

Estática

6

Análisis Estructural



Objetivos

- Determinar las fuerzas en los miembros de una estructura usando el método de uniones y secciones.
 - Analizar las fuerzas que actúan en los miembros de armazones y bastidores compuestos de miembros conectados.
-

Índice

1. Estructuras simples
 2. El método de uniones
 3. Miembros nulo de fuerzas
 4. El método de las secciones
 5. Estructuras espaciales
 6. Armazones, bastidores y máquinas
-

6.1 Estructuras simples

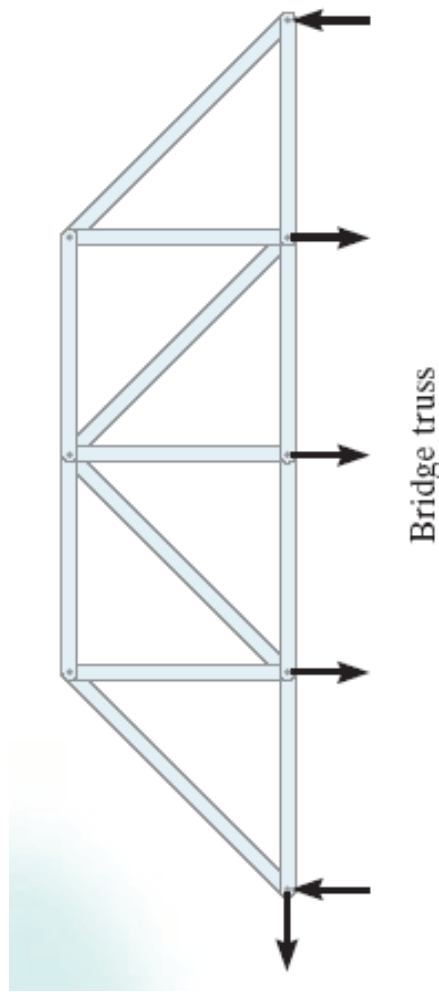
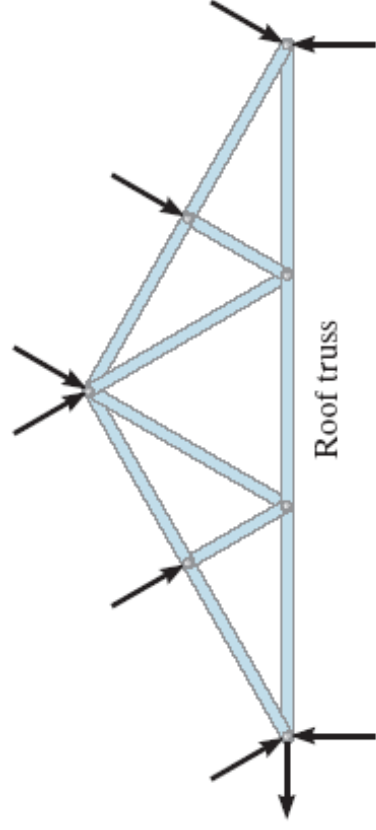
- Una estructura está compuesta de elementos delgados unidos entre sí por sus extremos. Ex: A
- ## Estructuras planas
- Se usan para soportar techos y puentes
 - La carga del techo se transmite a la estructura por una serie de tirantes o *purlins* (ganchos de vigueta, carril cruzado, correa)



6.1 Estructuras simples

Estructuras Planas

- El análisis de las fuerzas en los miembros es 2D
- Similar a las estructuras de los techos, la de los puentes también es coplanar

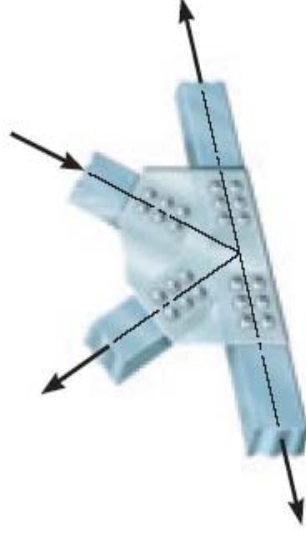


6.1 Estructuras simples

Hipótesis de diseño

- “Las cargas se aplican en las uniones”
 - Se desprecia el peso de cada miembro
- “Los miembros están unidos por pasadores sin rozamiento”
 - Se asume que en las conexiones, las líneas centrales de los miembros son *concurrentes*

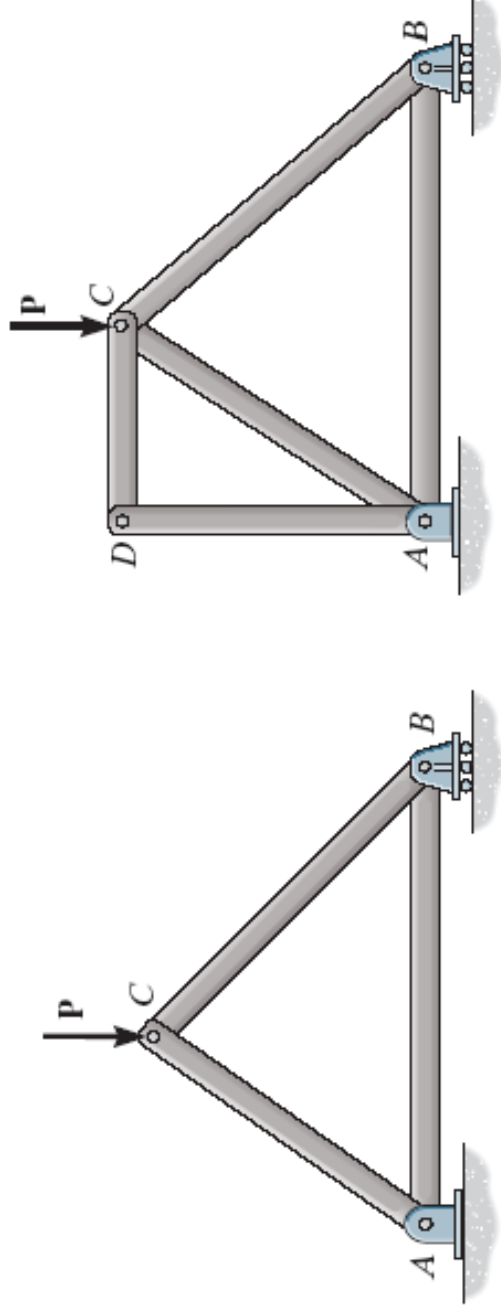
Consecuencia: cada miembro es de 2 fuerzas.



6.1 Estructuras Simples

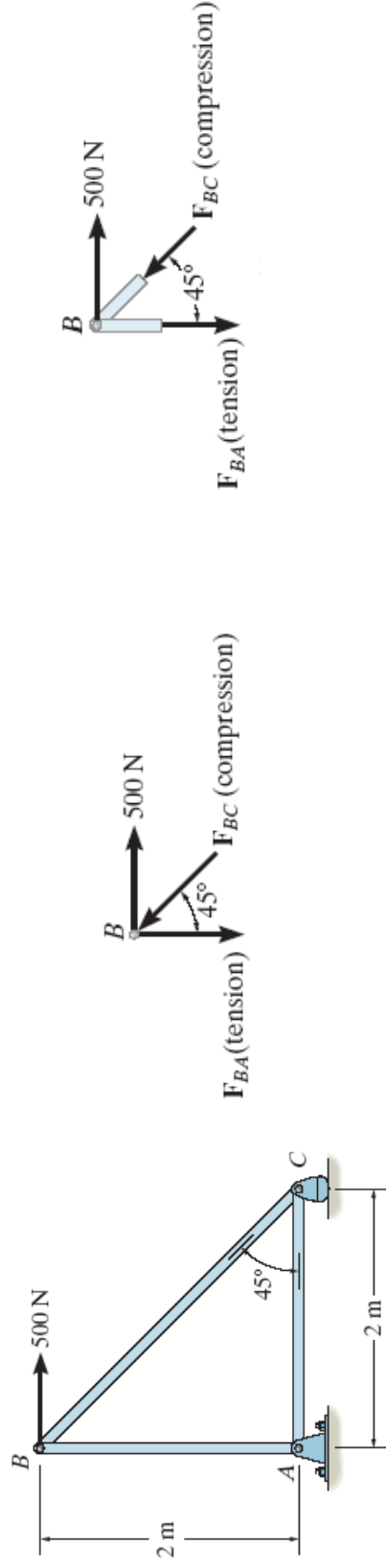
Estructura Simple

- La forma de una estructura debe de ser rígida, para prevenir el colapso.
- La forma más simple rígida (estable) es un triángulo
- Una estructura simple estará formada por triángulos.



6.2 El método de las uniones

- Para determinar las fuerzas en cada miembro
- Si la estructura está en equilibrio, las uniones también
 - DCL de las uniones
 - El sistema de fuerzas actuando en cada unión es *coplanar y concurrente*
 - $\sum F_x = 0$ and $\sum F_y = 0$ deben de satisfacerse en el equil



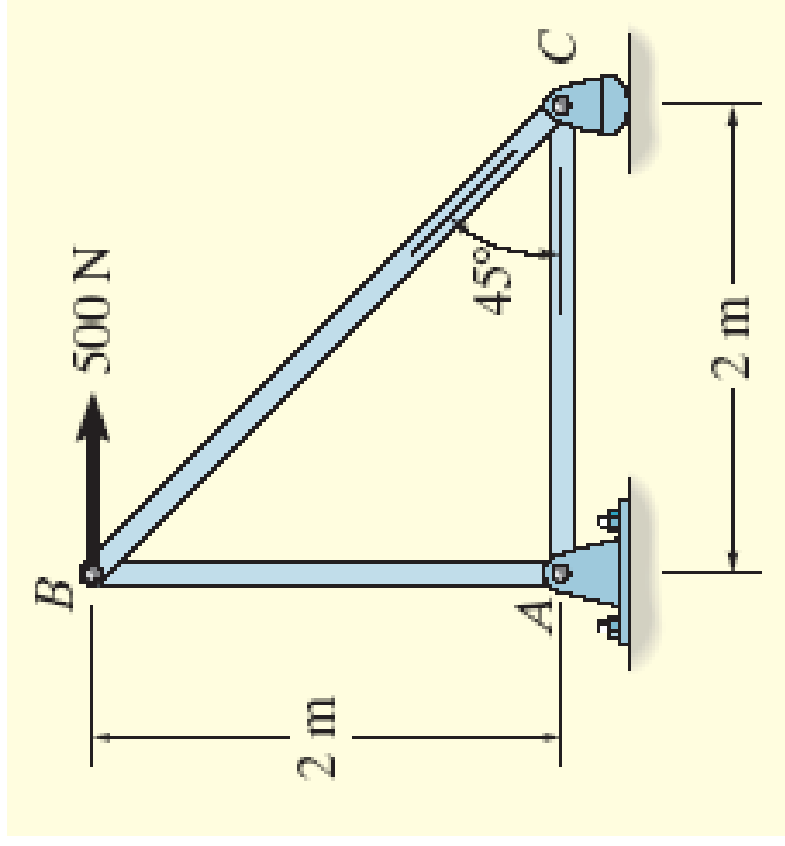
6.2 El método de las uniones

Procedimiento de análisis

- DCL de una unión con al menos 1 fuerza conocida y como máximo 2 desconocidas
- Si la unión es un soporte, encontrar las reacciones externas aplicadas al soporte
- Determinar el sentido correcto de las fuerzas
- Orientar de manera adecuada los ejes x, y
- Aplicar $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$
- Usando la solución, continuar con otras uniones para determinar todas las fuerzas

Ejemplo

Determine la fuerza sobre cada miembro de la estructura e indique si los miembros están en tensión o compresión.



Solución

- 2 fuerzas desconocidas y 1 conocida en B
- 1 fuerza de reacción desconocida en C y dos fuerzas de miembros
- 2 fuerzas de miembros y 2 externas de reacción A desconocidas

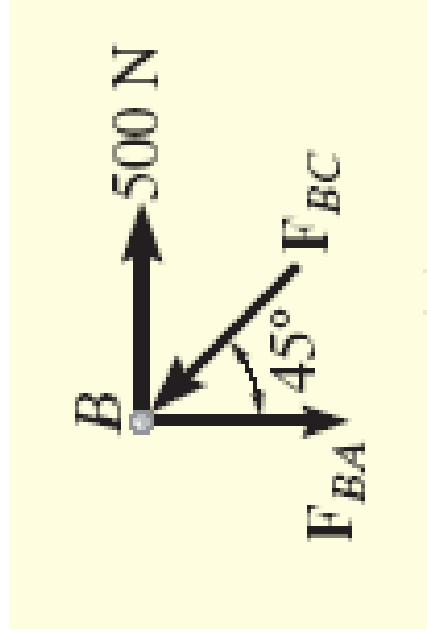
Para la unión B,

$$+\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$500 \text{ N} - F_{BC} \sin 45^\circ \text{ N} = 0 \Rightarrow F_{BC} = 707.1 \text{ N} (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$F_{BC} \cos 45^\circ \text{ N} - F_{BA} = 0 \Rightarrow F_{BA} = 500 \text{ N} (T)$$



Solution

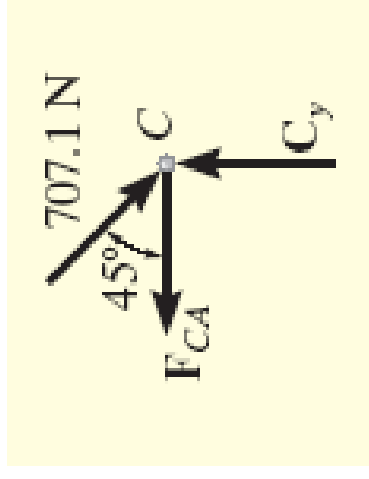
Para la unión C,

$$+\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$-F_{CA} + 707.1 \cos 45^\circ N = 0 \Rightarrow F_{CA} = 500 N (T)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$C_y - 707.1 \sin 45^\circ N = 0 \Rightarrow C_y = 500 N$$



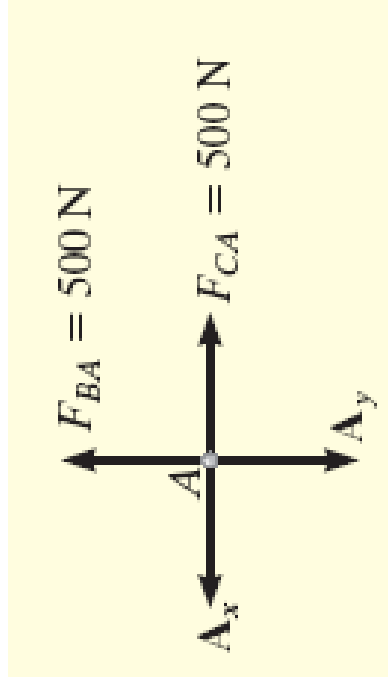
Para la unión A,

$$+\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$500 N - A_x = 0 \Rightarrow A_x = 500 N$$

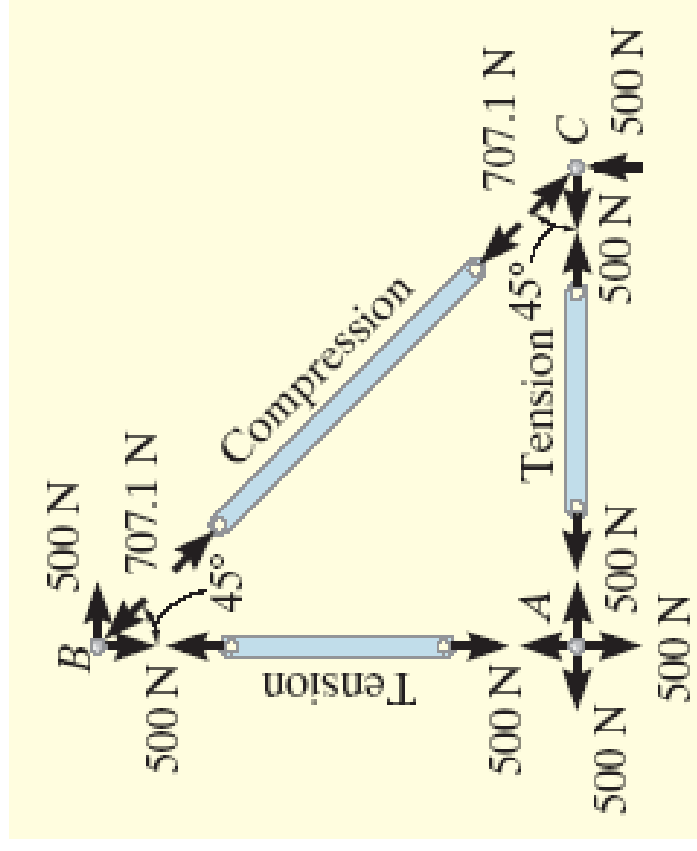
$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$500 N - A_y = 0 \Rightarrow A_y = 500 N$$



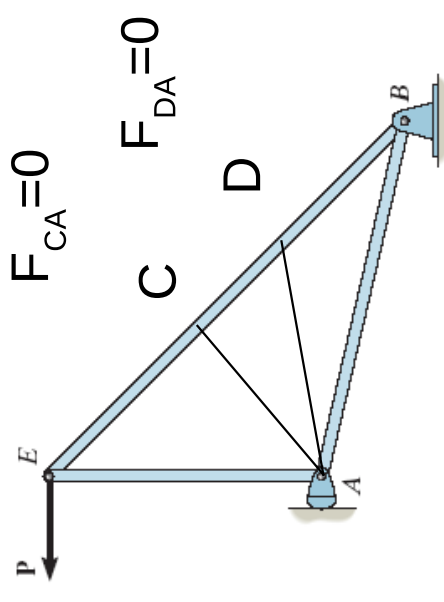
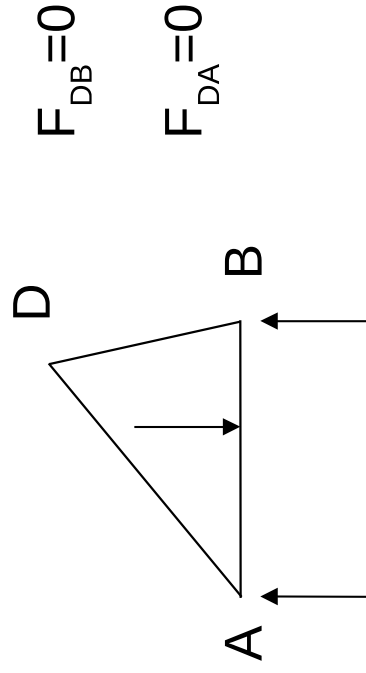
Solución

- DCL de cada unión muestra los efectos de todos los miembros conectados y todas las fuerzas externas aplicadas a cada unión
- DCL de cada miembro muestra solo el efecto de las uniones en cada miembro



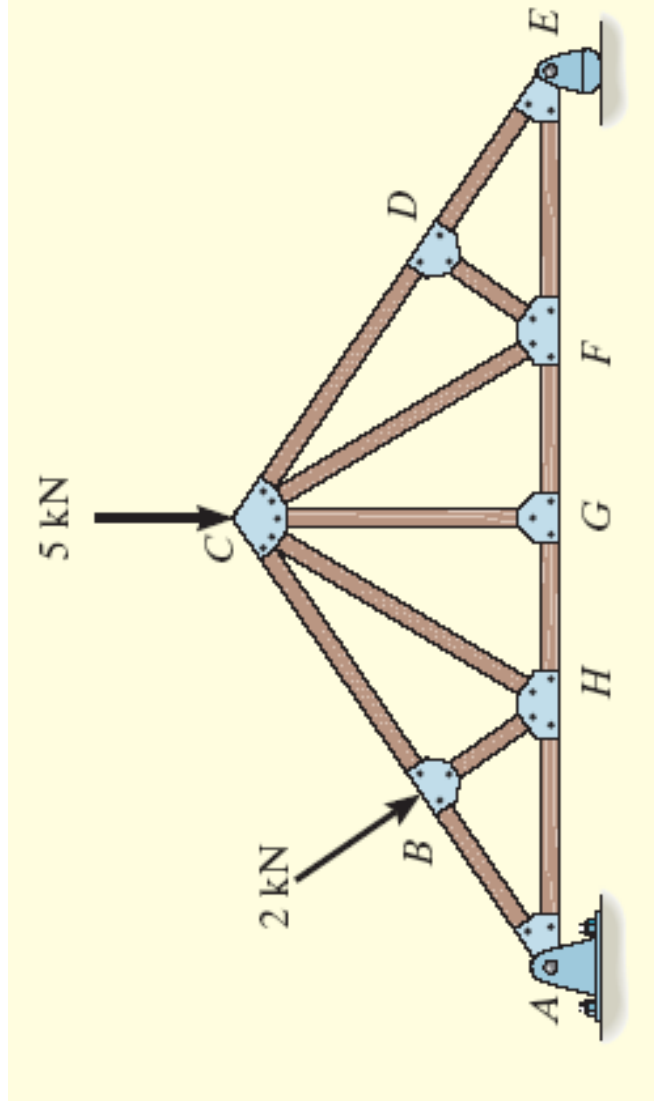
6.3 Miembros de fuerza nula

- El método de las uniones se simplifica si podemos identificar primero los miembros de fuerza nula
- Son los miembros que no soportan carga
- Cuando 3 miembros forman una unión, si dos son colineales, el tercero es un miembro de fuerza nula siempre que ninguna fuerza externa o reacción de un soporte sea aplicada a la unión



Ejemplo

Usando el método de las uniones, determine los miembros de fuerza nula de la estructura de techo finlandés. Asuma que todas la uniones están conectadas de manera simple

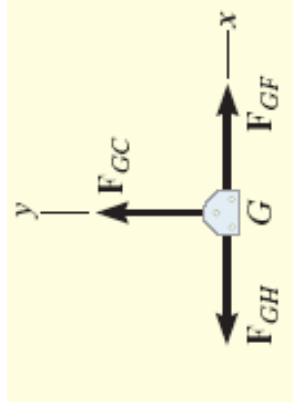


Solución

Para la unión G,

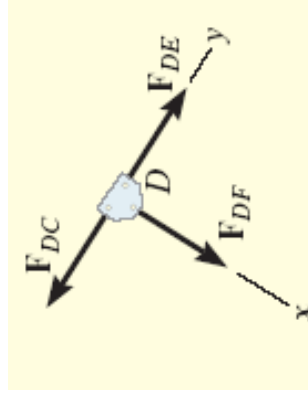
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{GC} = 0$$

GC es un miembro de fuerza nula.



Para la unión D,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DF} = 0$$

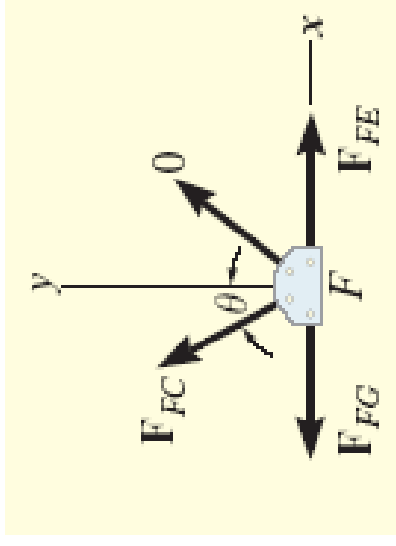


Solution

Para la unión F,

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FC} \cos \theta = 0$$

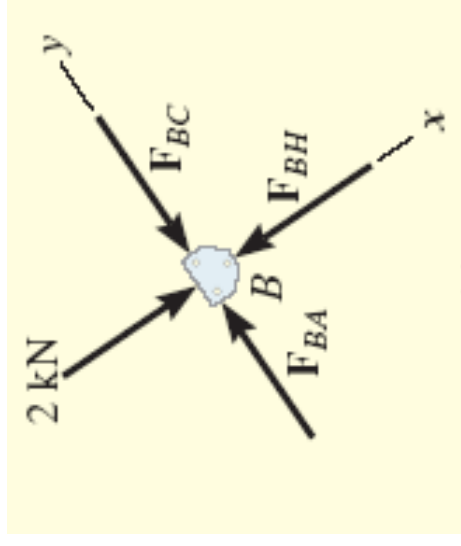
$$\theta \neq 90^\circ, F_{FC} = 0$$



Para la unión B,

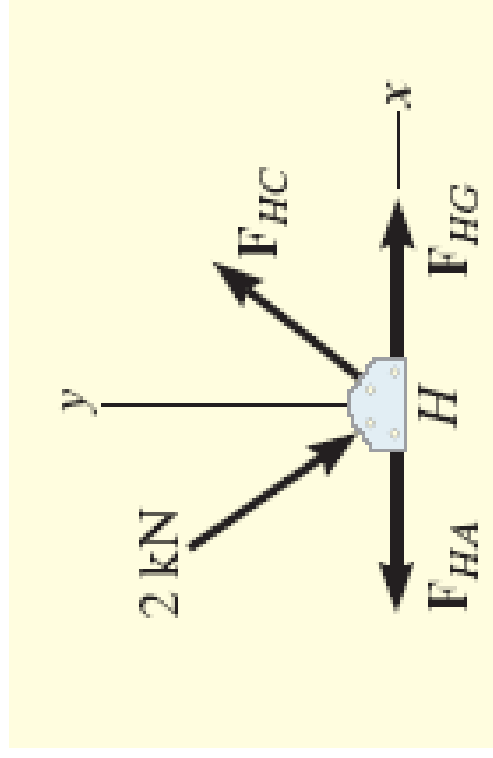
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \cos \theta = 0$$

$$\theta \neq 90^\circ, F_{BC} = 0$$



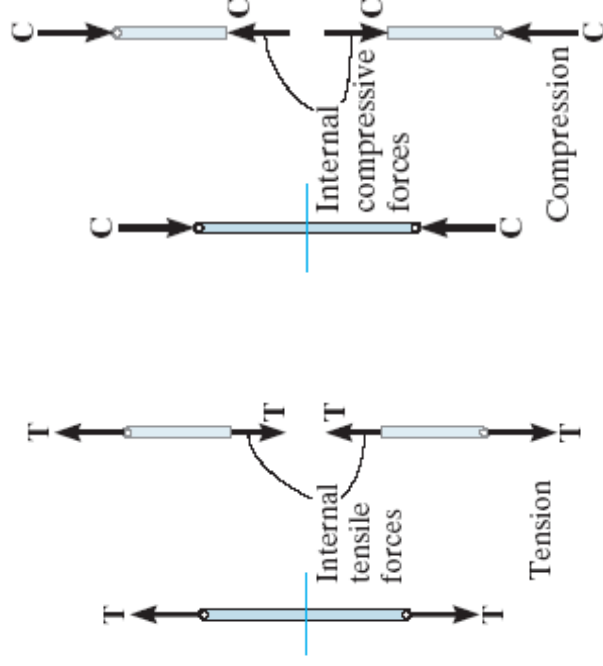
Solución

F_{HC} satisfice $\Sigma F_y = 0$ y por tanto HC no es un miembro de fuerza nula.



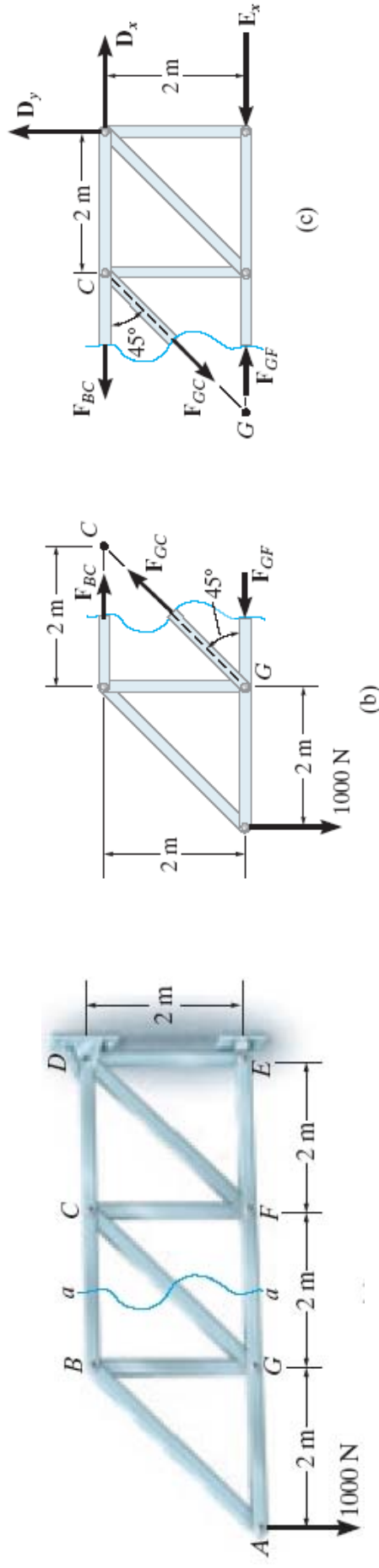
6.4 El método de las secciones

- Usado para determinar las tensiones dentro de un miembro
- Se basa en que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier parte del mismo lo está también
- Un sección imaginaria se usa para cortar el miembro en 2 y en el DCL, las fuerzas internas se muestran como externas



6.4 El método de las secciones

- Se pueden cortar estructuras: buscaremos secciones que no corten a más de tres miembros (solo tenemos 3 ec de equil). Ex: la sección a-a
- Las fuerzas resultantes del corte son iguales y opuestas en cada parte, según las leyes de Newton
- Nótese que por el método de las uniones habría que analizar A, B y G para determinar F_{GC} por ej.



6.4 El método de las secciones

Procedimiento de análisis

DCL

- Decidir la sección de corte
- Determinar las reacciones externas en la estructura
- Dibujar el DCL se los elementos cortados que tienen el menor número de fuerzas actuando sobre él
- Asignar un sentido a las fuerzas desconocidas
 - Por inspección, considerando el momento
 - Por convenio: suponer que las fuerzas desconocidas en el corte son siempre de tensión, y si el signo sale cambiado, supondría que son de compresión

6.4 El método de las secciones

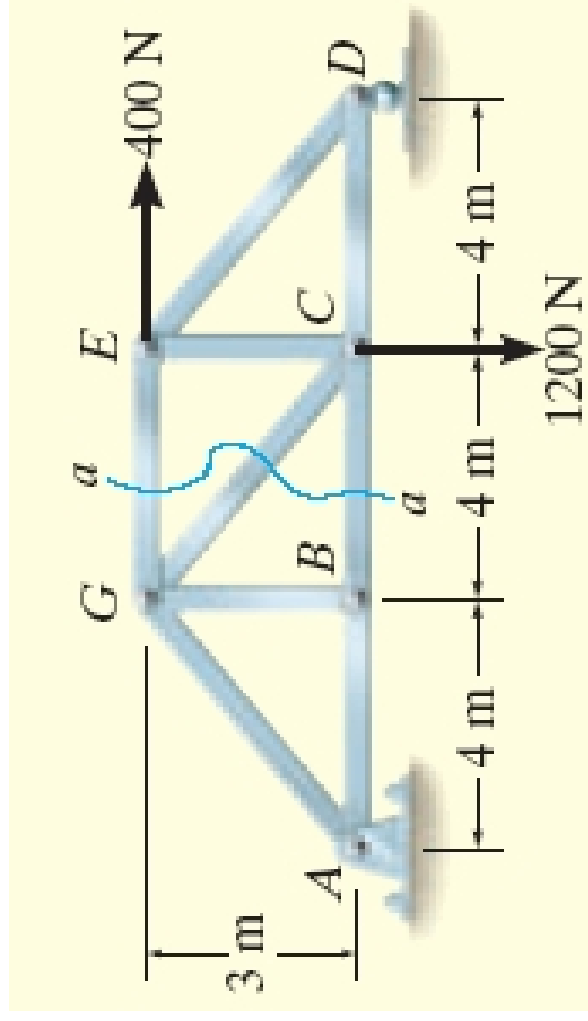
Procedimiento de análisis

Ecuaciones de Equilibrio

- Sumar momentos respecto a un punto de intersección de dos fuerzas desconocidas, para hallar una tercera
- Si dos fuerzas son paralelas, se pueden sumar fuerzas en las dirección perpendicular para hallar una tercera

Ejemplo

Determine la fuerza en los miembros GE, GC, y BC de la estructura. Indique si los miembros están en tensión o compresión.



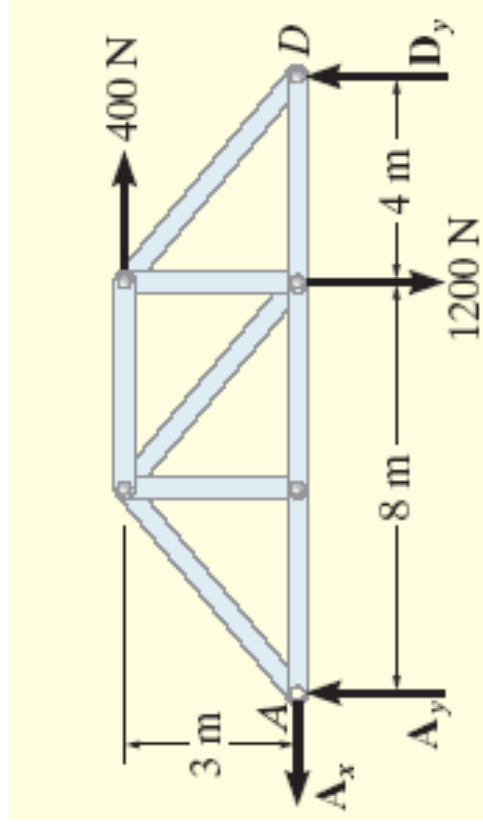
Solución

- Elegimos la sección a-a porque corta tres miembros
- DCL de la estructura completa para determinar las reacciones de los soportes

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 400 \text{ N} - A_x = 0 \Rightarrow A_x = 400 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0; \quad -1200 \text{ N} (8 \text{ m}) - 400 \text{ N} (3 \text{ m}) + D_y (12 \text{ m}) = 0 \Rightarrow D_y = 900 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y - 1200 \text{ N} + 900 \text{ N} = 0 \Rightarrow A_y = 300 \text{ N}$$



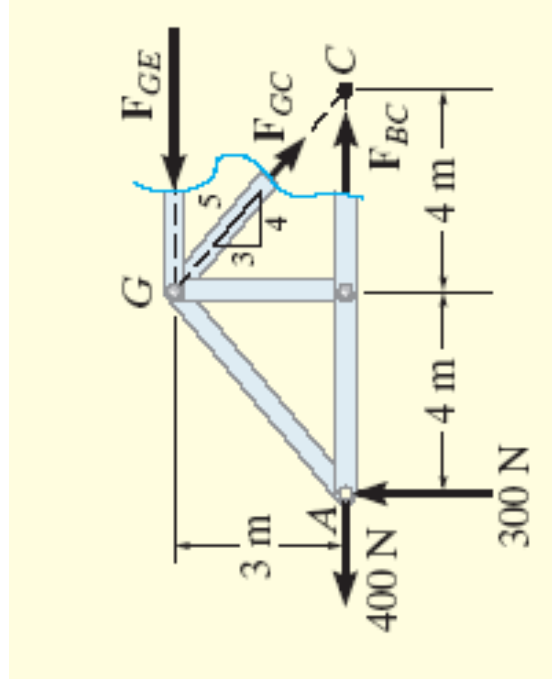
Solución

- DCL para una de las secciones

$$\sum M_G = 0; \quad -300 \text{ N} (4\text{m}) - 400 \text{ N} (3\text{m}) + F_{BC} (3\text{m}) = 0 \Rightarrow F_{BC} = 800 \text{ N} (T)$$

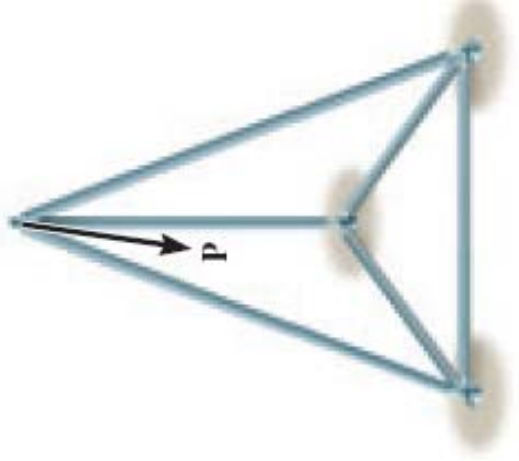
$$\sum M_C = 0; \quad -300 \text{ N} (8\text{m}) + F_{GE} (3\text{m}) = 0 \Rightarrow F_{GE} = 800 \text{ N} (C)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 300 \text{ N} - \frac{3}{5} F_{GC} = 0 \Rightarrow F_{GC} = 500 \text{ N} (T)$$



6.5 Estructuras espaciales

- Formadas por miembros que se unen para formar una estructura 3D
- La más simple es un tetraedro
- Vemos que añadir más miembros sería redundante para sostener la fuerza **P**



6.5 Estructuras espaciales

Hipótesis de diseño

- Los miembros de una estructura espacial se pueden tratar como de 2 fuerzas, siempre que las cargas externas se apliquen en la uniones
- Si el peso de los miembros no es despreciable, se puede considerar como una fuerza vertical aplicada la *mitad de su magnitud a cada extremo* del miembro

Método de las uniones

- Se resuelven $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$ en cada unión
- Aplicar a una unión con al menos 1 fuerza conocida y 3 desconocidas como máximo.

6.5 Space Trusses

Método de las secciones

- Si solo algunos miembros deben de determinarse.
- Las condiciones en las partes que deben satisfacerse son

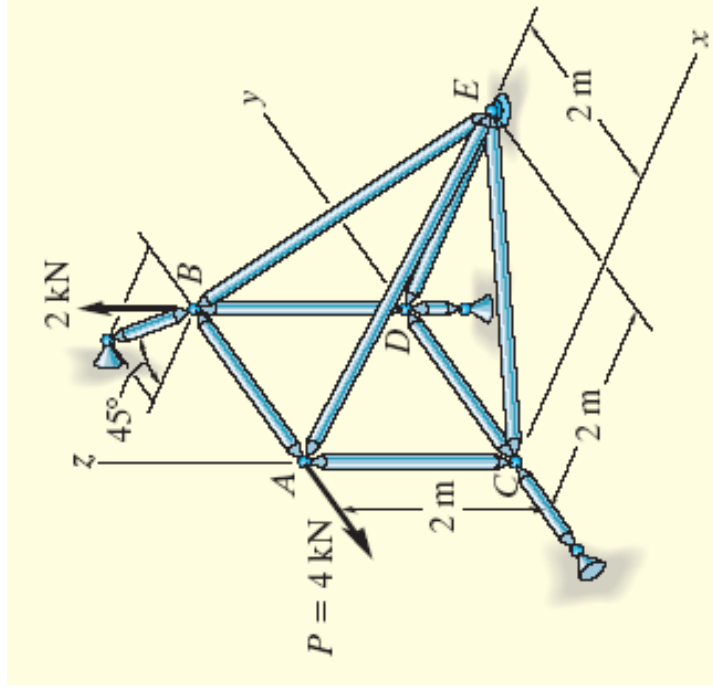
$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

- Eligiendo de manera adecuada las partes y los ejes, las fuerzas se pueden determinar usando solo una de estas condiciones

Ejemplo

Determine las fuerzas que actúan en los miembros de las estructura. Indique si los miembros están en tensión o compresión.



Solución

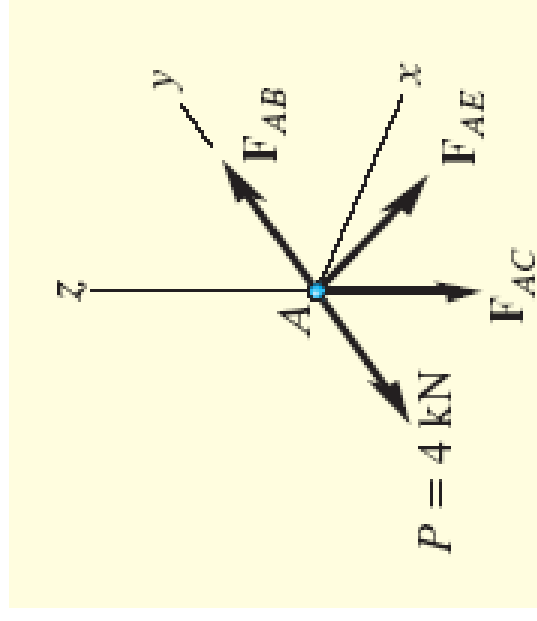
Para la unión A,

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \vec{j}, \vec{F}_{AC} = -F_{AC} \vec{k}$$

$$\vec{F}_{AE} = F_{AE} \left(\frac{\vec{r}_{AE}}{r_{AE}} \right)$$

$$\vec{k}) \sum \vec{F} = 0; \vec{P} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AE} = 0 - 4\vec{j} + F_{AB}\vec{j} - F_{AC}\vec{k} + 0.577F_{AE}\vec{i} + 0.577F_{AE}\vec{j} - 0.577F_{AE}\vec{k} = 0 \text{alignc } F_{AB} = 4\text{kN} \\ F_{AC} = F_{AE} = 0$$

$$\vec{P} = (-4\vec{j}) \text{ kN}$$



Solución

Para B,

$$\sum F_x = 0; -R_B \cos 45^\circ + 0.707 F_{BE} = 0$$

$$\sum F_y = 0; -4 + R_B \sin 45^\circ = 0$$

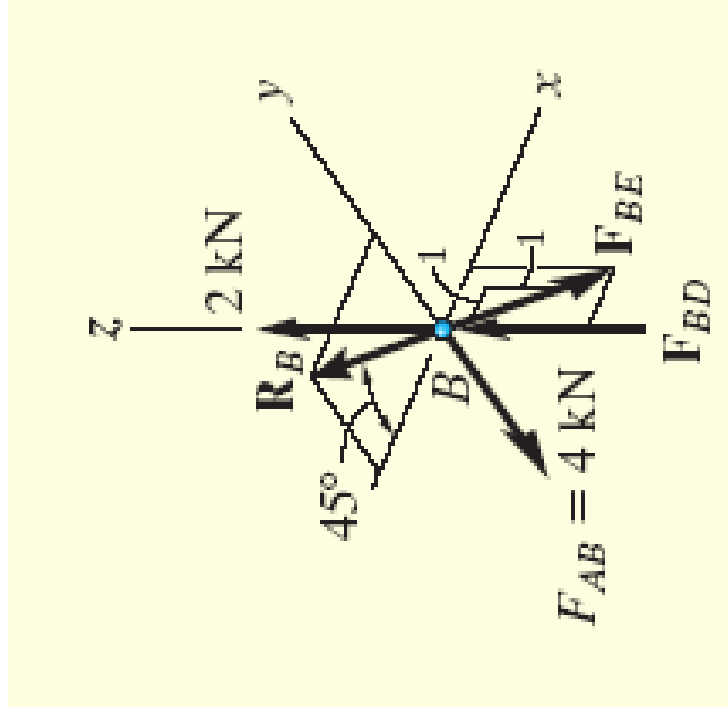
$$\sum F_z = 0; 2 + F_{BD} - 0.707 F_{BE} = 0$$

$$R_B = F_{BE} = 5.66 \text{ kN (T)}$$

$$F_{BD} = 2 \text{ kN (C)}$$

Se usa C o D para demostrar,

$$F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0$$



6.6 Armazones y máquinas

- Están compuestos de miembros multifuerzas
- Los armazones son estacionarios y se suelen usar para mantener cargas
- Se aplican las ecuaciones de equilibrio a cada miembro para determinar las fuerzas necesarias



6.6 Armazones y máquinas

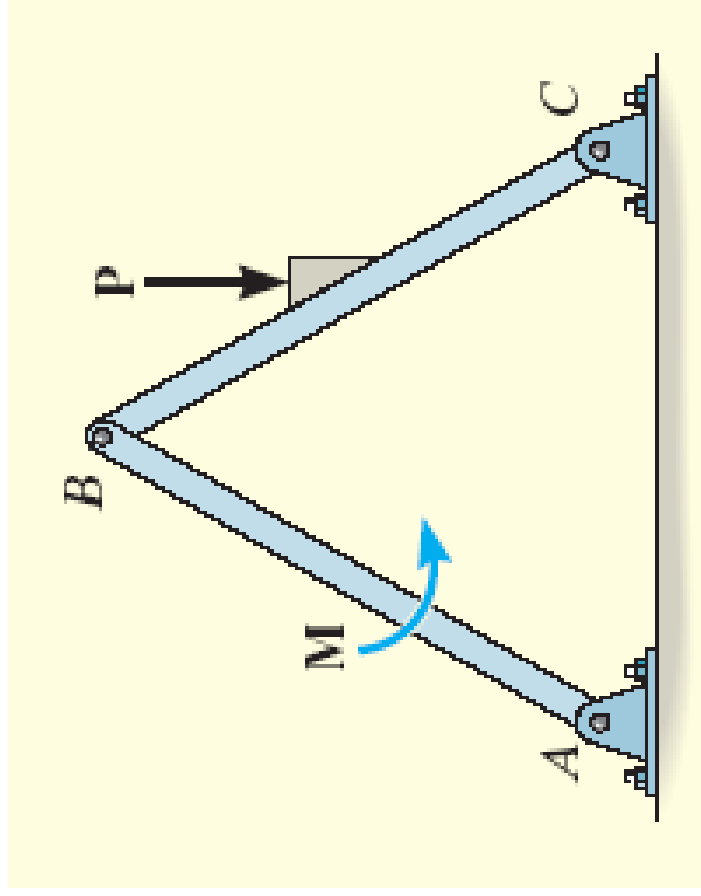
DCL

- Se aísla cada parte dibujando un diagrama
 - Mostrar todas las fuerzas y pares sobre cada parte
 - Identificar las fuerzas y momentos conocidos y no
 - Aplicar las ecuaciones de equilibrio
 - Asignar un sentido a las fuerzas y momentos



Ejemplo

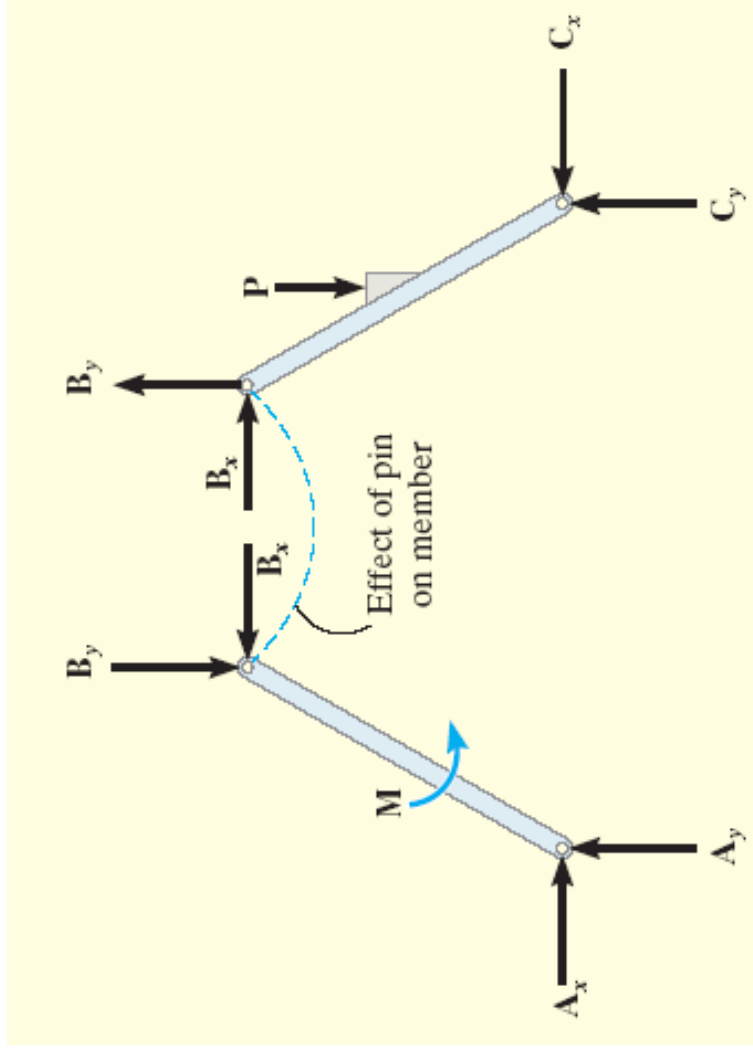
Para el armazón, dibujar el DCL para: (a) cada miembro, (b) la unión en B, (c) los dos miembros juntos.



Solución

Parte (a)

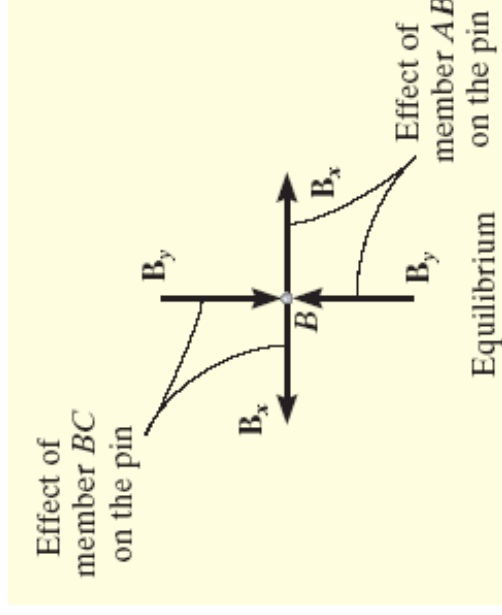
- BA y BC *no* son miembros de 2 fuerzas
- AB está sometida a las fuerzas resultantes de las uniones



Solución

Parte (b)

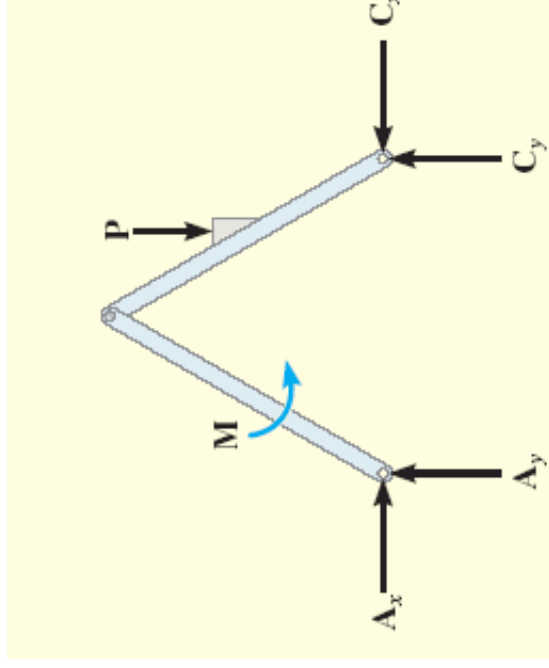
- La unión en B está sujeta a 2 fuerzas, la fuerza del miembro BC y AB sobre la unión
- Para el equilibrio, las fuerzas y los momentos deben de ser iguales pero opuestos.
- B_x y B_y producidas por cada miembro son iguales y opuestas



Solución

Parte (c)

- B_x y B_y are no se muestran porque son internas en esta caso y se cancelan
- La fuerzas desconocidas en A y C deben de actuar en el sentido dibujado por inspección
- El momento de par M se usa para determinar las fuerzas en A y C



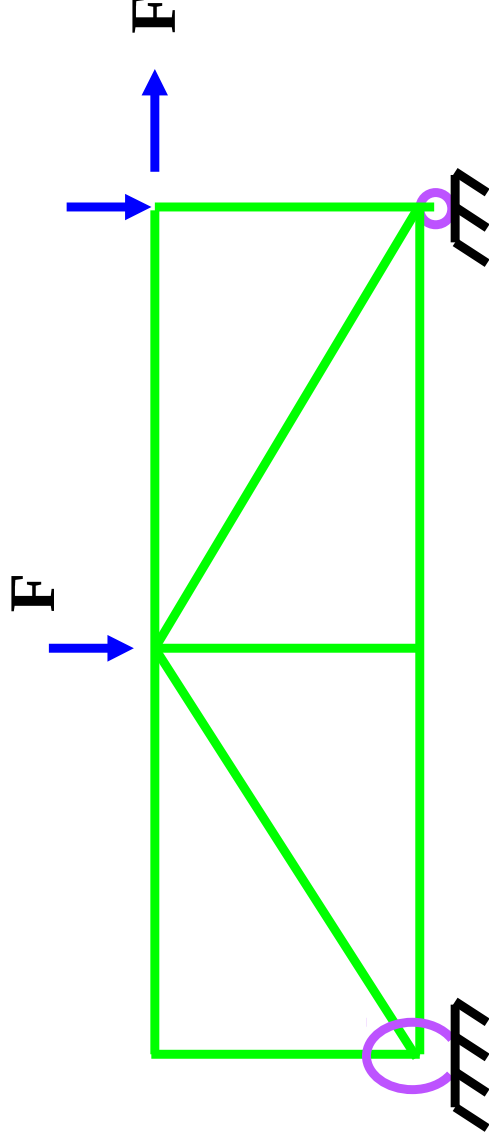
QUIZ

1. Una de las hipótesis que se usan cuando se analiza un estructura simple es que los miembros están unidos a los soportes _____.
A) soldados B) atornillados C) remachados
B) sin rozamiento E) pegados
2. Cuando usamos el método de las uniones, normalmente _____ ecuaciones de equilibrio se aplican en cada unión.
A) dos B) tres
C) cuatro D) seis

QUIZ

4. Para esta estructura, determine el número de miembros de fuerza nula.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4



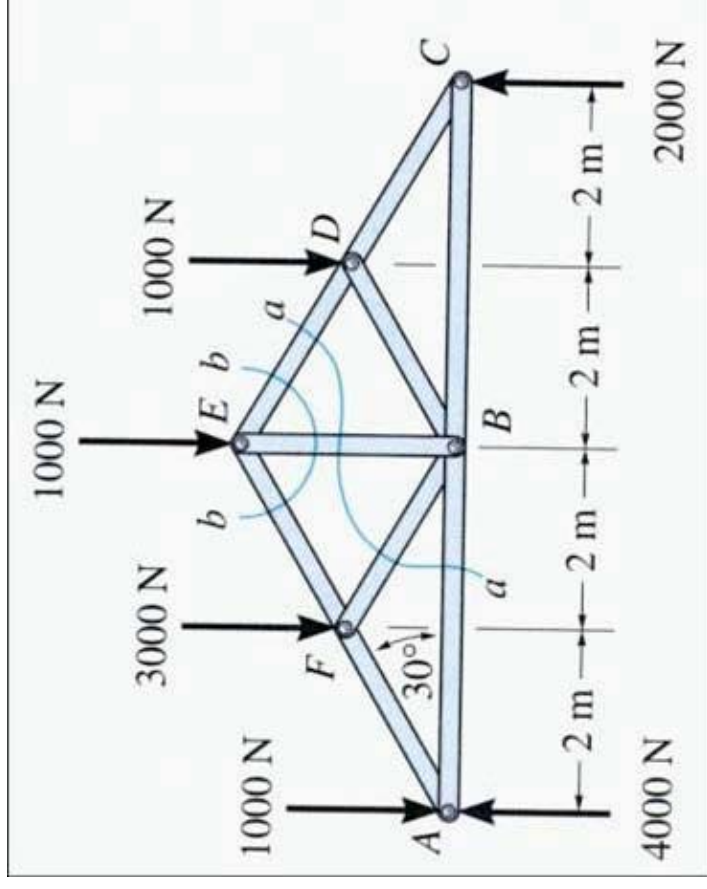
QUIZ

7. En el método de las secciones, generalmente el corte no afecta a más de _____ miembros en las que las fuerzas no se conocen.
- A) 1 B) 2
C) 3 D) 4
8. Si un miembro de una estructura simple soporta una fuerza de tensión T a lo largo de su longitud, entonces la fuerza interna en ese miembro es _____.
- A) de tensión, de magnitud $T/2$
B) de compresión, de magnitud $T/2$
C) de compresión, de magnitud T
D) de tensión, de magnitud T

QUIZ

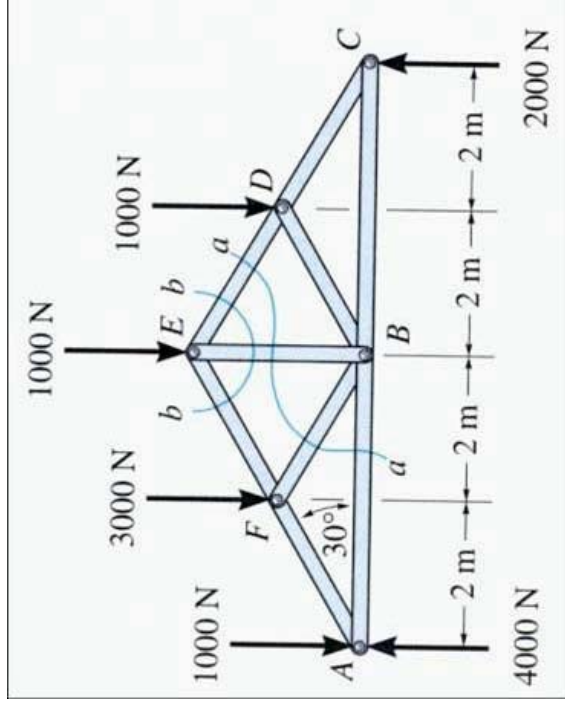
9. ¿Puede determinar la fuerza en el miembro ED mediante un corte por la sección a-a?

- A) No, hay 4 incógnitas.
- B) Sí, usando $\Sigma M_D = 0$.
- C) Sí, usando $\Sigma M_E = 0$.
- D) Sí, usando $\Sigma M_B = 0$.



QUIZ

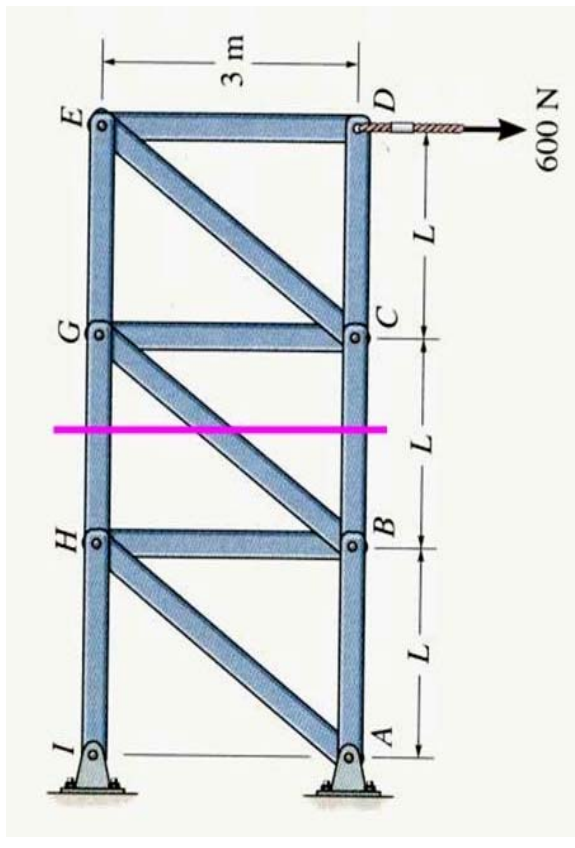
10. Si se conoce F_{ED} , ¿cómo determinar F_{EB} ?
- A) Tomando la sección b-b y usando $\Sigma M_E = 0$
 - B) Tomando la sección b-b, y usando $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$
 - C) Tomando la sección a-a y usando $\Sigma M_B = 0$
 - D) Tomando la sección a-a y usando $\Sigma M_D = 0$



QUIZ

11. Se hace un corte a través de los miembros GH, BG y BC para determinar las fuerzas en ellos. ¿Qué parte es mejor para analizar y por qué?

- A) La derecha, menos cálculos.
- B) La izquierda, menos cálculos.
- C) Cualquiera, la dificultad es similar.
- D) Ninguna es buena ya que hay demasiadas incógnitas.



QUIZ

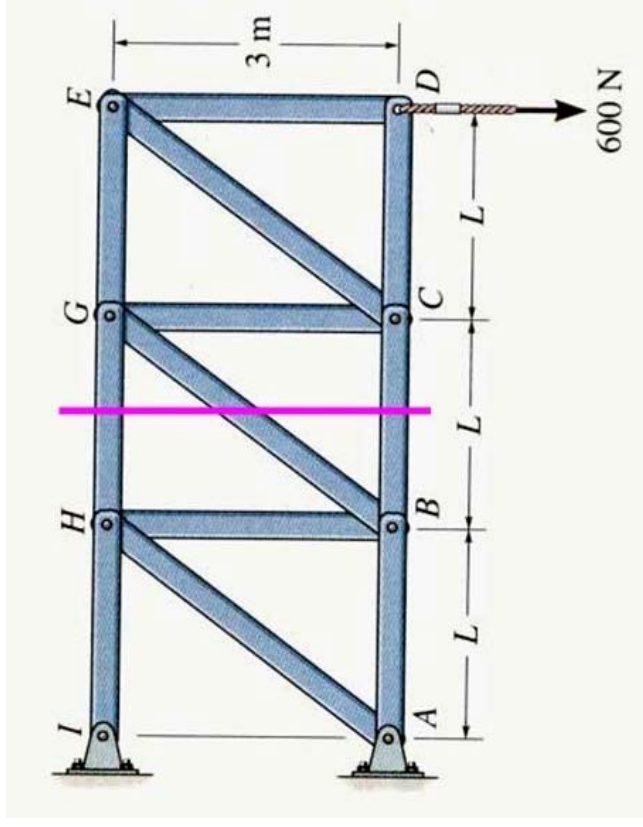
12. Para determinar la fuerza en el miembro HG relacionado con la anterior pregunta, ¿cuál ecuación es mejor usar?

A) $\sum M_H = 0$

B) $\sum M_G = 0$

C) $\sum M_B = 0$

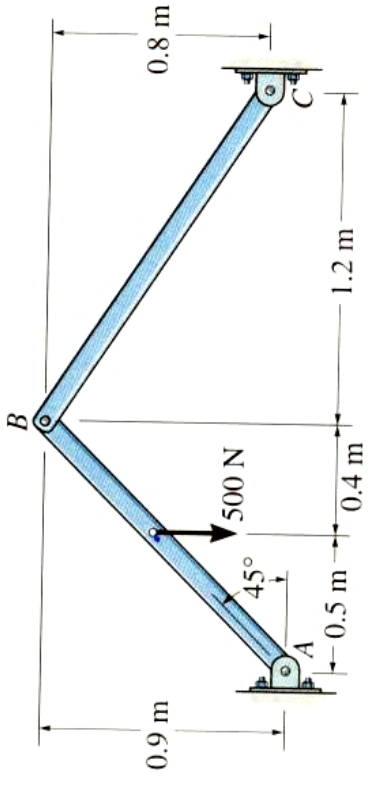
D) $\sum M_C = 0$



QUIZ

13. Para determinar las reacciones en la uniones A, B, y C, ¿cuál es el mínimo número de incógnitas en este problema?

- A) 3
- B) 4**
- C) 5
- D) 6



14. Para el problema anterior, imagine el DCL del miembro AB. ¿Cuál es la manera más fácil de escribir una ecuación con las incógnitas en B?

- A) $\sum M_C = 0$
- B) $\sum M_B = 0$
- C) $\sum M_A = 0$**
- D) $\sum F_x = 0$