ \text{ m}) = 42.4 \text{ N} \cdot \text{m} (\text{CCW})$$



$$(e) M_o = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{CCW})$$



4.2 Producto vectorial

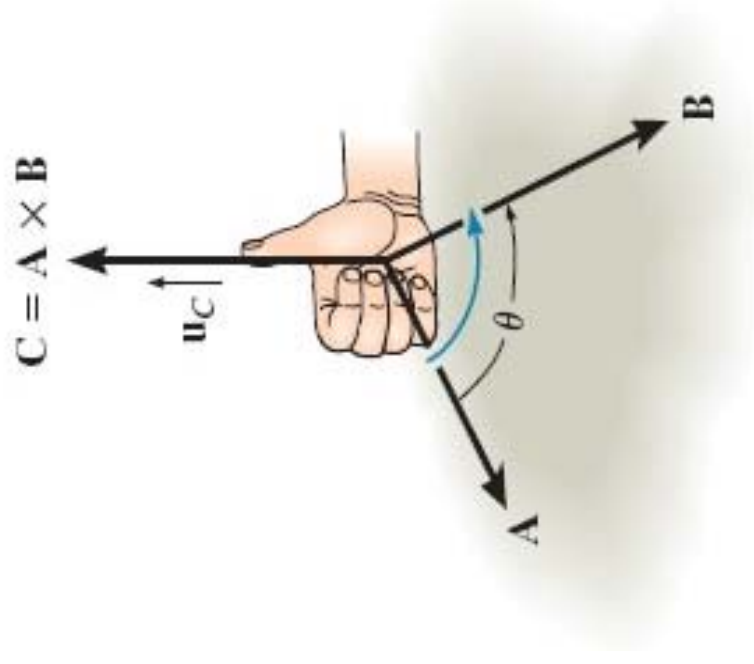
- El producto vectorial de dos vectores **A** y **B** da **C**, el cual se escribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Magnitud

- La magnitud de **C** es el producto de las magnitudes de **A** y **B**
- Y depende del ángulo θ , $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$$C = AB \sin\theta$$



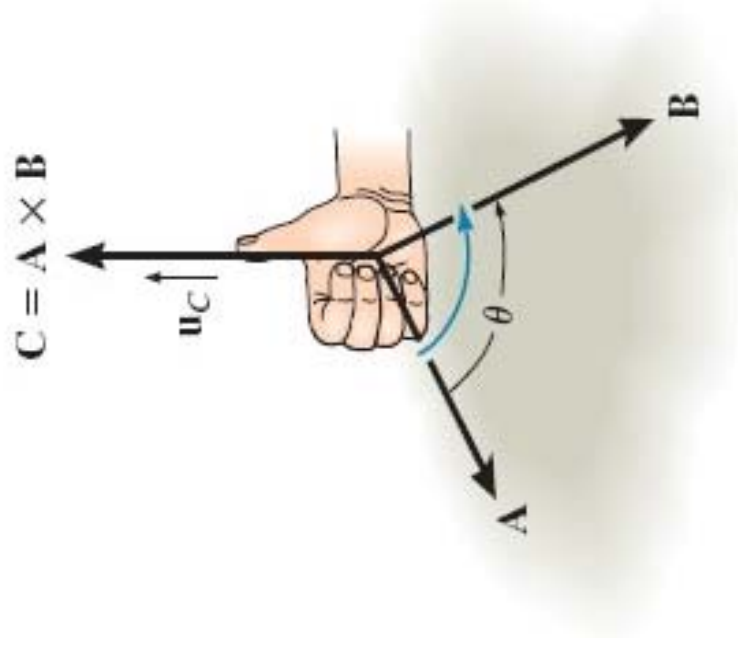
4.2 Producto vectorial

Dirección

- El vector **C** tiene dirección perpendicular al plano que contiene **A** y **B** de manera que **C** viene dado por la regla del sacacorchos.

- El vector **C** resulta

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin\theta)\mathbf{u}_C$$



4.2 Producto vectorial

Propiedades

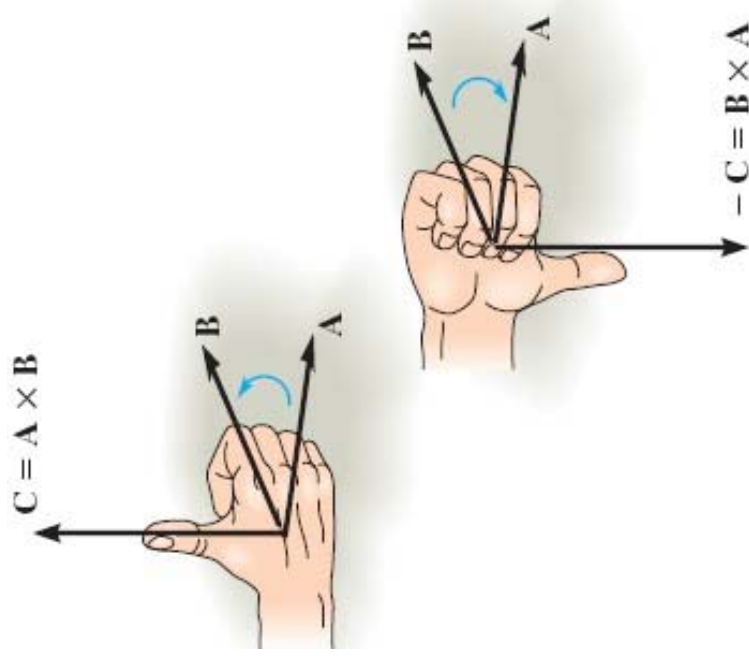
1. La prop. conmutativa no es válida

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

sino,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = - \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

- El producto vectorial $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ da un vector en sentido opuesto a \mathbf{C}



$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$$

4.2 Producto vectorial

Propiedades

2. Multiplicación por un escalar

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

3. Propiedad Distributiva

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

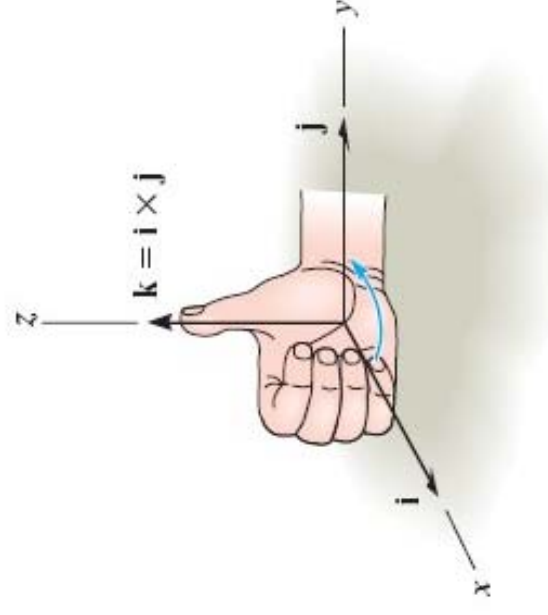
- El orden de los productos debe de mantenerse ya que no son conmutativos

4.2 Producto vectorial

Formulación cartesiana

- Usamos $C = AB \sin\theta$ para cada par de vectores cartesianos unitarios.
- Podemos expresarlo de manera más compacta como un determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

- El Momento de la fuerza \mathbf{F} respecto a O se puede expresar usando el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

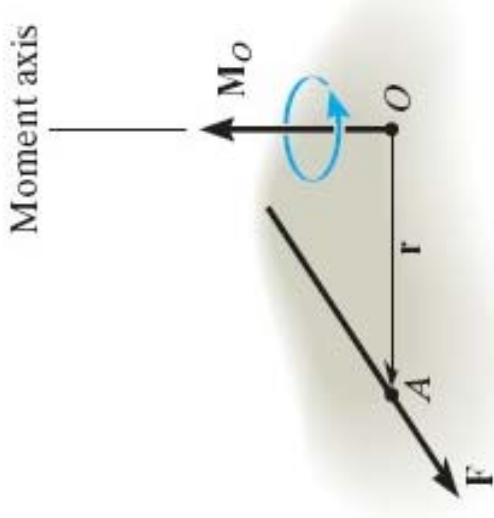
Magnitud

- Ya que la magnitud resulta,
- Si \mathbf{r} se aplica en un punto de la línea de acción,

$$M_O = rF \sin\theta$$

ya que $d = r \sin\theta$,

$$M_O = rF \sin\theta = F (r \sin\theta) = Fd$$



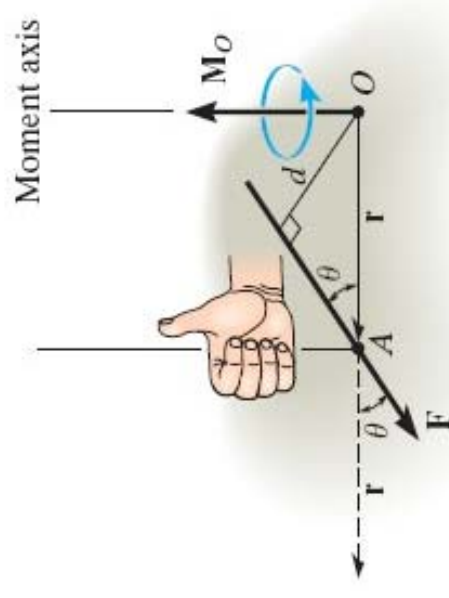
4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Dirección

- La dirección y sentido de \mathbf{M}_O se determinan por la regla del sacacorchos

*Nota:

- “curl” de los dedos indica el sentido de la rotación.
- Mantener el orden de \mathbf{r} y \mathbf{F} ya que el producto vectorial es no conmutativo.

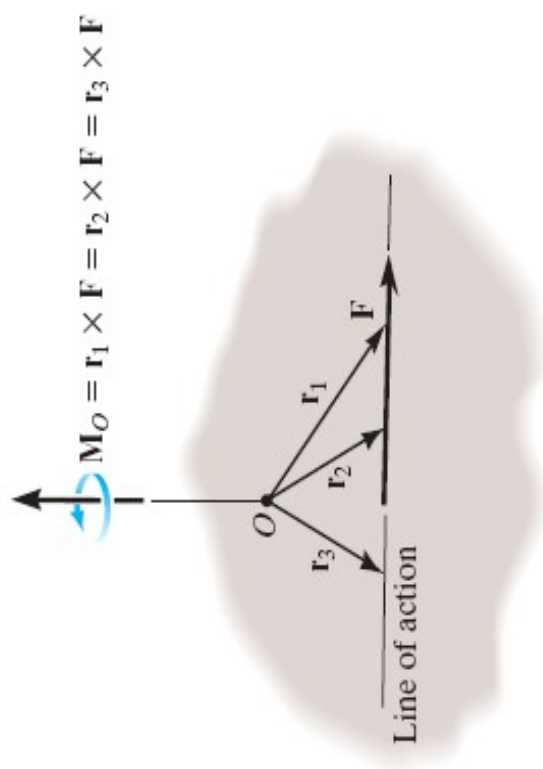


4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Principio de Transmisibilidad

- La fuerza \mathbf{F} aplicada en cualquier punto A , crea un momento respecto a O dado por $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$
- \mathbf{F} tiene las propiedades de un vector deslizante, ya que puede ser aplicada en cualquier punto de su línea de acción (principio de transmisibilidad).
- Por lo tanto

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

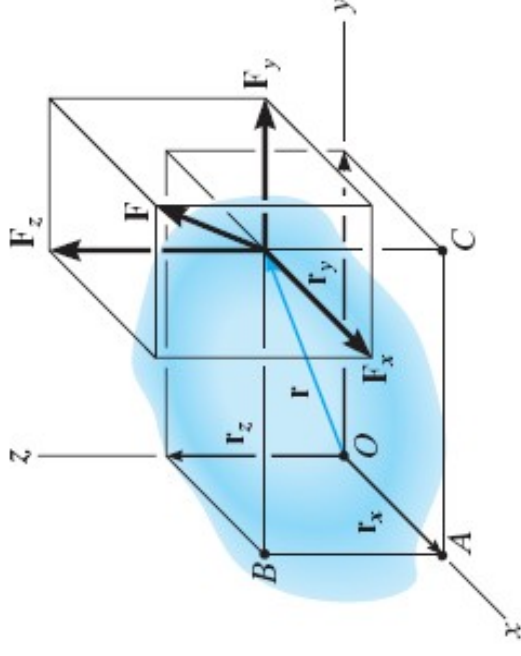
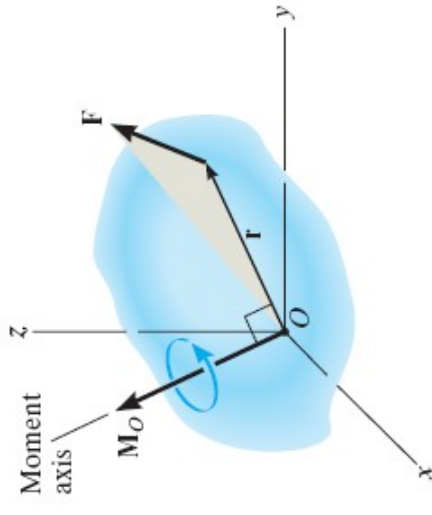
Formulación cartesiana

- Para la fuerza expresada en forma cartesiana,

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- Expandiendo el determinante,

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\mathbf{j} + (r_x F_y - F_y F_x)\mathbf{k}$$

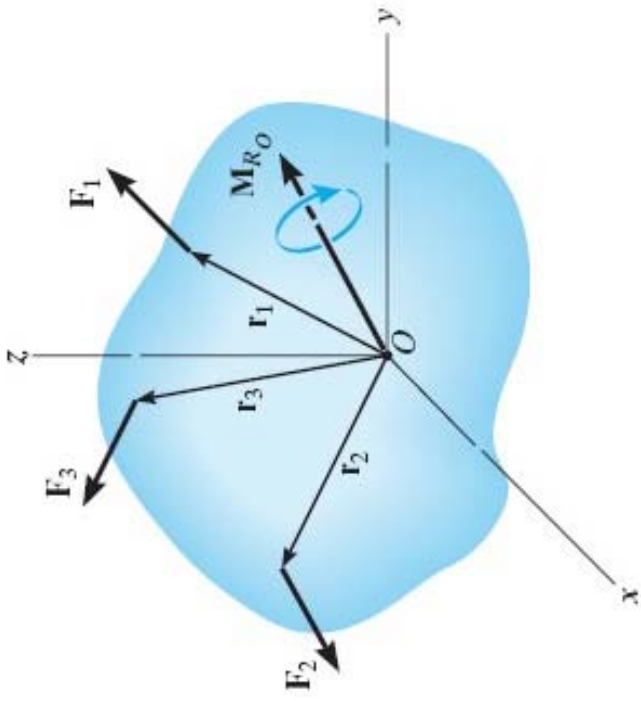


4.3 Momento de una fuerza – formulación vectorial

Momento resultante de un sistema de fuerzas

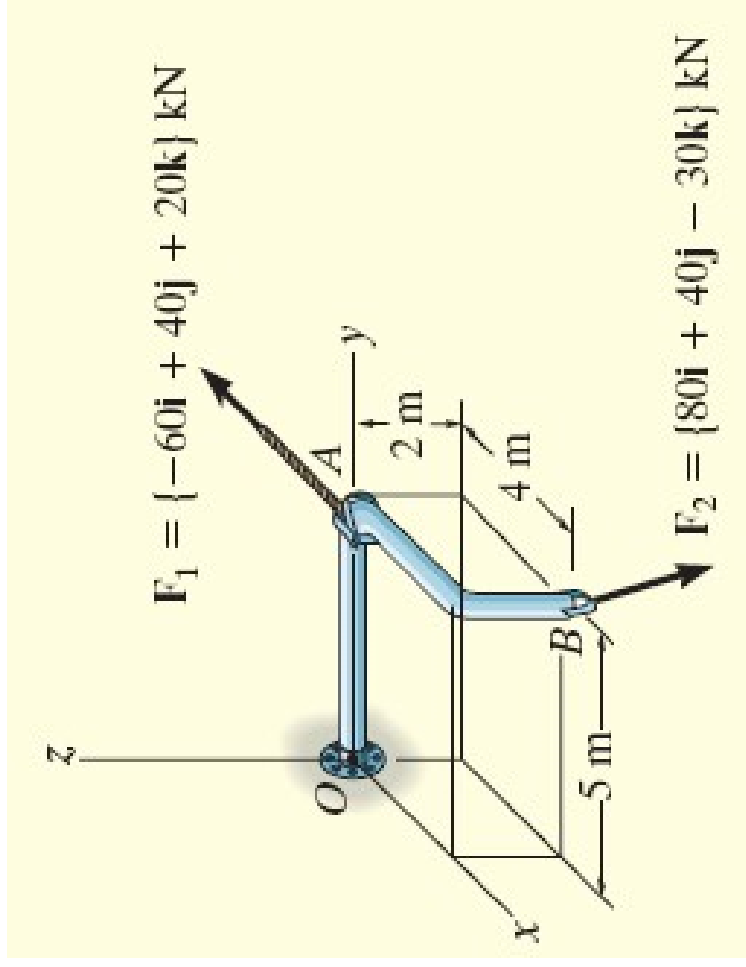
- El momento de las fuerzas respecto a O puede determinarse mediante adición vectorial

$$\mathbf{M}_{R0} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Ejemplo

Dos fuerzas actúan sobre la barra. Determine el momento resultante que sobre la barra se ejerce en O .
Expresese el resultado como un vector cartesiano.



Solución

Los vectores de posición del punto O a cada fuerza son

$$r_A = \{5j\} \text{ m}$$

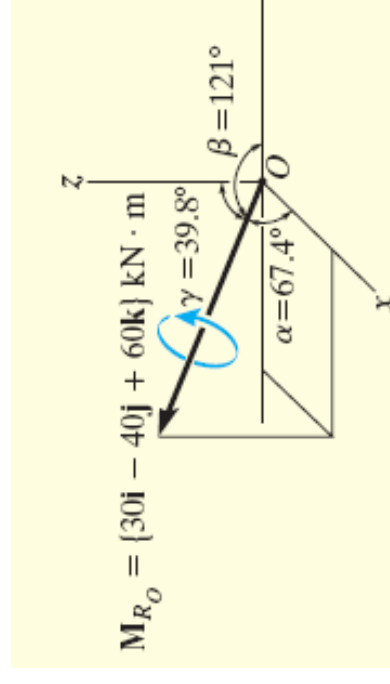
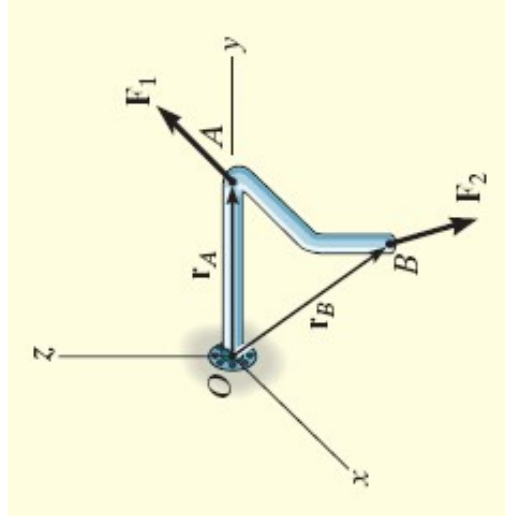
$$r_B = \{4i + 5j - 2k\} \text{ m}$$

El momento resultante respecto

a O es

$$\vec{M}_O = \sum (r \times F) = r_A \times F + r_B \times F$$

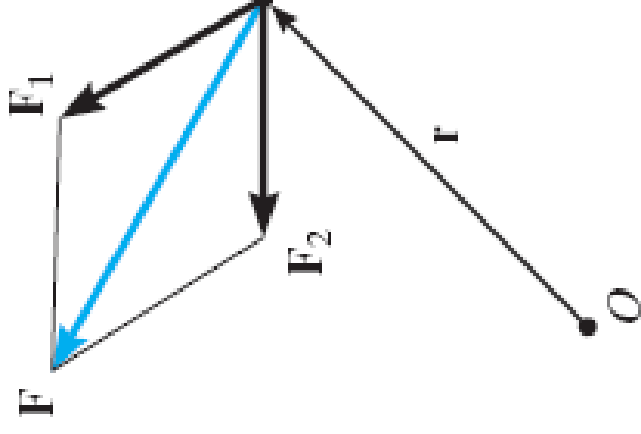
$$\begin{array}{ccccccc} & i & j & k & i & j & k \\ = & | & 0 & 5 & 0 & + & | & 4 & 5 & - & 2 & | \\ & - & 60 & 40 & 20 & 80 & 40 & - & 30 & & & \\ = & \{ & 30i & - & 40j & + & 60k & \} & \text{kN}\cdot\text{m} \end{array}$$



4.4 Principio de Momentos

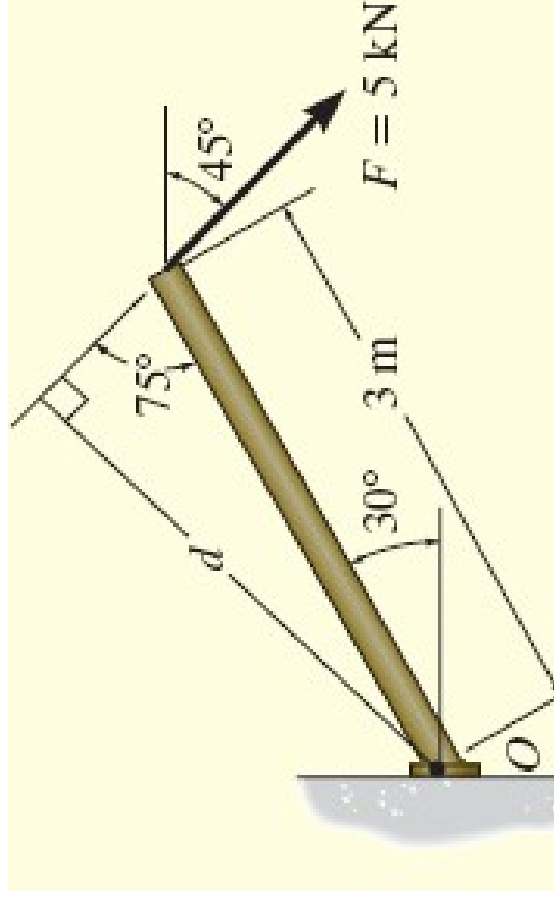
- Conocido también como el teorema de Varignon:
“El Momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de esa fuerza respecto al punto”
- Ya que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2\end{aligned}$$



Ejemplo

Determine el momento de la fuerza alrededor de O .



Solución

El brazo del momento d puede encontrarse usando trigonometría,

$$d = (3) \sin 75^\circ = 2.898 \text{ m}$$

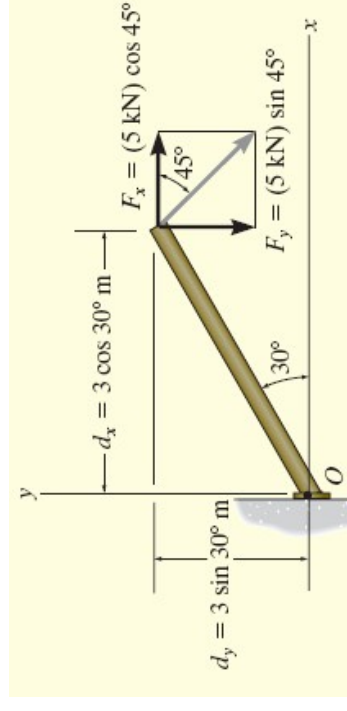
Así,

$$M_O = Fd = (5)(2.898) = 14.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ya que la fuerza tiende a rotar o orbitar en sentido horario alrededor de O , el momento está dirigido hacia el interior de la página. En coordenadas cartesianas:

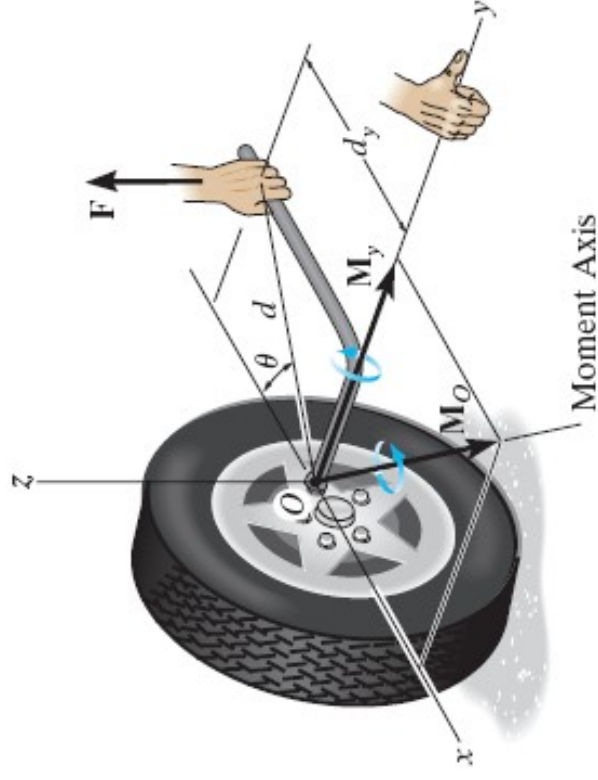
$$M_O = -F_x dy - F_y dx = -5 \cos(45)(3 \sin(30)) - 5 \sin(45)3 \cos(30)$$

$$M_O = -F_y' dx' = -5 \sin(75) 3; \text{ el eje } x' \text{ coincide con la barra}$$



4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje específico

- Para un momento de una fuerza alrededor de un punto, el momento y el eje de giro es siempre perpendicular al plano.
- Análisis escalar o vectorial se usa entonces para encontrar la componente del momento a lo largo de un eje dado que pasa a través del punto.



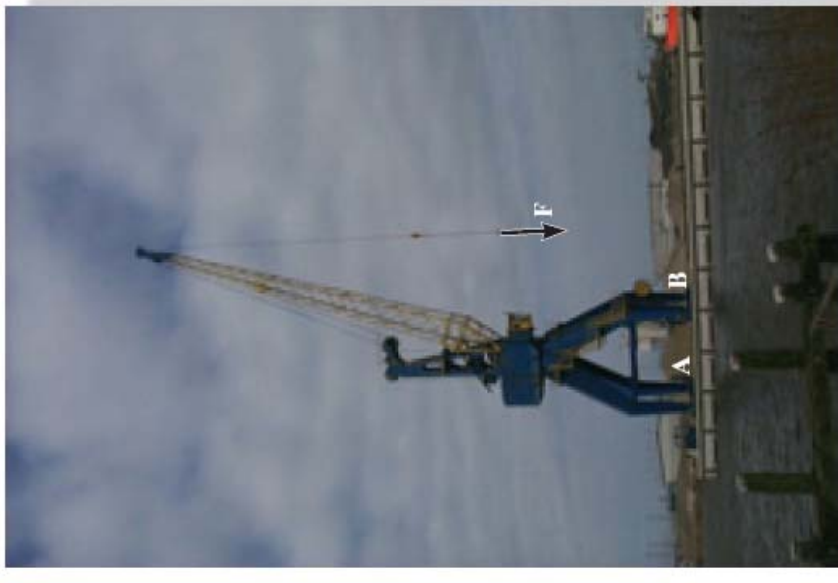
4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje específico

Análisis escalar

- Según la regla del sacacorchos o de la mano derecha, M_y está dirigido hacia el eje y positivo.
- Para cualquier eje, el momento es

$$M_a = Fd_a$$

- La fuerza no contribuye al momento si su línea de acción pasa o es paralela al eje.



4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje específico

Análisis vectorial

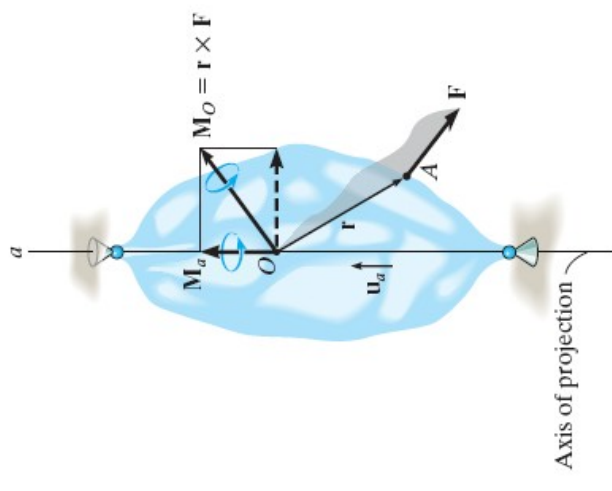
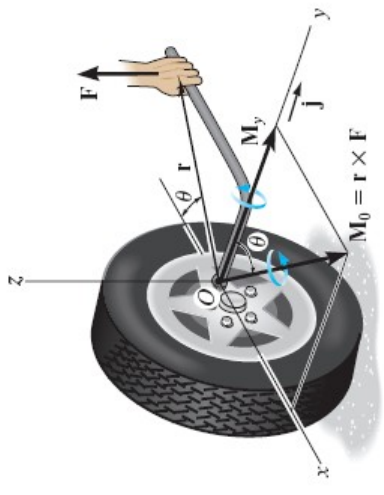
- Para la magnitud de \mathbf{M}_A ,

$$M_A = M_0 \cos\theta = \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{u}_a$$

siendo \mathbf{u}_a = vector unitario

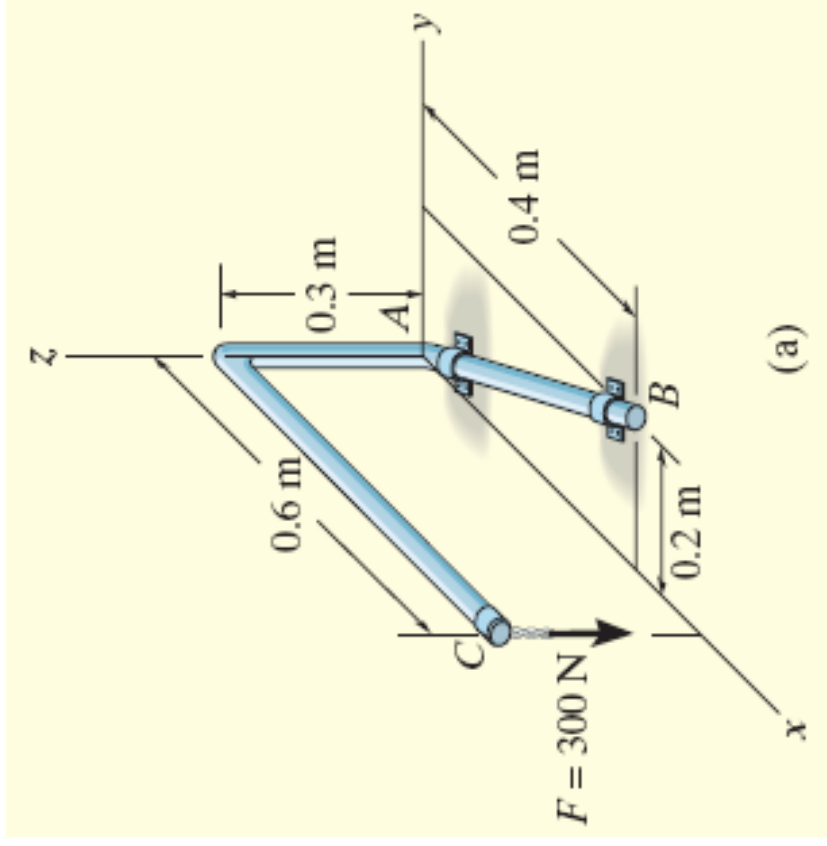
- En forma de determinante,

$$|\vec{M}_a| = \vec{u}_{ax} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Ejemplo

Determine el momento producido por la fuerza F que tiende a hacer rotar la barra alrededor del eje AB .



Solución

Un vector unitario define la dirección del eje AB de la barra, siendo

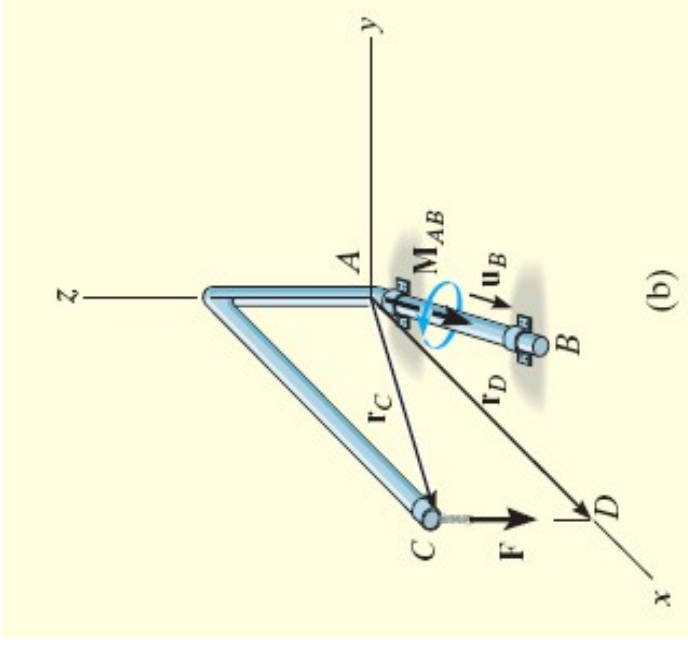
$$u_B = \frac{\vec{r}_B}{r_B} = \frac{\{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}\}}{\sqrt{0.4^2 + 0.2^2}} = 0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}$$

Por simplicidad, elegimos \mathbf{r}_D

$$\mathbf{r}_D = \{0.6\mathbf{i}\}m$$

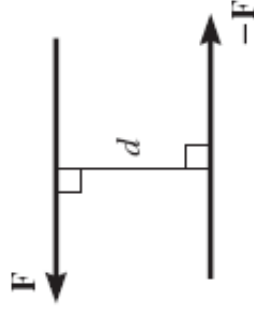
La fuerza es $\mathbf{F} = \{-300\mathbf{k}\}N$

$\mathbf{M}_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = 70.0\mathbf{i} + 36.0\mathbf{j} Nm$



4.6 Momento de un par

- Par
 - Dos fuerzas paralelas
 - Misma magnitud pero direcciones opuestas
 - Separadas por una distancia perpendicular d
- Fuerza resultante = 0
- Tendencia a rotar en una dirección específica
- Momento del par = suma de los momentos de las fuerzas del par respecto a cualquier punto.



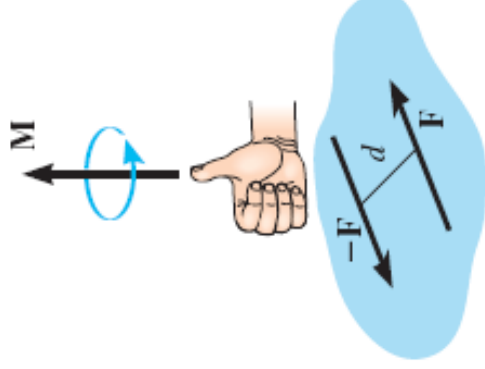
4.6 Momento de un par

Formulación escalar

- Magnitud del momento del par

$$M = Fd$$

- Dirección y sentido determinados por la regla del sacacorchos o de la manos derecha.
- **M** actúa perpendicularmente al plano que contiene las fuerzas



4.6 Moment de un par

Formulación vectorial

- Para el momento del par,

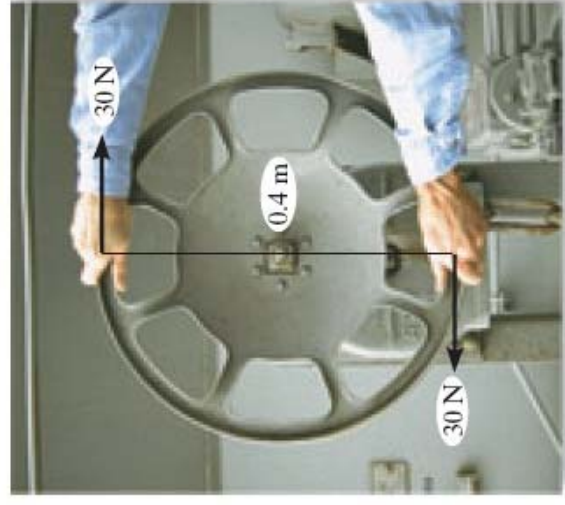
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Ya que tomando el punto O en la línea de aplicación de $-\mathbf{F}$, el momento de esta fuerza es cero.
- \mathbf{r} se multiplica vectorialmente con la fuerza a la que es dirigido

4.6 Momento de un par

Pares equivalentes

- 2 pares son equivalentes si producen el mismo momento.
- Las fuerzas de pares equivalentes están en el mismo plano o en planos paralelos.

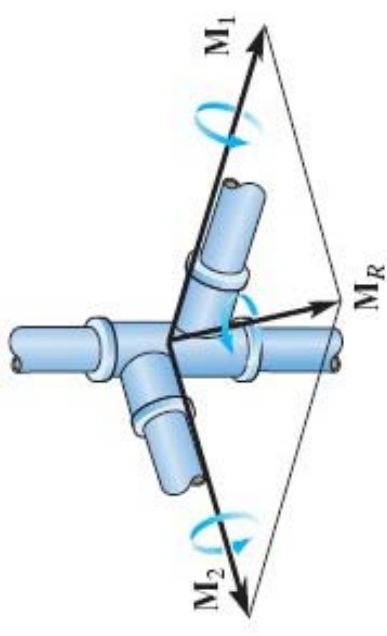
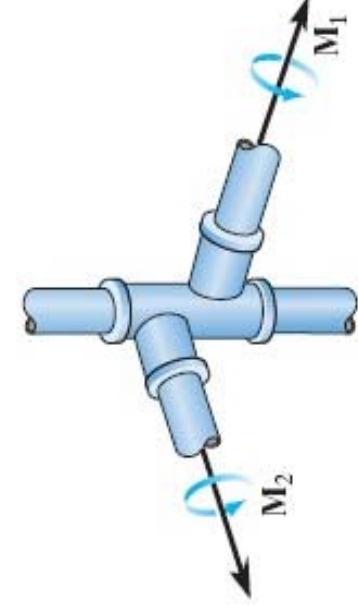


4.6 Momento de un par

Momento resultante de pares

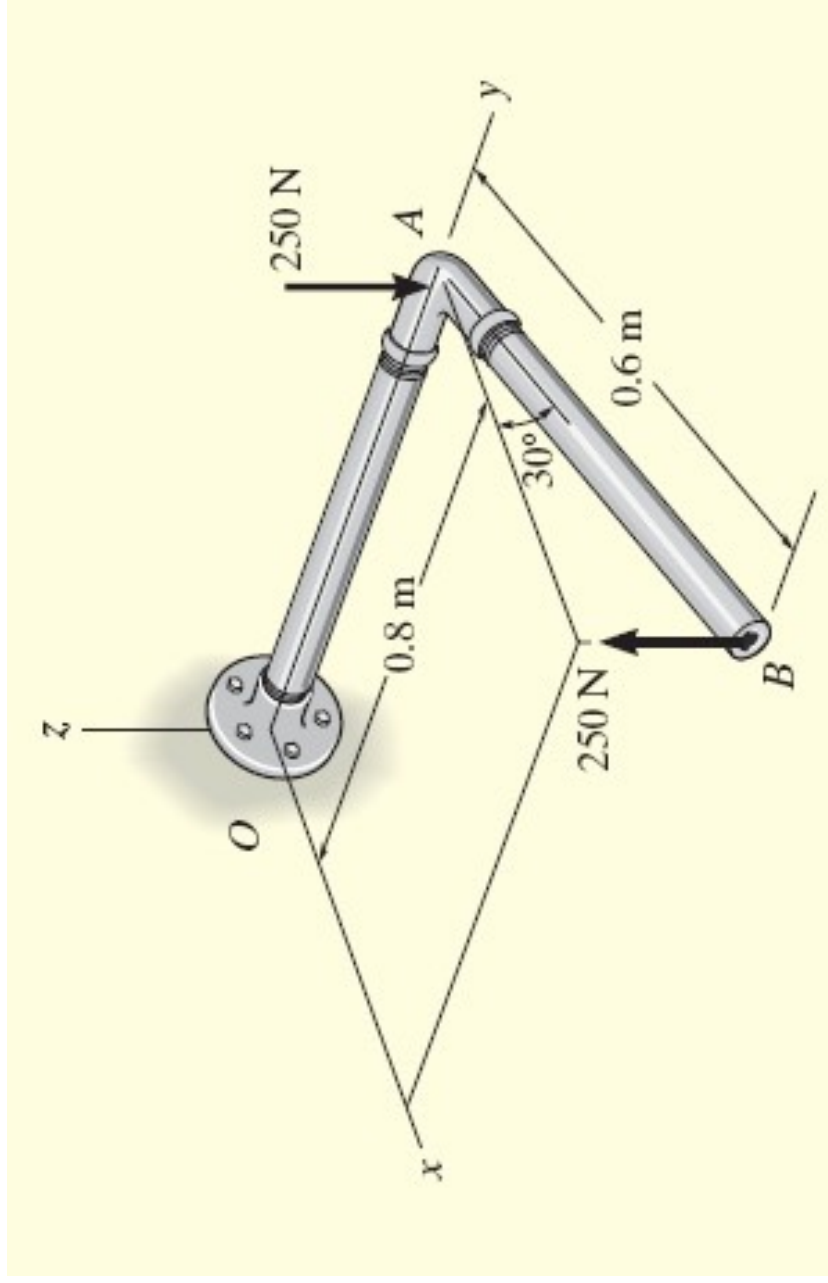
- Los momentos de pares son *vectores libres* y por tanto pueden aplicarse en cualquier punto P y sumarse entonces vectorialmente.
 - El momento resultante de dos pares en el punto P es
- $$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$
- Para más de 2 momentos, podemos usar

$$\mathbf{M}_R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Ejemplo

Determine el momento del par que actúa sobre la tubería.
El segmento AB está dirigido 30° debajo del plano x - y .



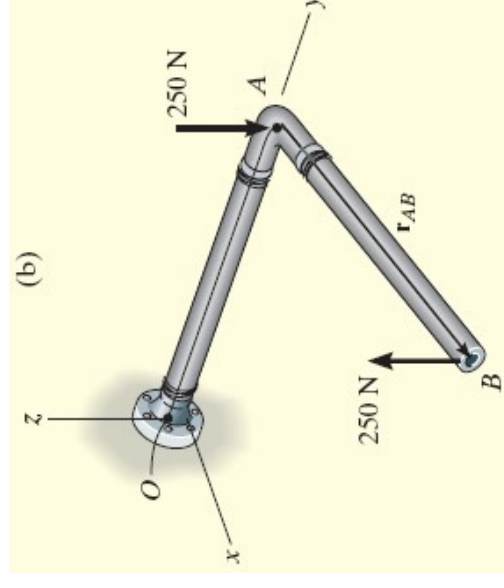
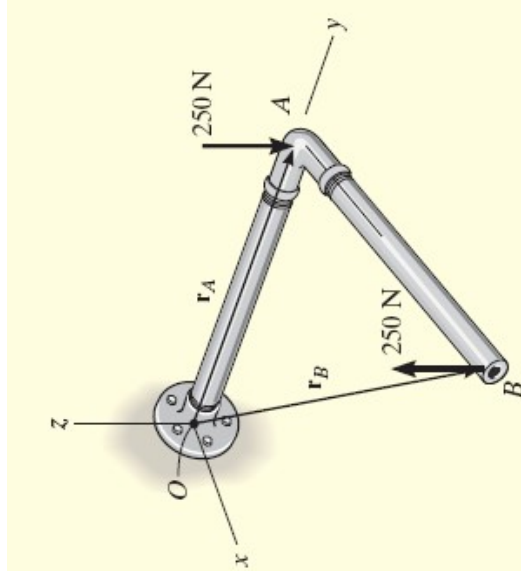
Solución I (análisis vectorial)

Momento respecto a O,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times (-250\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (250\mathbf{k}) \\ &= (0.8\mathbf{j}) \times (-250\mathbf{k}) + (0.66\cos 30^\circ\mathbf{i} \\ &\quad + 0.8\mathbf{j} - 0.6\sin 30^\circ\mathbf{k}) \times (250\mathbf{k}) \\ &= \{-130\mathbf{j}\}\text{N.cm}\end{aligned}$$

Momento respecto a A

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_{AB} \times (250\mathbf{k}) \\ &= (0.6\cos 30^\circ\mathbf{i} - 0.6\sin 30^\circ\mathbf{k}) \\ &\quad \times (250\mathbf{k}) \\ &= \{-130\mathbf{j}\}\text{N.cm}\end{aligned}$$



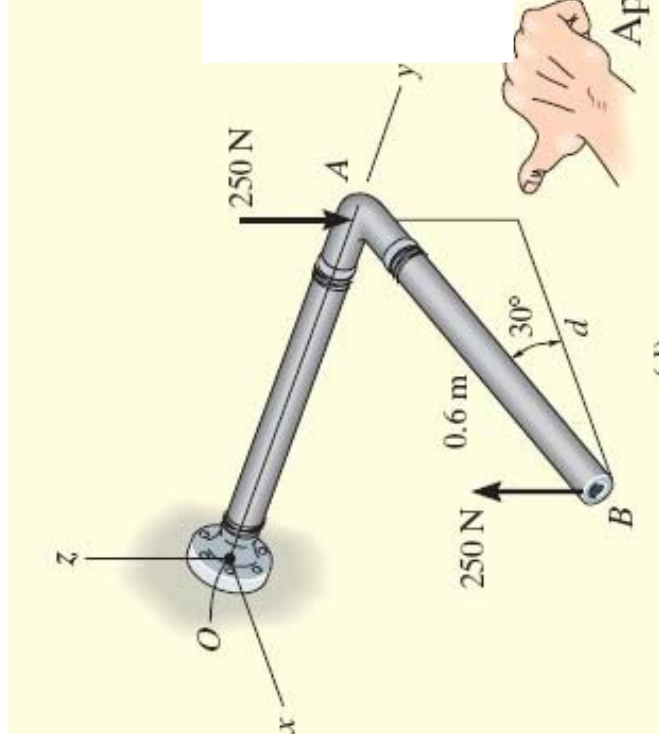
Solución II (análisis escalar)

Momento respecto a A o B,

$$\begin{aligned} M &= Fd = 250\text{N}(0.5196\text{m}) \\ &= 129.9\text{N}\cdot\text{cm} \end{aligned}$$

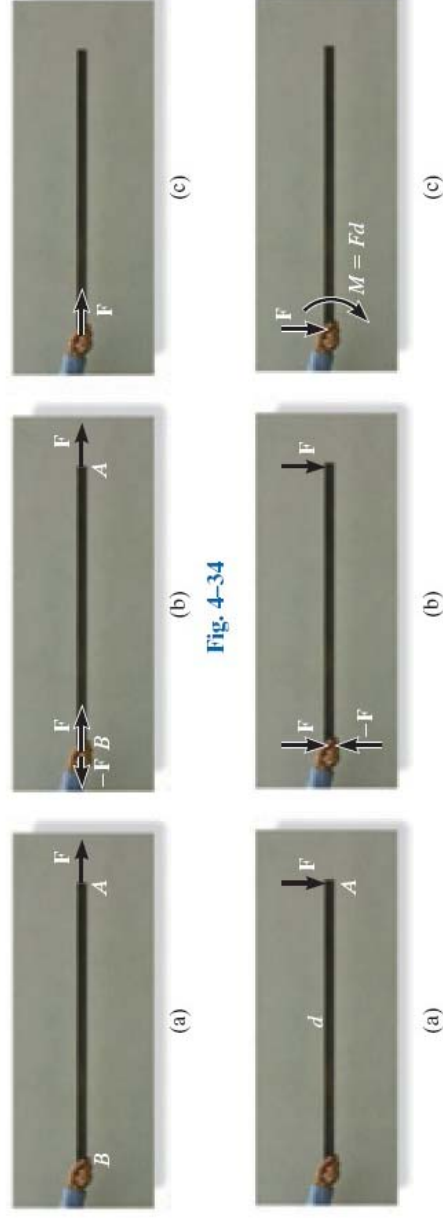
Aplicando la regla de la mano derecha, M actúa en la dirección $-j$

$$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\}\text{N}\cdot\text{cm}$$



4.7 Simplificación de sistema de fuerzas de fuerzas y pares

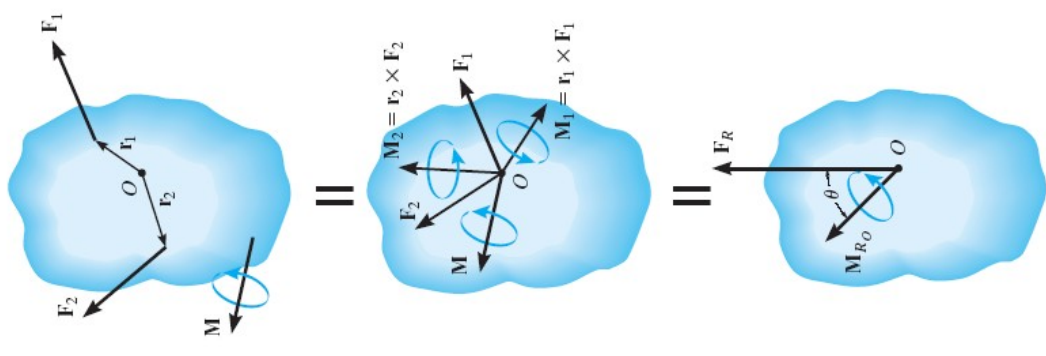
- Un sistema equivalente es aquel que causa los mismos efectos externos que los causados por el sistema de fuerzas y pares originales.
- Los efectos externos que causan un sistema son los movimientos de *traslación* y la *rotación* de un cuerpo.
- O se refieren a la fuerzas reactivas en los soportes si el cuerpo se mantiene fijo.



4.7 Simplificación de un sistema de fuerzas y pares

- La fuerza resultante actuando en el punto O y el momento del par resultante

$$F_R = \sum F$$
$$(M_{R/O}) = \sum M_O + \sum M$$



- Si las fuerzas están en el plano $x-y$ y los momentos de pares son perpendiculares a ese plano,

$$(F_{R/x}) = \sum F_x$$
$$(F_{R/y}) = \sum F_y$$
$$(M_{R/O}) = \sum M_O + \sum M$$

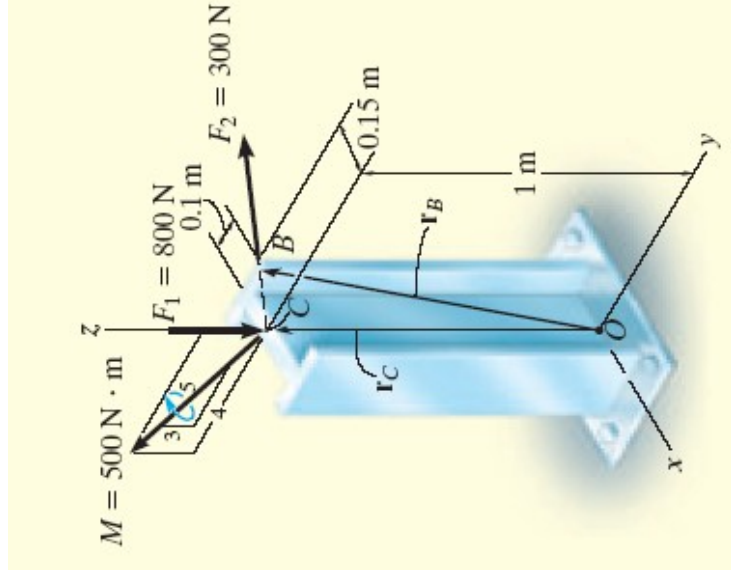
4.7 Simplificación de un sistema de fuerzas y pares

Procedimiento de análisis

1. Establecer los ejes de coordenadas con el origen en el punto O con una determinada orientación.
 2. Sumar las fuerzas.
 3. Sumar los momentos.
-

Ejemplo

Un miembro de una estructura está sujeto a un momento de par \mathbf{M} y a las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . Reemplace el sistema por uno equivalente de fuerza y momento de par actuando sobre su base en el punto O .



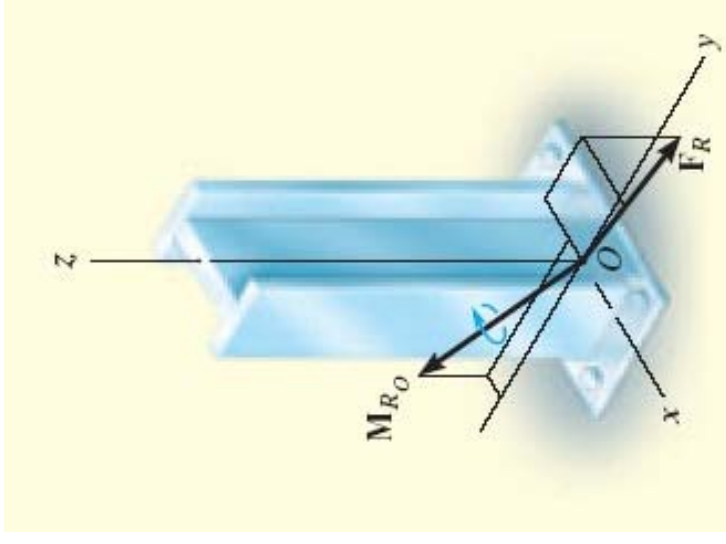
Solución

Expresamos las fuerzas y pares como vectores cartesianos.

$$\mathbf{F}_1 = -800 \text{ N } \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = 300 \text{ N } \mathbf{u}_{CB} = (-249.6 \text{ i} + 166.4 \text{ j}) \text{ N}$$

$$\mathbf{M} = -500 * 4/5 \text{ j} + 500 * 3/5 \text{ k} = (-400 \text{ j} + 300 \text{ k}) \text{ Nm}$$

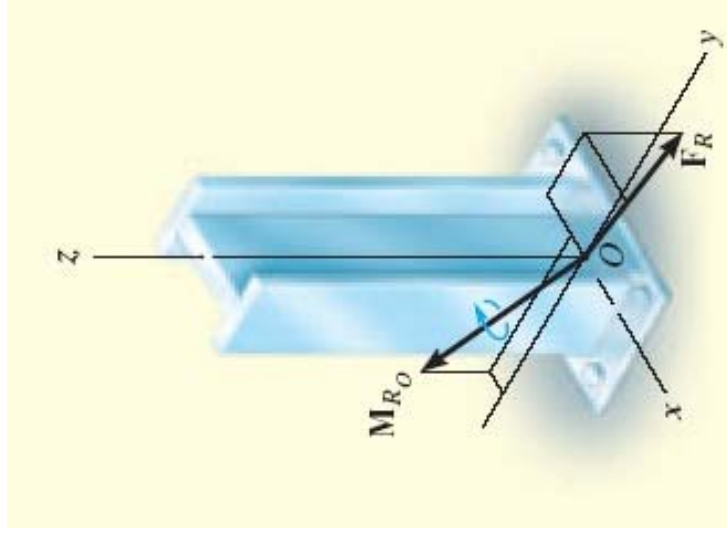


Solución

Suma de fuerzas y momentos.

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (-250 \mathbf{i} + 166 \mathbf{j} - 800 \mathbf{k}) \text{ N}$$

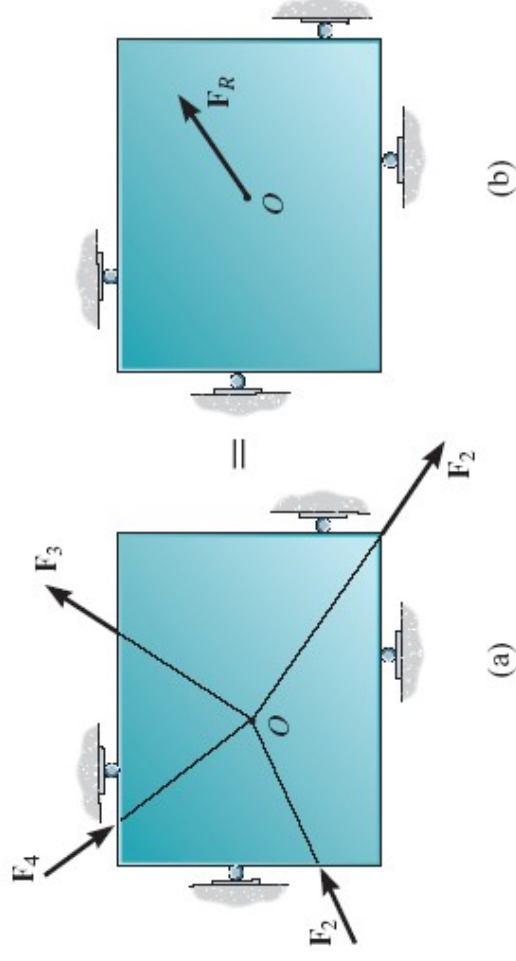
$$\mathbf{M}_{RO} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2 = (-166 \mathbf{i} - 650 \mathbf{j} + 300 \mathbf{k}) \text{ N.m}$$



4.8 Simplificaciones extras de un sistema

Sistema de fuerzas concurrentes

- Un sistema de fuerzas *concurrentes* es aquel en el que las líneas de acción de todas las fuerzas se intersectan en un punto común O .

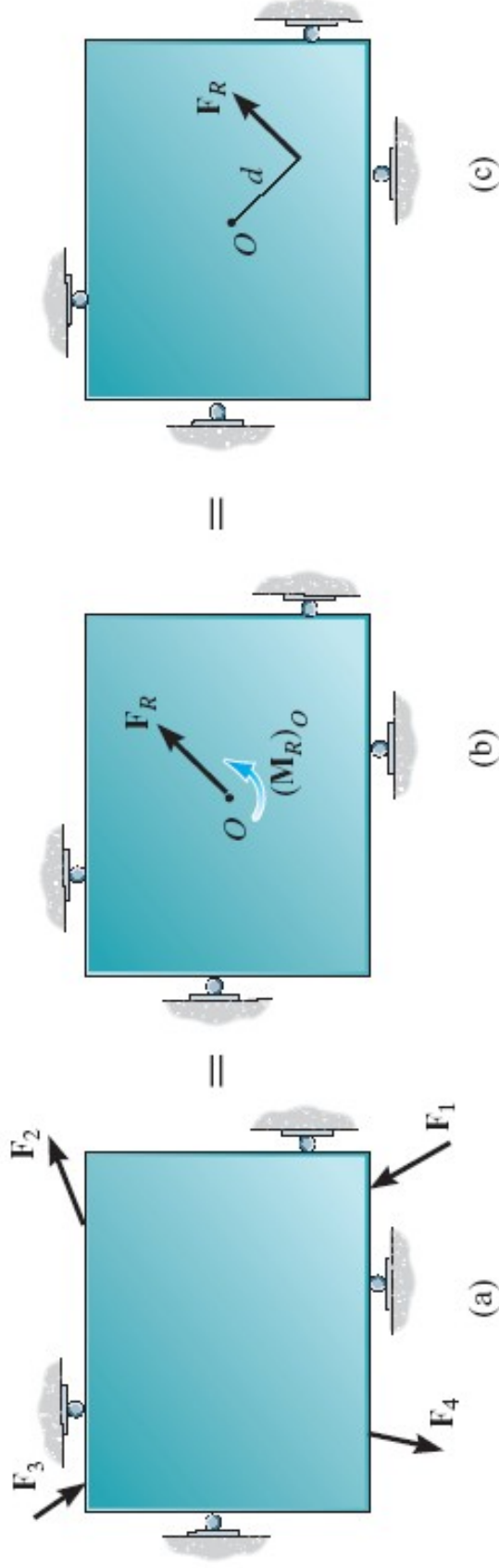


$$F_R = \sum F$$

4.8 Simplificaciones extras de un sistema

Sistema de fuerzas coplanares

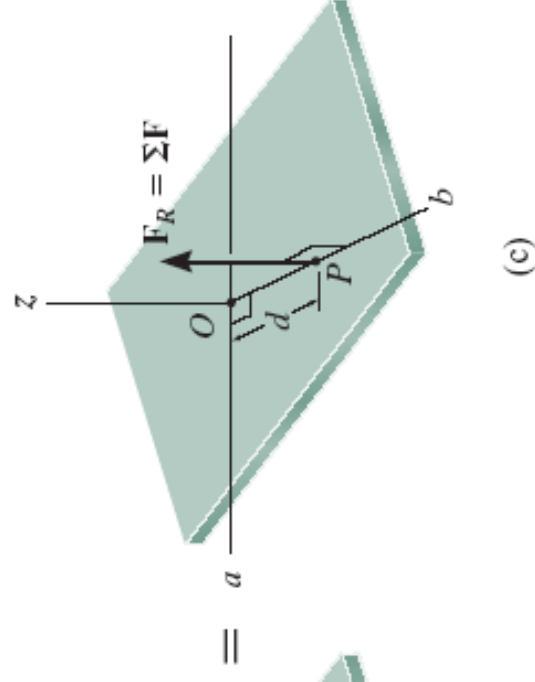
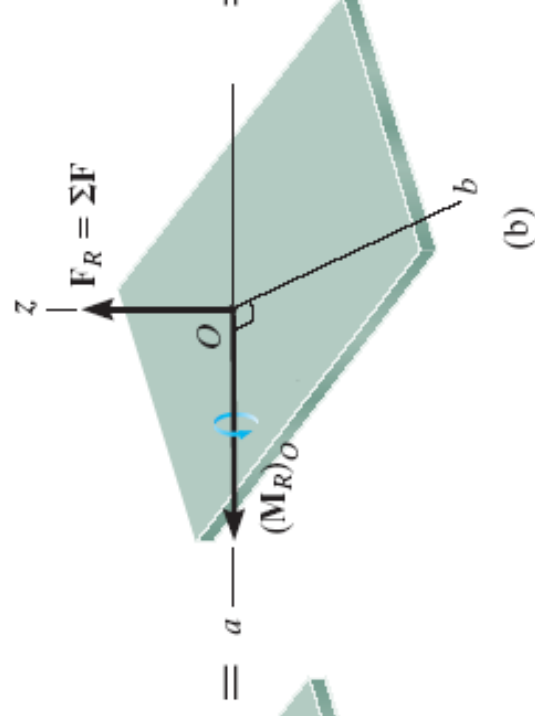
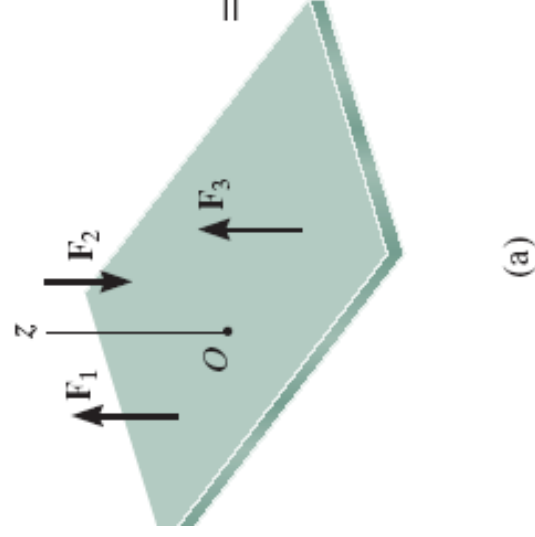
- Las líneas de acción de todas las fuerzas están en el mismo plano.
- La fuerza resultante del sistema también está en el mismo plano



4.8 Simplificaciones extras de un sistema

Sistema de fuerzas paralelas

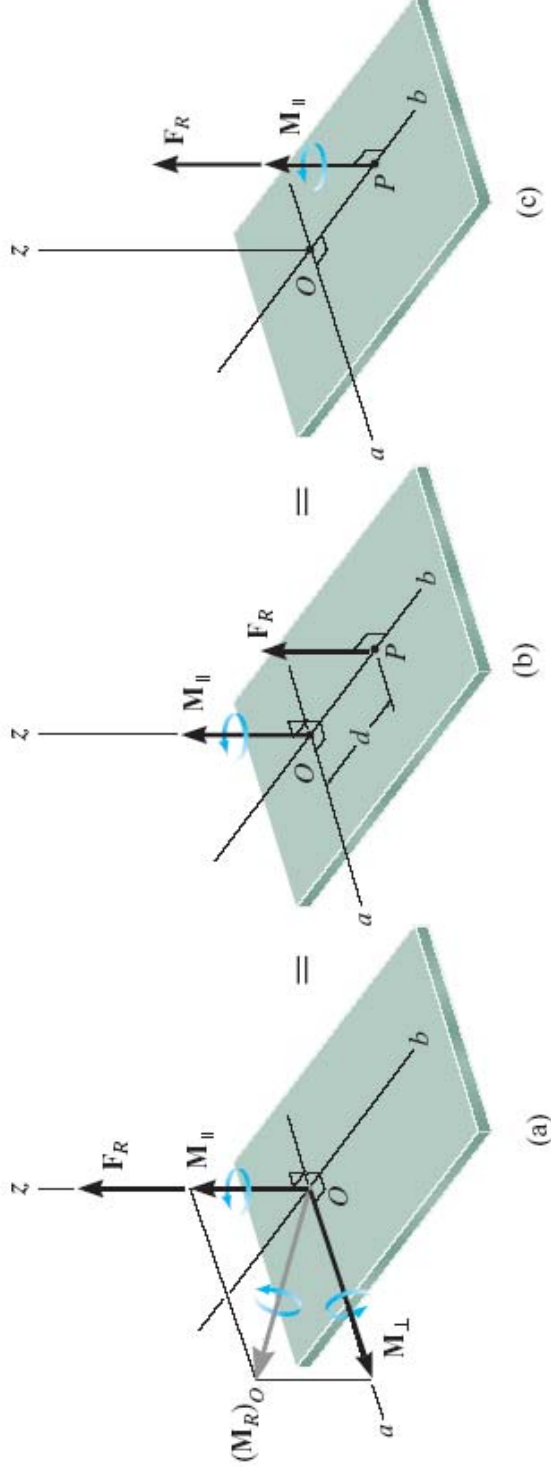
- Consiste en fuerzas que son todas paralelas a un eje, (ej al eje z).
- La fuerza resultante en el punto O debe de ser también paralela a este eje.



4.8 Simplificaciones extras de un sistema

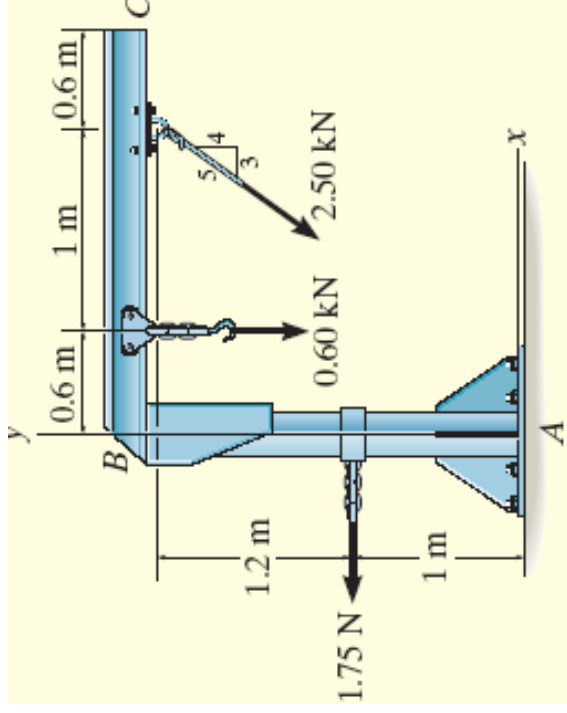
Reducción a un sistema tornillo

- Una fuerza 3-D y un momento de par en O tienen una fuerza resultante equivalente en P
- Y un momento resultante de par que es *paralelo* a la fuerza resultante.



Ejemplo

La grúa soporta tres fuerzas coplanares. Reemplace este sistema por una fuerza resultante equivalente y especifique en que punto su línea de acción intersecta la columna AB y el elemento BC.



Solución

Suma de fuerzas

$$+\rightarrow F_{Rx} = \Sigma F_x;$$

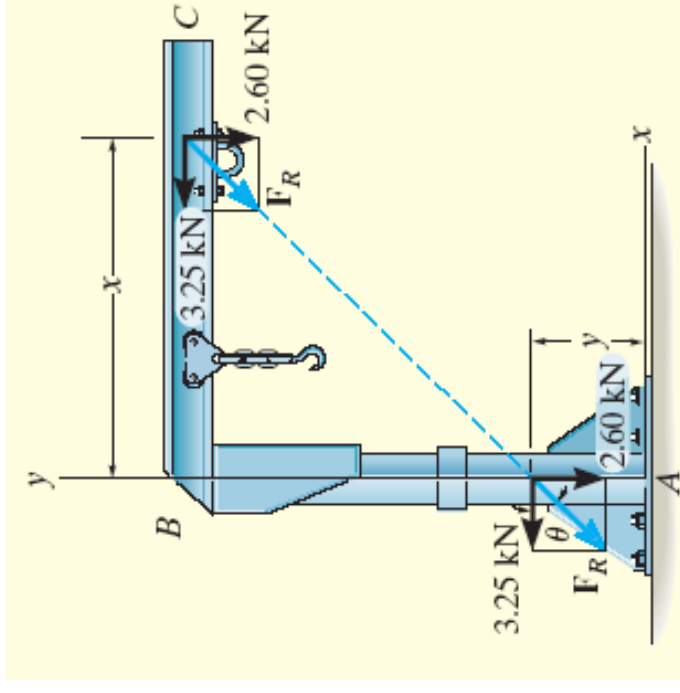
$$F_{Rx} = -2.5 \text{ kN} \left(\frac{3}{5} \right) - 1.75 \text{ kN}$$

$$-3.25 \text{ kN} = 3.25 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\rightarrow F_{Ry} = \Sigma F_y;$$

$$F_{Ry} = -2.5 \text{ N} \left(\frac{4}{5} \right) - 0.6 \text{ kN}$$

$$-2.60 \text{ kN} = 2.60 \text{ N} \downarrow$$



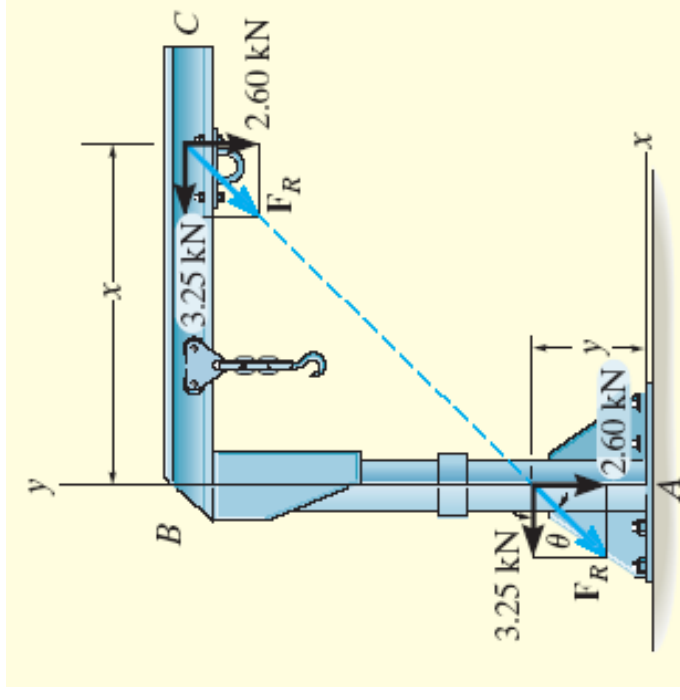
Solución

La magnitud de la fuerza resultante,

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = \sqrt{(3.25)^2 + (2.60)^2} \\ = 4.16 \text{ kN}$$

La dirección de la fuerza resultante,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2.60}{3.25} \right) \\ = 38.7^\circ$$

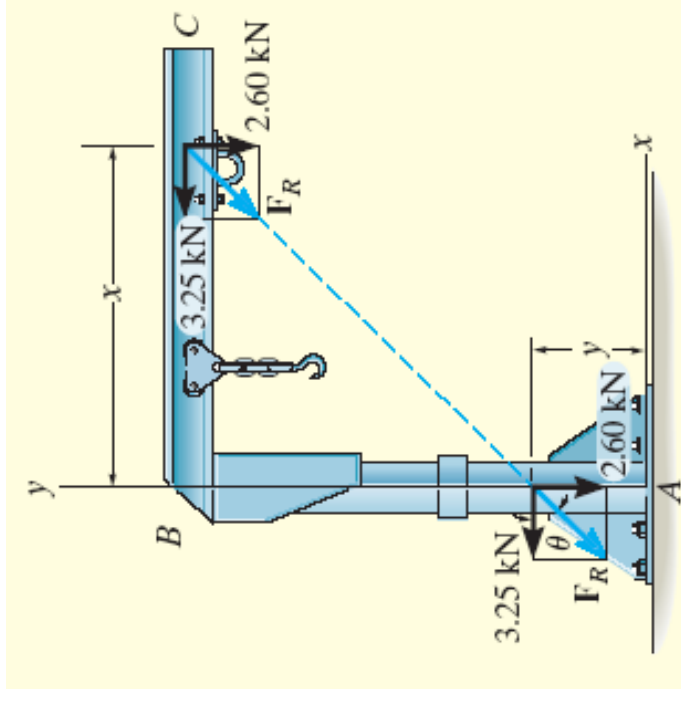


Solución

Suma de momentos

→ Suma de momentos respecto al punto A,

$$\begin{aligned} M_{RA} &= \Sigma M_A; \\ 3.25 \text{ kN} (y) + 2.60 \text{ kN} (0) \\ &= 1.75 \text{ kN} (1\text{m}) - 0.6 \text{ kN} (0.6\text{m}) \\ &\quad + 2.50 \text{ kN} \left(\frac{3}{5} \right) (2.2\text{m}) - 2.50 \text{ kN} \left(\frac{4}{5} \right) (1.6\text{m}) \\ y &= 0.458 \text{ m} \end{aligned}$$

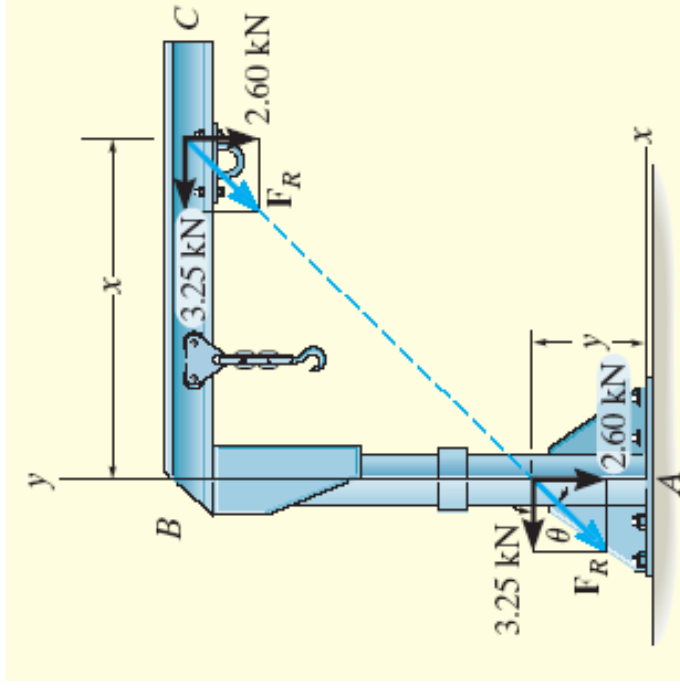


Solución

Suma de momentos

→ Principio de Transmisibilidad

$$\begin{aligned}M_{RA} &= \Sigma M_A; \\3.25 \text{ kN} (2.2\text{m}) - 2.60 \text{ kN} (x) \\&= 1.75 \text{ kN} (1\text{m}) - 0.6 \text{ kN} (0.6\text{m}) \\&\quad + 2.50 \text{ kN} \left(\frac{3}{5}\right) (2.2\text{m}) - 2.50 \text{ kN} \left(\frac{4}{5}\right) (1.6\text{m}) \\x &= 2.177 \text{ m}\end{aligned}$$

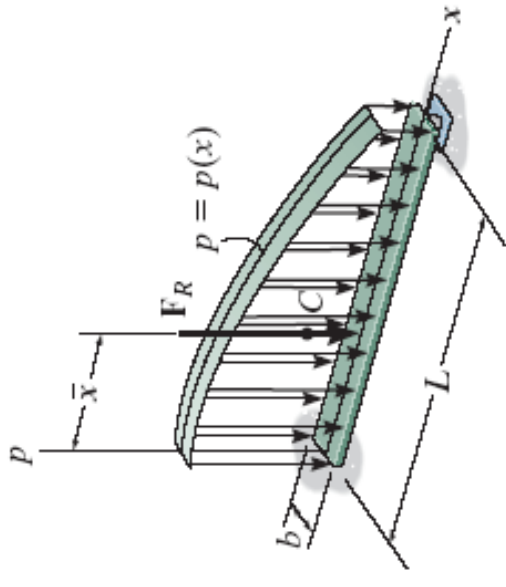


4.9 Reducción de una carga simplemente distribuida

- Una superficie grande de un cuerpo puede estar sujeta a una carga distribuida.
- Las cargas sobre la superficie se definen como una presión.
- La Presión se mide en Pascales (Pa): $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Carga uniforme a lo largo de un

- El tipo más común de carga distribuida suele ser uniforme a lo largo de un eje (ejemplo y).



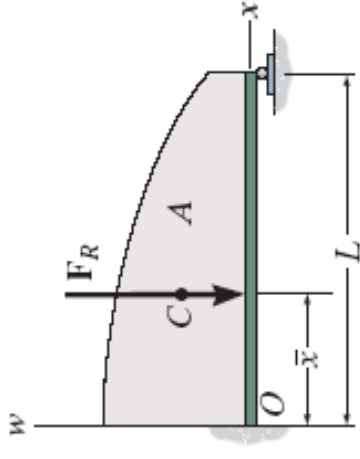
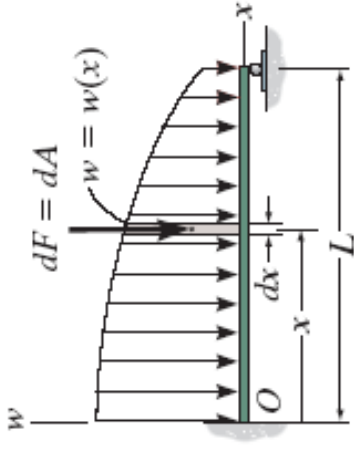
4.9 Reduccion de una carga simplemente distribuida

Magnitud de la fuerza reultante

- La magnitud de dF está determinada por el elemento de área de la función .
- Para la longitud L ,

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

- *La magnitud de la fuerza resultante es igual al área total del diagrama de cargas.*



4.9 Reducción de una carga simplemente distribuida

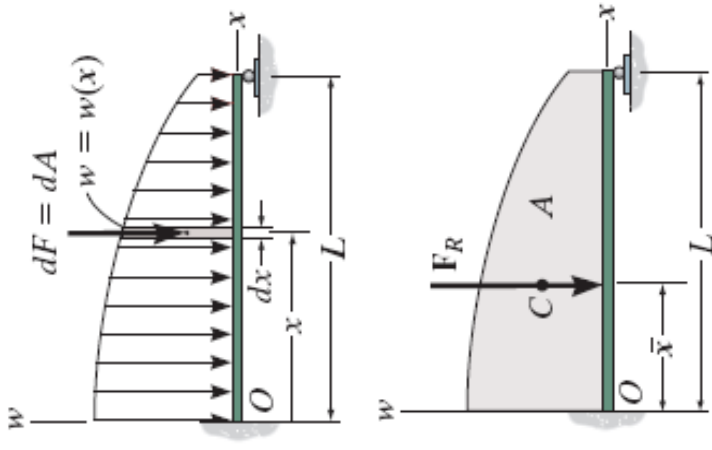
Localización de la fuerza resultante

- $M_R = \Sigma M_0$
- dF produce un momento $x dF = x w(x) dx$ respecto a O
- Para todo el elemento,

$$M_{RO} = \Sigma M_0 \quad \bar{x} F_R = \int_0^L x w(x) dx$$

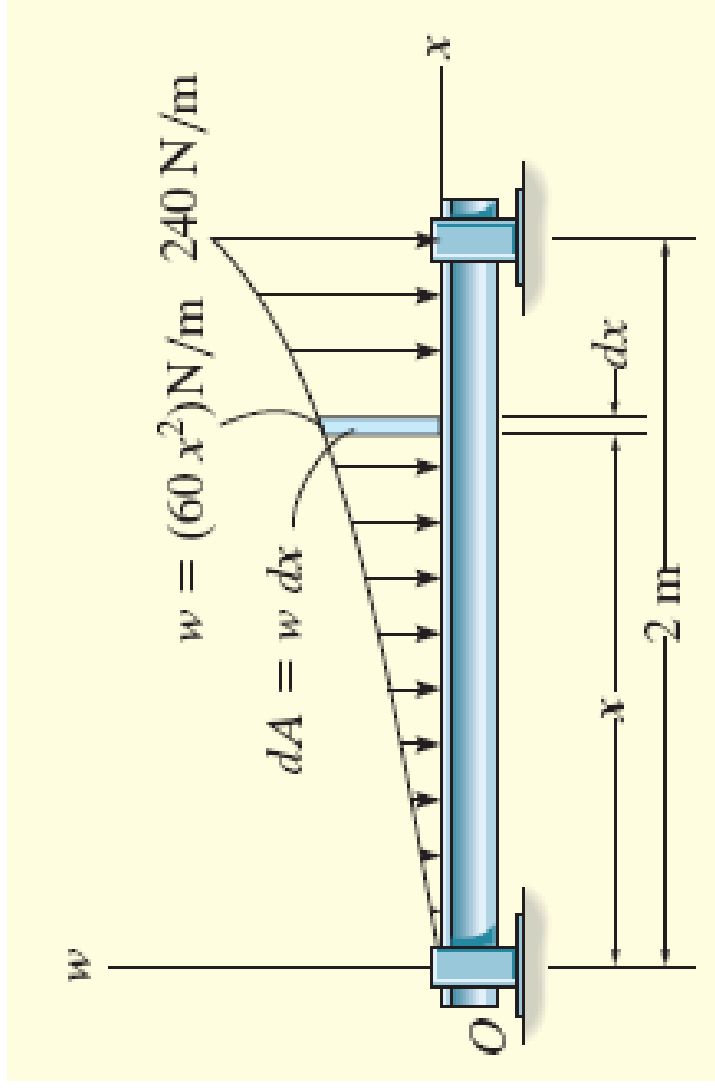
- Y resolviendo,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x w(x) dx}{\int_0^L w(x) dx} = \frac{\int_0^L x dA}{\int_0^L dA}$$



Ejemplo

Determine la magnitud y localización de la fuerza resultante equivalente que actúa sobre la estructura y su localización sobre ella.



Solución

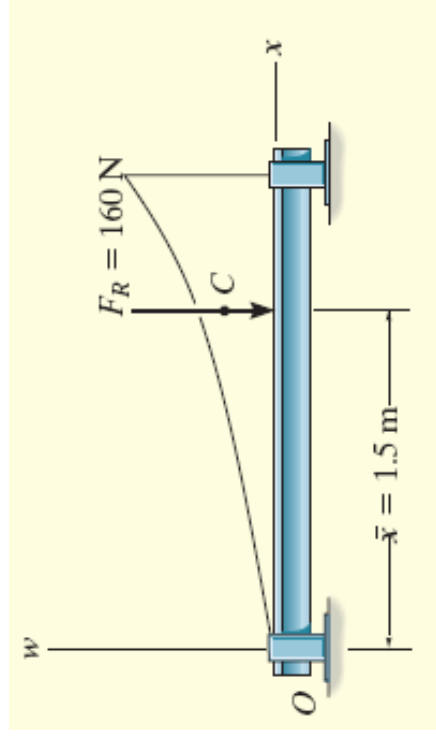
Para el elemento de área sombreada,

$$dA = w dx = 60 x^2 dx$$

La fuerza resultante

$$F_R = \Sigma F;$$

$$\begin{aligned} F_R &= \int_A dA = \int_0^2 60 x^2 dx \\ &= 60 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 60 \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] \\ &= 160 \text{ N} \end{aligned}$$



Solución

Para localizar la línea de acción,

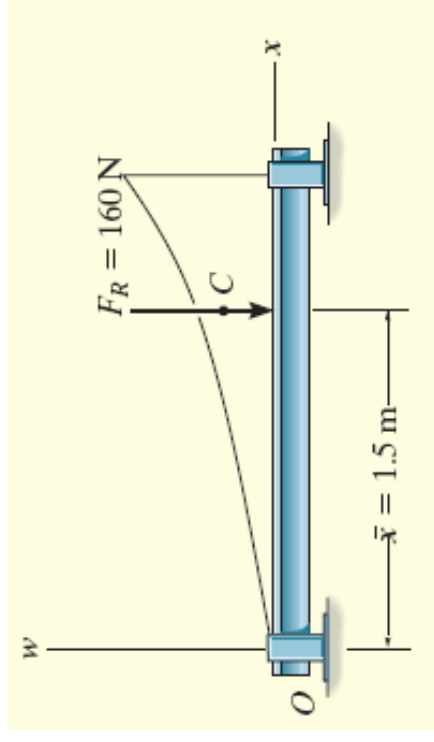
$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2 x (60x^2) dx}{160} = \frac{60 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2}{160} = \frac{60 \left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right]}{160}$$

1.5m

Comprobación,

$$A = \frac{ab}{3} = \frac{2\text{m} (240 \text{ N/m})}{3} = 160$$

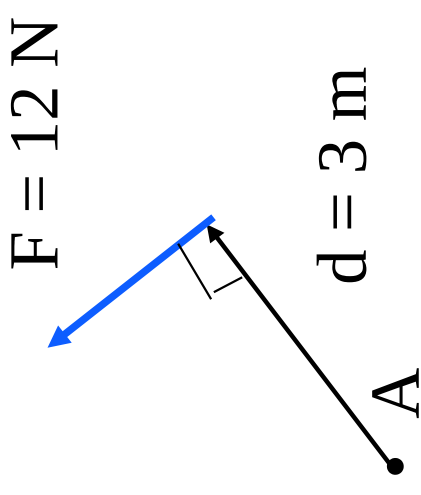
$$\bar{x} = \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} (2\text{m}) = 1.5\text{m}$$



QUIZ

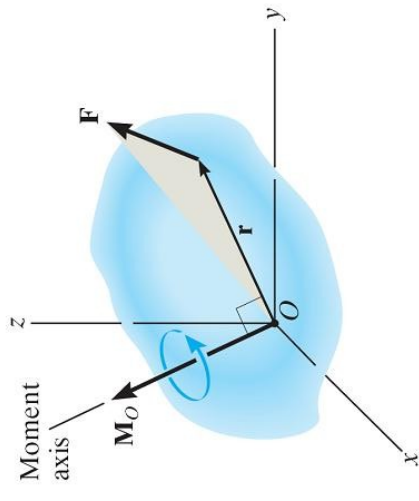
1. ¿Cuál es el momento de la fuerza de 10 N respecto al punto A, esto es M_A ?

- A) 3 N·m B) 36 N·m C) 12 N·m
D) $(12/3)$ N·m E) 7 N·m



2. El momento de la fuerza F respecto al punto O se define como _____.

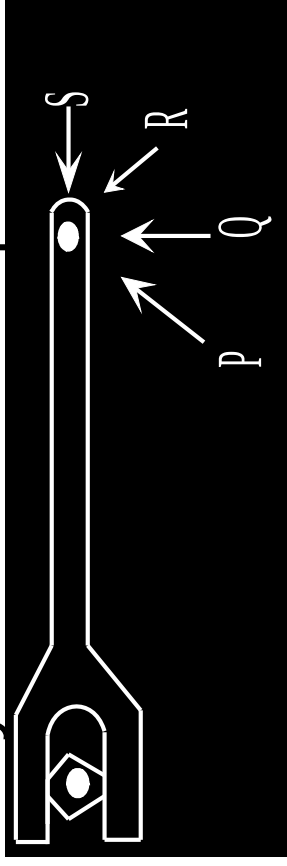
- A) $r \times F$ B) $F \times r$
C) $r \cdot F$ D) $r * F$



QUIZ

3. Si una fuerza de magnitud F puede aplicarse en 4 configuraciones 2-D (P, Q, R, & S). Seleccione los casos que resultan el máximo y el mínimo torque.

- A) (Q, P) B) (R, S)
C) (P, R) D) (Q, S)



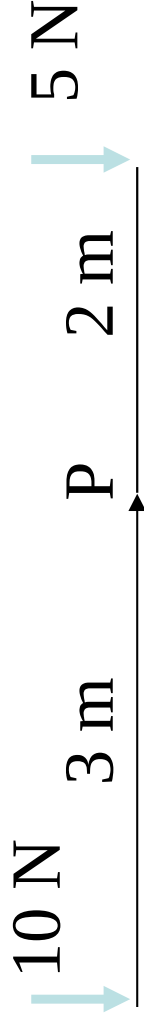
4. Si $M = r \times F$, ¿cuál será entonces el valor de $M \cdot r$?

- A) 0 B) 1
C) r^2F D) Ninguna de la respuestas.

QUIZ

5. Usando la dirección horaria como positiva, el momento neto de las dos fuerzas respecto al punto P es

- A) $10 \text{ N} \cdot \text{m}$ B) $20 \text{ N} \cdot \text{m}$ C) $-20 \text{ N} \cdot \text{m}$
D) $40 \text{ N} \cdot \text{m}$ E) $-40 \text{ N} \cdot \text{m}$



6. Si $\mathbf{r} = \{5\mathbf{j}\} \text{ m}$ and $\mathbf{F} = \{10\mathbf{k}\} \text{ N}$, el momento $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es igual a { _____ } $\text{N} \cdot \text{m}$.

- A) $50\mathbf{i}$ B) $50\mathbf{j}$ C) $-50\mathbf{i}$
D) $-50\mathbf{j}$ E) 0

QUIZ

7. Cuando se determina el momento de una fuerza respecto a un eje específico, el eje debe estar a lo largo de _____.
- A) el eje x B) el eje y C) el eje z
D) cualquier línea en el espacio E) cualquier línea en el plano x-y
8. El triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ resulta
- A) Una cantidad escalar (+ or -)
B) Una cantidad vectorial
C) Cero
D) Un vector unitario
E) Una cantidad imaginaria

QUIZ

9. La operación de vectores $(P \times Q) \cdot R$ es igual

A) $P \times (Q \cdot R)$.

B) $R \cdot (P \times Q)$.

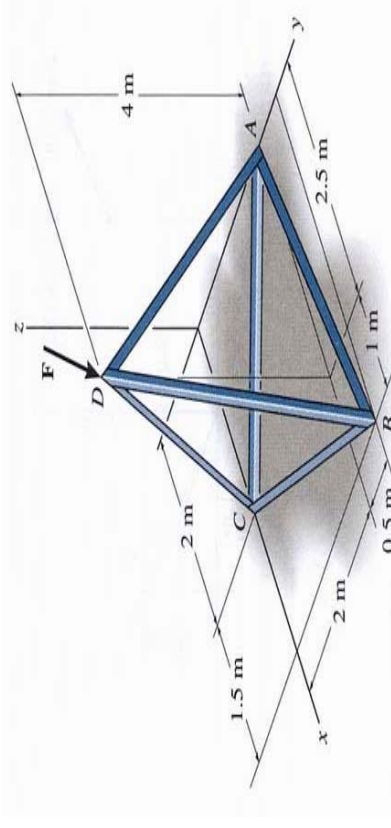
C) $(P \cdot R) \times (Q \cdot R)$.

D) $(P \times R) \cdot (Q \times R)$.

10. La fuerza F actúa a lo largo de DC. Usando el producto triple para determinar el momento de F sobre la barra BA, se puede usar cualquier vector posición excepto

A) r_{BC} B) r_{AD} C) r_{AC}

D) r_{DC} E) r_{BD}



QUIZ

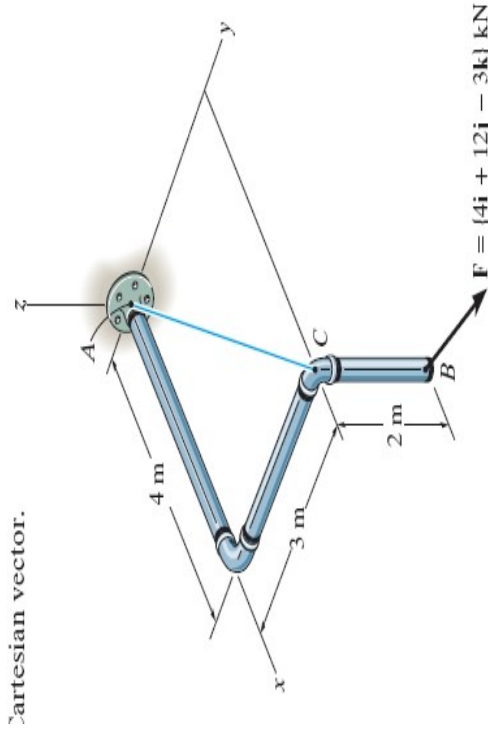
11. Para encontrar el momento de la fuerza F respecto al eje x , el vector posición en el producto triple escalar debería ser el vector _____.

A) r_{AC}

B) r_{BA}

C) r_{AB}

D) r_{BC}



12. Si $r = \{1i + 2j\}$ m y $F = \{10i + 20j + 30k\}$ N, entonces el momento de F respecto al eje y es _____ N·m.

A) 10

B) -30

C) -40

D) Ninguna respuesta es correcta

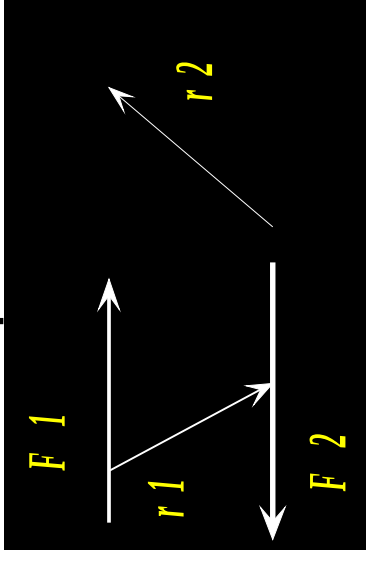
QUIZ

13. En estática, un par es definido como _____ separados por una distancia perpendicular.
- A) dos fuerza en la misma dirección
 - B) dos fuerzas de igual magnitud
 - C) dos fuerzas de igual magnitud actuando en la misma dirección
 - D) dos fuerzas de igual magnitud actuando en sentidos opuestos
14. El momento de un par es un vector _____.
- A) libre
 - B) fijo respecto a un punto
 - C) romántico
 - D) deslizando

QUIZ

15. F_1 y F_2 forman un par. El momento del par viene dado por _____.

- A) $r_1 \times F_1$
- B) $r_2 \times F_1$**
- C) $F_2 \times r_1$
- D) $r_2 \times F_2$



16. Si tres pares actúan sobre un cuerpo, el resultado en la mayoría de las veces es que

- A) la fuerza neta no es 0.
- B) la fuerza neta y el momento neto son 0.
- C) El momento neto es igual a cero pero la fuerza neta no es necesariamente igual a 0.
- D) La fuerza neta es igual a cero pero el momento neto no es necesariamente igual a 0.**

QUIZ

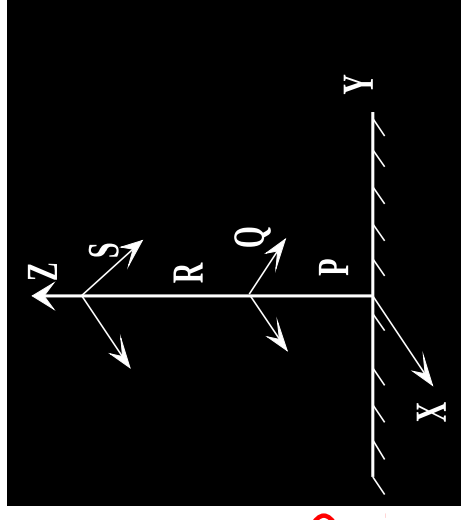
17. Un sistema general de fuerzas y momentos de pares actuando sobre un cuerpo rígido puede reducirse a ___
- A) una única fuerza.
 - B) a un único momento.
 - C) a una fuerza y a dos momentos.
 - D) a una fuerza y a un único momento.
18. La fuerza y el momento de par originales de un sistema y uno equivalente tienen el mismo efecto ___ sobre un cuerpo.
- A) interno
 - B) externo
 - C) interno y externo
 - D) microscópico

QUIZ

18. Las fuerzas sobre el poste pueden reducirse a una única fuerza y a un único momento en el punto ____.

A) P B) Q C) R

D) S E) en cualquiera de esos puntos



19. Considere dos pares de fuerzas actuando sobre un cuerpo. El sistema equivalente más simple posible en cualquier punto del cuerpo tendrá

A) una fuerza y un momento de par.

B) una fuerza.

C) un momento de par.

D) dos momentos de par.

QUIZ

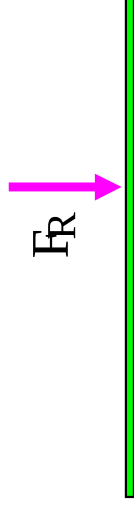
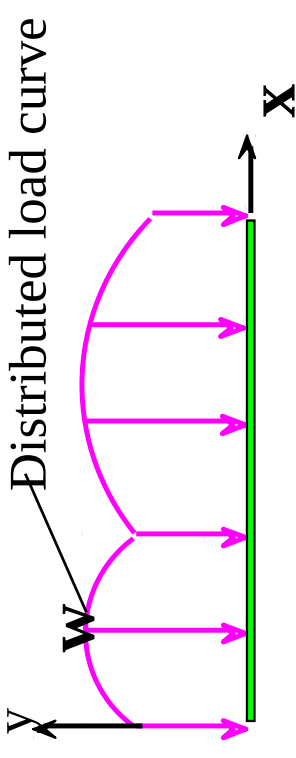
20. Considere tres pares actuando sobre un cuerpo. Los sistemas equivalentes serán _____ en diferentes puntos del cuerpo.

- A) diferentes cuando se localicen
- B) los mismos incluso cuando se localicen
- C) cero cuando se localicen
- D) ninguna respuesta es correcta

QUIZ

21. La fuerza resultante (F_R) debida a una carga distribuida es equivalente a _____ bajo la curva de carga distribuida dada por $w = w(x)$.

- A) el centroide
- B) la longitud de arco Arc length
- C) el área
- D) el volumen



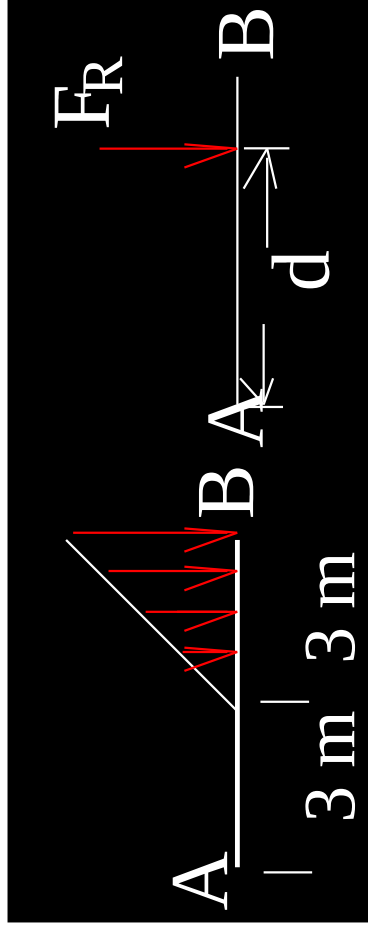
22. La línea de acción de la fuerza resultante de la carga distribuida para a través de _____ de la carga.

- A) el centroide
- B) el punto medio
- C) el extremo izquierdo
- D) el extremo derecho

QUIZ

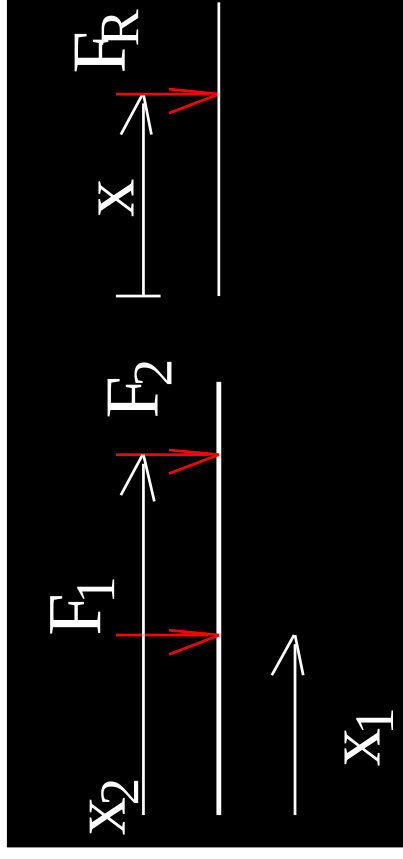
23. ¿Cuál es la localización de F_R , i.e. la distancia d ?

- A) 2 m B) 3 m C) 4 m
D) 5 m E) 6 m



24. Si $F_1 = 1 \text{ N}$, $x_1 = 1 \text{ m}$, $F_2 = 2 \text{ N}$, $x_2 = 2 \text{ m}$, ¿cuál es la localización de F_R , i.e. la distancia x ?

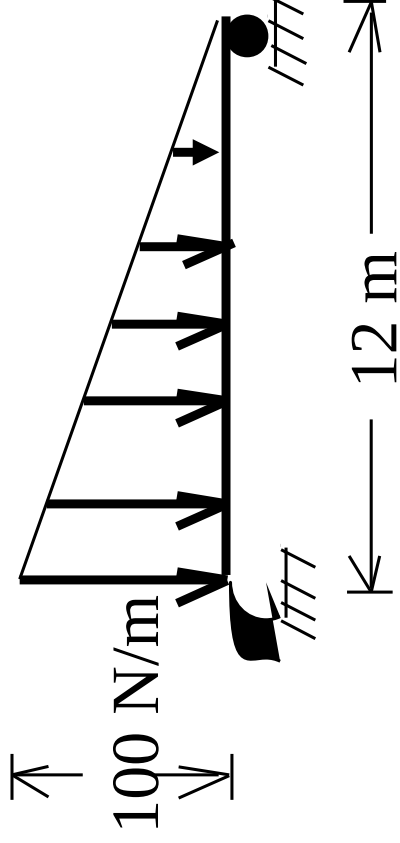
- A) 1 m B) 1.33 m C) 1.5 m
D) 1.67 m E) 2 m



QUIZ

25. $F_R =$ _____

- A) 12 N
- B) 100 N
- C) 600 N
- D) 1200 N



26. $x =$ _____.

- A) 3 m
- B) 4 m
- C) 6 m
- D) 8 m

