# Estática

7

## Fuerzas Internas

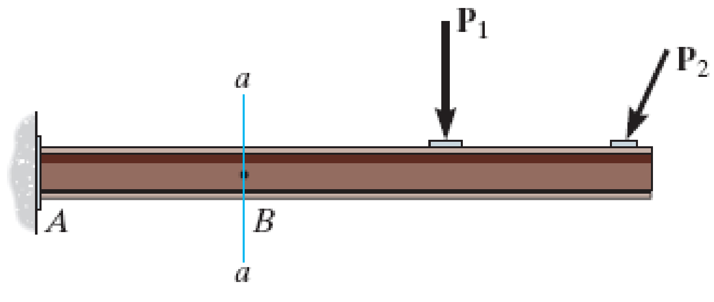
# Objectivos

- Método de las secciones para determinar las cargas internas  o solicitaciones en un miembro.
- Describir la tensión interna de corte o cizalla y el momento interno de un miembro
- Analizar las fuerzas y la geometría de cables que soportan cargas.

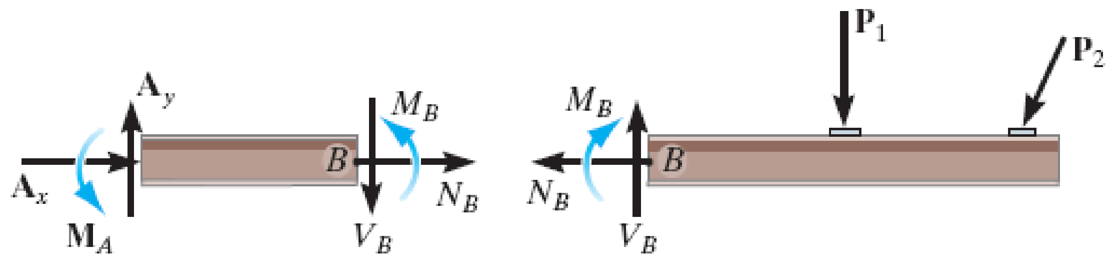
# Índice

# 7.1 Fuerzas internas que se desarrollan en miembros o solicitaciones

- El diseño de cualquier miembro requiere que el material que se use sea capaz de soportar las cargas internas que actúan sobre él.
- Las cargas internas o solicitaciones se pueden determinar mediante el método de las secciones.



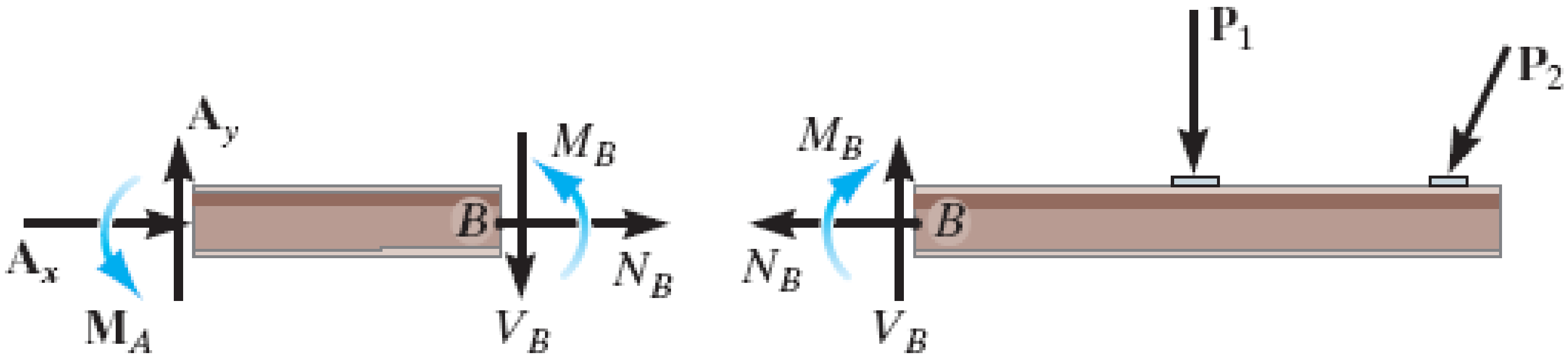
(a)



(b)

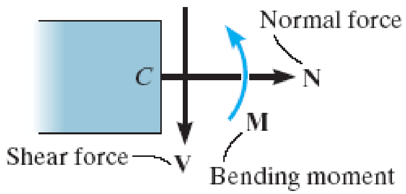
# 7.1 Cargas internas en miembros

- La fuerza interna **N**, actuando normal  a la sección del corte de la viga, en dirección del eje
- **V**, actuando tangente a la sección de llama de corte o cizalla
- El momento de par **M** referido como momento flexión o momento flector.

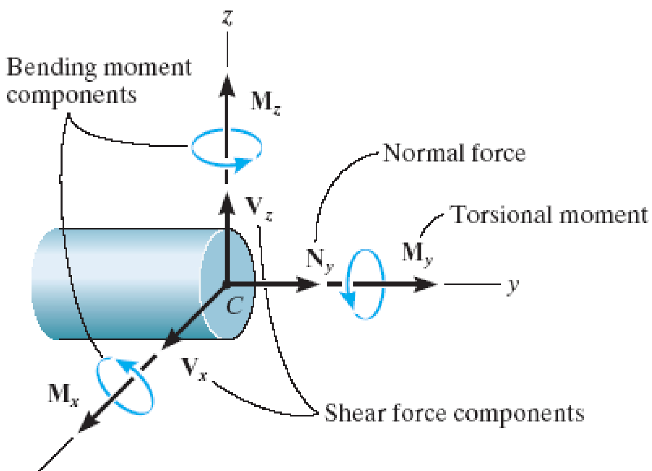


# 7.1 Cargas internas en miebros

- En 3D, una fuerza interna de tres componentes y un momento de par en general actuarán en cualquier sección del cuerpo
- $N_y$ es la fuerza normal, y $V_x$ , $V_z$ las componentes de la fuerza de corte
- $M_y$ es el monento de torsión y $M_x$ , $M_z$ los momentos flectores



(a)



(b)

# 7.1 Cargas internas en miembros

## Procedimiento de análisis

Reacciones de los soportes

- Antes del corte, determinar las reacciones de los soportes en los miembros
- Después del corte se pueden usar las ecuaciones de equilibrio para obtener las cargas internas

DCL

- Mantener todas las fuerzas, cargas distribuidas y momentos en sus lugares correspondientes y hacer un corte.
- DCL de la parte con menos cargas.

# 7.1 Cargas internas en miembros

## Procedimiento de análisis

DCL (continuación)

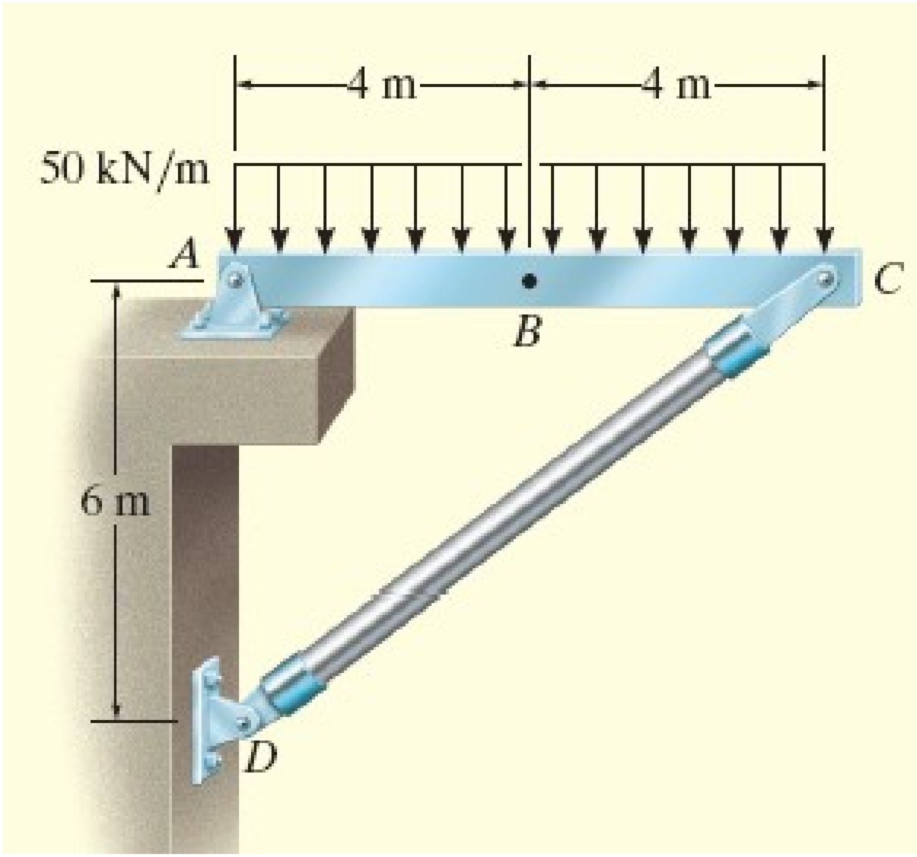
- Indicar las componentes x,y,z componentes de las fuerzas y momentos de par
- Solo **N**, **V** y **M** actúan en la sección
- Determinar el sentido (por inspección o convenio)

Ecuaciones de equilibrio

- Los momento respecto a la sección (así **N**, **V** se eliminan de la ecuación)
- Si resulta un signo negativo, el sentido es opuesto.

# Ejemplo

Determine la fuerza interna, la fuerza de corte y el momento flector que actúan en el punto B de la estructura de dos miembros mostrada.



# Solución

<u>Reacciones de los soportes</u>

DCL de cada miembro

Miembro AC

$\sum M_A = 0;$

$-400kN(4m) + (3/5)F_{DC}(8m) = 0$

$F_{DC} = 333.3kN$

$+\rightarrow \sum F_x = 0;$

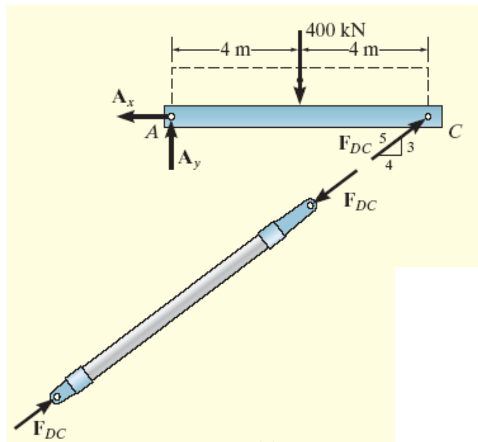
$-A_x + (4/5)(333.3kN) = 0$

$A_x = 266.7kN$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$

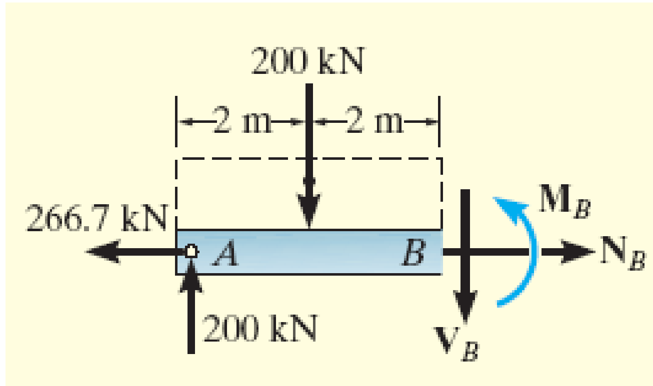
$A_y - 400kN + 3/5(333.3kN) = 0$

$A_y = 200kN$



# Solución

<u>Reacciones de los soportes</u>




Miembro AB

$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B - 266.7kN = 0$

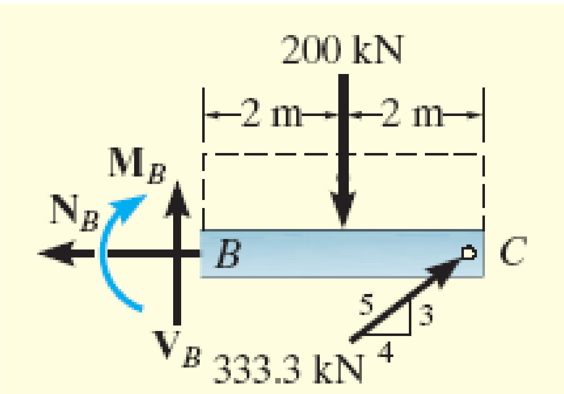
$N_B = 266.7kN$

$+\uparrow \sum F_y = 0; 200kN - 200kN - V_B = 0$

$V_B = 0$

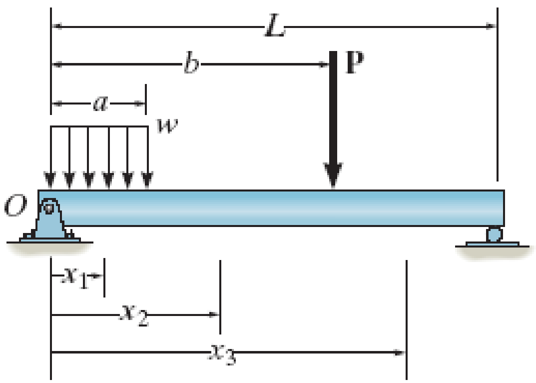
$\sum M_B = 0; \quad M_B - 200kN(4m) - 200kN(2m) = 0$

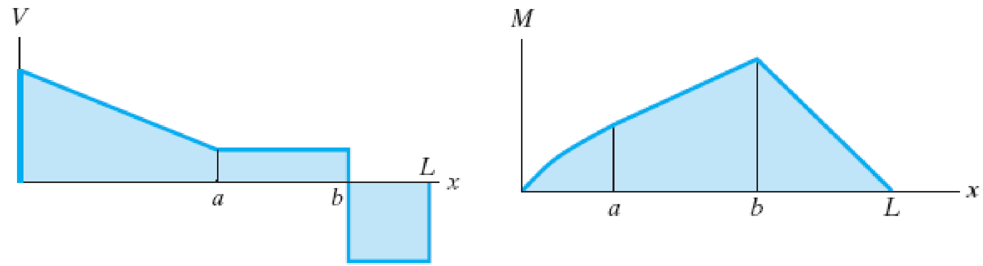
$M_B = 400kN.m$



# 7.2 Ecuaciones de corte, momento y diagramas

- Vigas – miembros estructurales diseñados para soportar cargas perpendiculares a sus ejes
- Una viga simplemente soportada está articulada en un extremo y apoyada en una rodadura en el otro
- Una viga voladiza está fija en un extremos y libre en el otro




Normalmente, el diagrama de **N** no se considera ya que las cargas actúan perpend a la viga, y producen **V** y **M** (y es lo que se necesita a la hora de diseñar la viga: resistencia al corte y a curvarse)

# 7.2 Ecuaciones de corte, momento y diagramas

Procedimiento de análisis

<u>Reacciones de los soportes</u>

- Encontrar todas las fuerzas reactivas y momentos de pares que actúan sobre la viga
- Resolverlas en componentes

<u>Reacciones de corte y momento</u>

- Especificar coordenada x desde el extremo izquierdo
- Seccionar la viga en cada x perpendicular a su eje
- V es obtenida sumando las fuerzas perpendiculares a la viga
- M es obtenido sumando los momentos sobre el extremo seccionado

# 7.2 Ecuaciones de corte, momento y diagramas

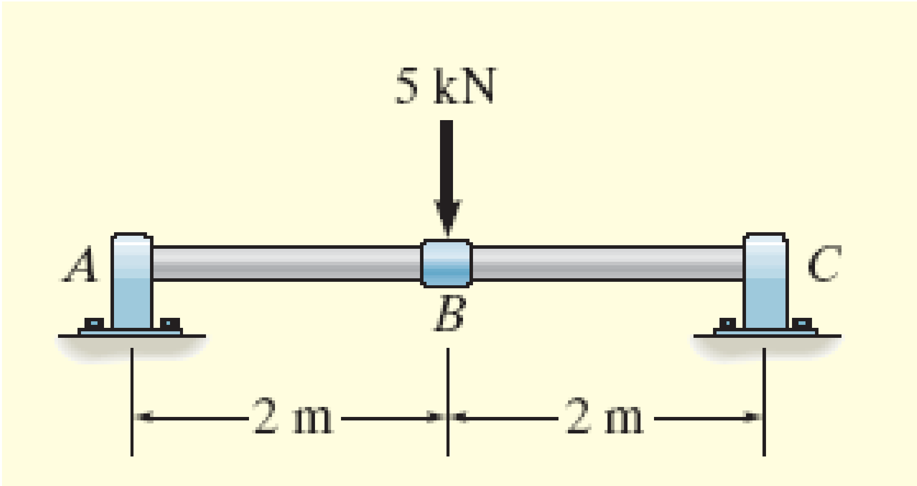
Procedimiento de análisis

<u>Reacciones de corte y momento (continuación)</u>

- Pintar (V versus x) y (M versus x)
- Es conveniente pintar los diagramas debajo del DCL de la viga

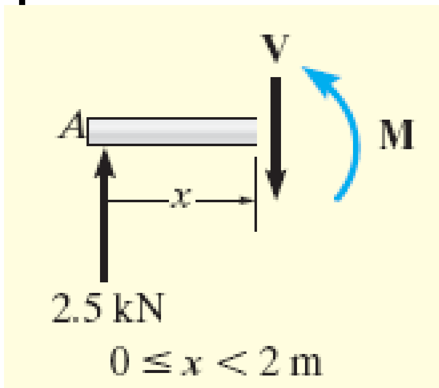
# Ejemplo

Dibujar los diagramas de corte y momento para la barra.
El soporte A en un soporte de rodamiento y C un cojinete



# Solución

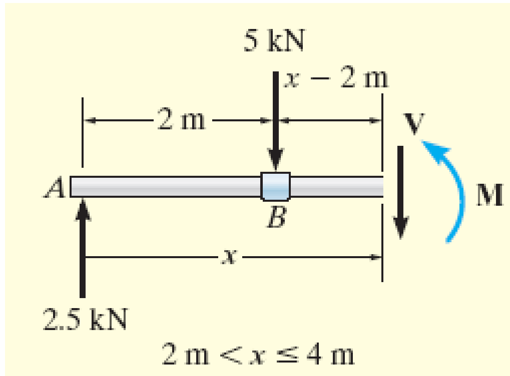
Se calculan las reacciones de los soportes.




DCL de la sección

$$+\uparrow \sum F_y = 0; V = 2.5\,kN$$

$$\sum M = 0; M = 2.5\,x\,kN.m$$




$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2.5\,kN - 5\,kN - V = 0$$

$$V = -2.5\,kN$$

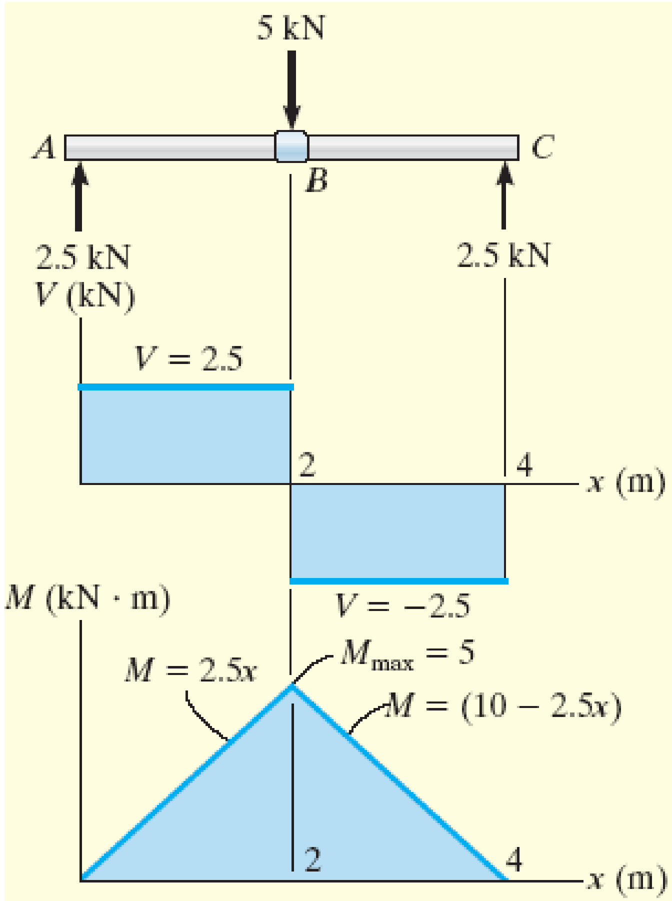
$$\sum M = 0; \quad M + 5\,kN(x - 2\text{m}) - 2.5\,kN(x) = 0$$

$$M = (10 - 2.5\text{x})\,kN.m$$

# Solución

Diagrama de corte

La fuerza de corte interna es siempre positiva y constante en la parte AB.




Justo a la derecha de B, la fuerza de corte cambia de signo y permanece constante para BC.

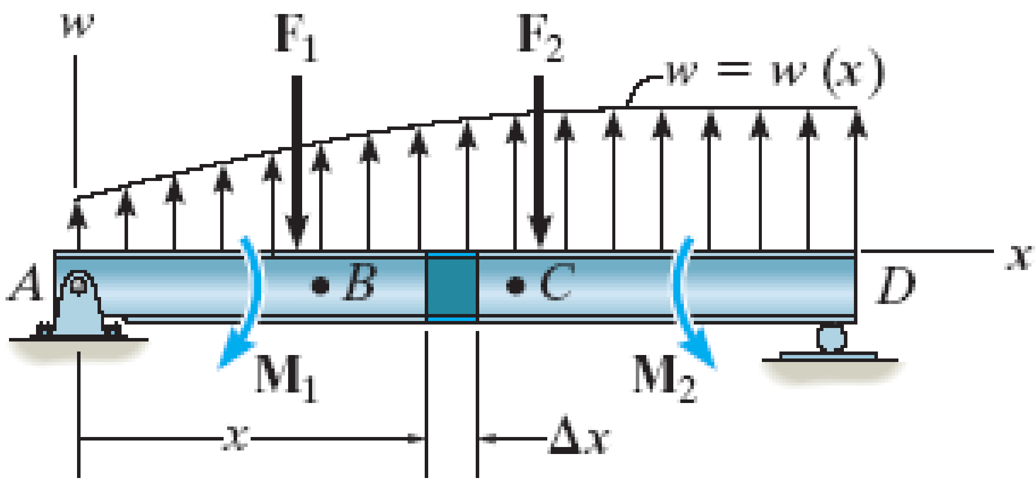
Diagrama de momento

Empieza en cero, crece linealmente hasta B, y decrece hasta cero.

# 7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

## Carga distribuida

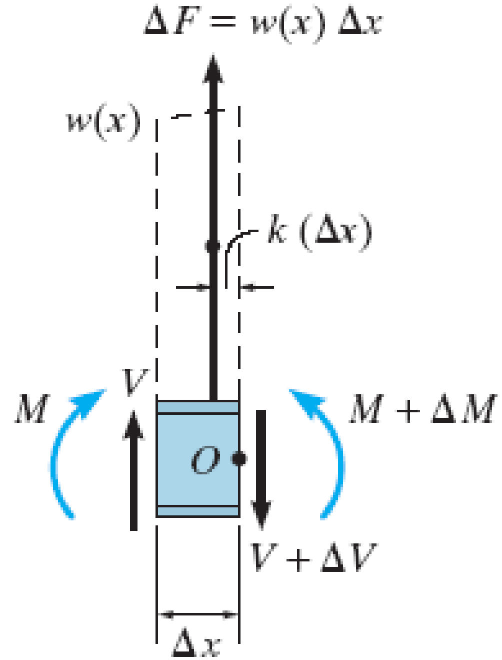
- Considere la viga AD sujeta a una carga arbitraria w = w(x) y a una serie de fuerzas concentradas y momentos.
- Si la carga distribuida actúa hacia arriba la supondremos positiva.



## 7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

### Carga distribuida

- Un DCL para un segmento pequeño de la viga de longitud Δx se elige en el punto x que no esté sujeto a una fuerza concentrada o a un momento de par.
- Los resultados obtenidos no se aplicarán en puntos de cargas concentradas.
- Las fuerza internas de corte y los momentos flectores se toman en sentido positivo.



# 7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

## Carga distribuida

- La carga distribuida se reeemplaza por una fuerza resultante ΔF = w(x) Δx, que actúa a la distancia fraccional k (Δx), desde el extremo derecho,

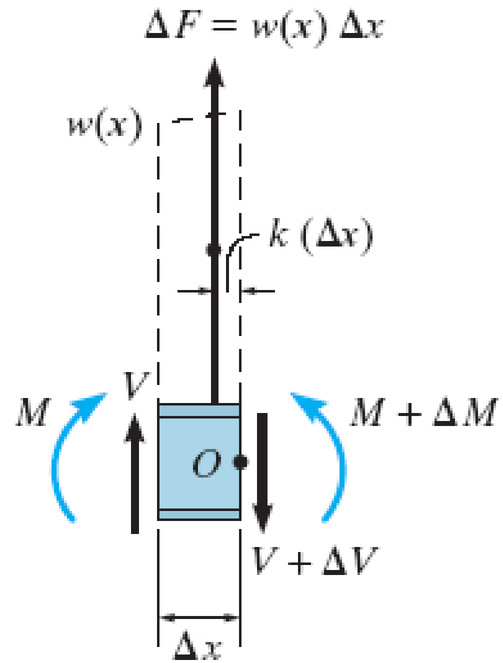
siendo 0 < k <1

$$+\uparrow \sum F_y = 0; V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = +w(x)\Delta x$$

$$\sum M = 0; -V\Delta x - M \pm w(x)\Delta x[k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x + w(x)k(\Delta x)^2$$



# 7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

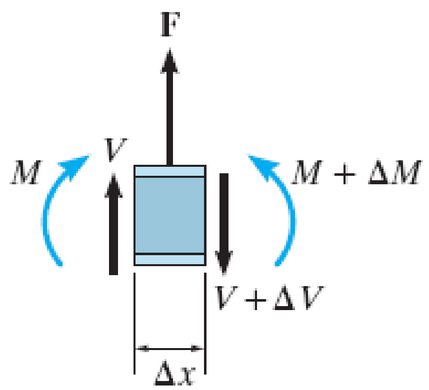
## Carga distribuida

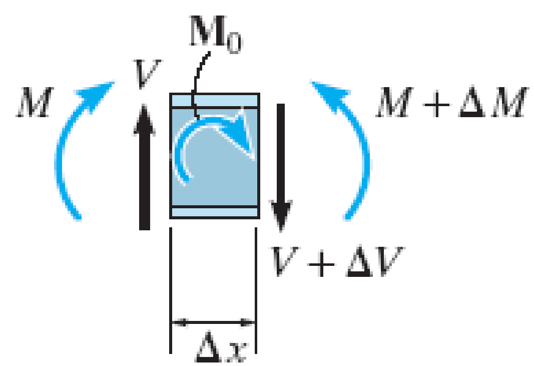
| | | |
|---|---|---|
| Pendiente del diagrama de corte | $\frac{dV}{dx}=+w(x)$ | Intensidad de carga distribuida |
| Pendiente del diagrama de momento | $\frac{dM}{dx}=V$ | Fuerza de corte |
| Cambio en la fuerza de corte | $\Delta V_{BC}=+\int w(x)dx$ | Área bajo el diagrama de carga |
| Cambio en el momento | $\Delta M_{BC}=\int Vdx$ | Área bajo el diagrama de corte |

## 7.3 Relación entre carga distribuida, fuerzas de corte y momento

Fuerza y momento localizados

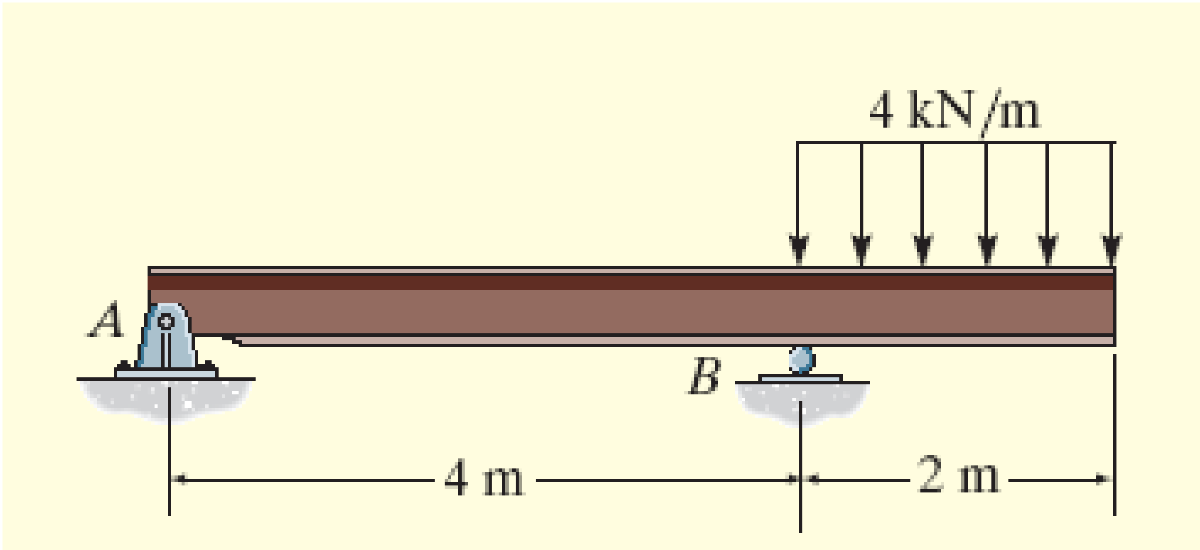
- DCL de un segmento pequeño con fuerza localizada
- $\Delta V = F$
- DCL de un segmento pequeño con momento localizad
- $\Delta M = M_0$



# Ejemplo

Dibuje los diagramas de corte y momento para la viga.



# Solución

Se muestran las reacciones de los soportes

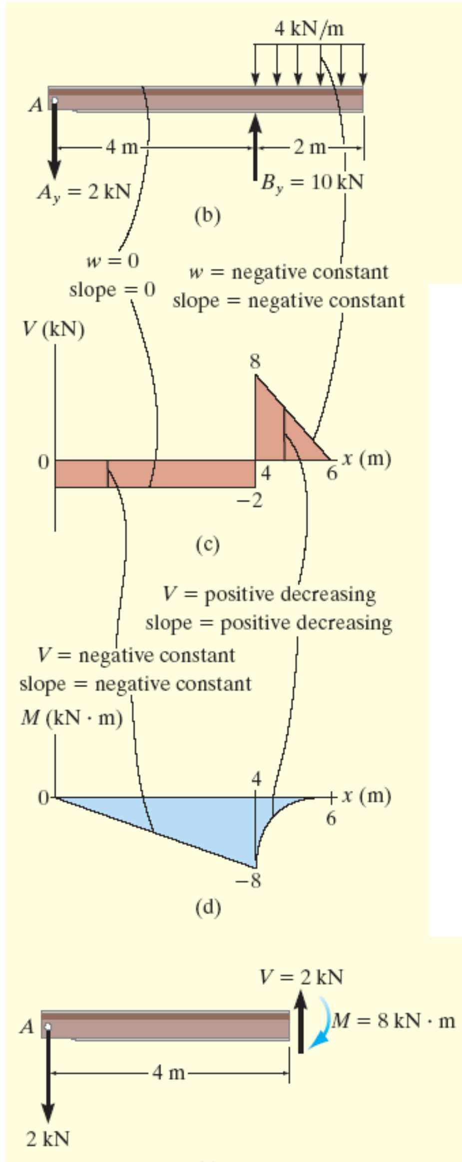
<u>Diagrama de cortes</u>

Fuerza de –2 kN en el extremo *A* de la viga en *x* = 0.

Salto positivo de 10 kN en *x* = 4 m debido a la fuerza

<u>Diagrama de momentos</u>

$$M|_{x=4} = M|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2(4)] = -8 \text{ kN}\cdot m$$



# 7.4 Cables

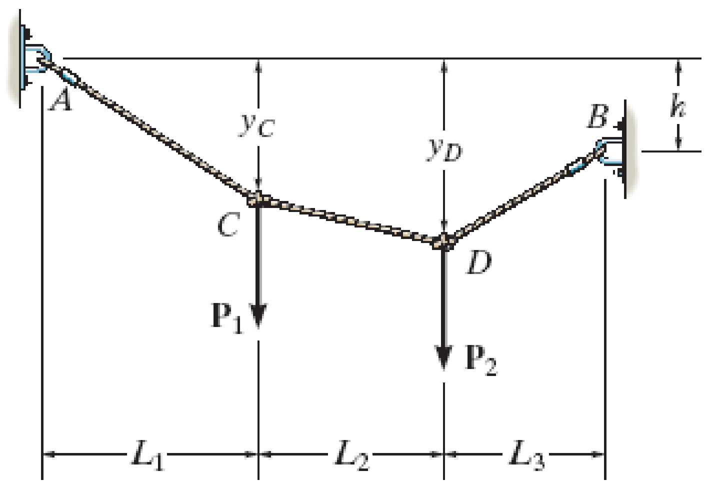
- Cables y cadenas se usan para soportar y transmitir cargas de un miembro a otro.
- En el análisis de fuerzas, el peso de los cables se desprecia.
- Se asume que el cable es perfectamente *flexible* e *inextensible*
- Debido a su flexibilidad, los cables no ofrecen niguna resistencia a las flexiones: V=M=0, N=Tensión=T
- La longitud permanece constante antes y después de la carga.

# 7.4 Cables

Cable sujeto a cargas concentradas

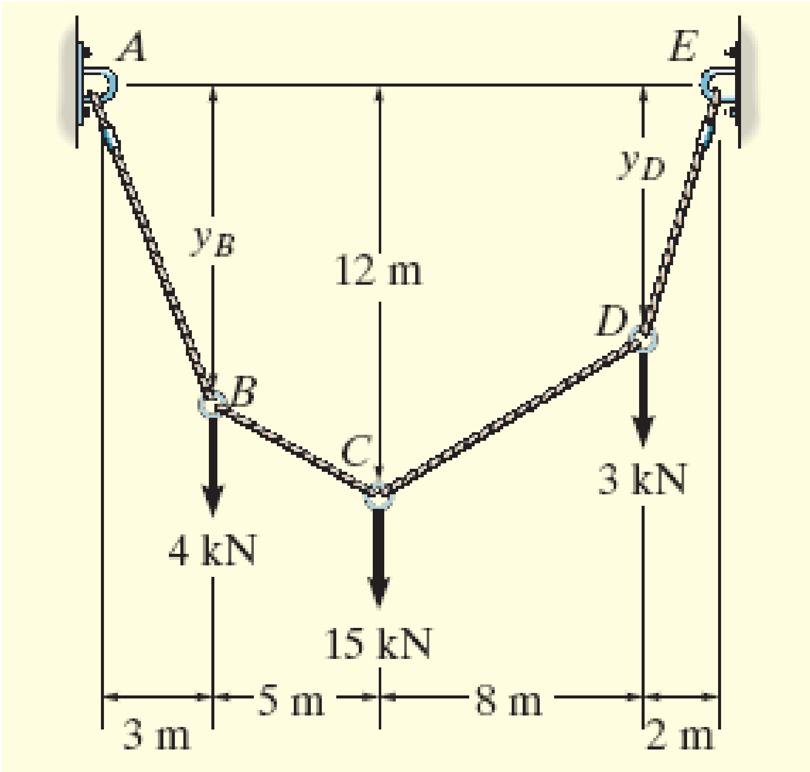
- Para un cable de peso despreciable, estará sometido a fuerzas de tensión constantes.
- Incógnitas: 4 reacciones en A y B, 3 tensiones, $y_C$, $y_D$
- Conocidas: h, $L_1$, $L_2$, $L_3$ y las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$
- 2 equations of equilibrium en A, B, C y D.
- Usar relaciones geométricas:

Si L es conocida, se podrían relacionar h, $L_1$, $L_2$, $L_3$ , $y_C$, $y_D$ usando el terorema de Pitágoras.



# Ejemplo

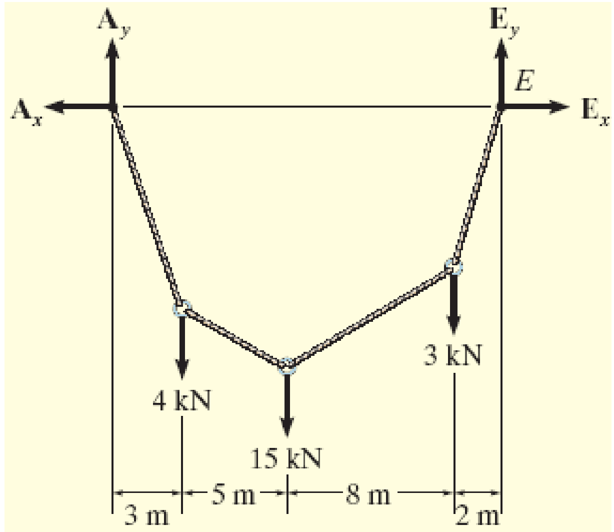
Determine la tensión en cada segmento del cable.



# Solución

Se puede aplicar el método de las uniones en A B C D E.
Un método alternativo:

Primero DCL para el cable entero.




$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0;$$

$$-A_x+E_x=0$$

$$\sum M_E=0;$$

$$-A_y(18m)+4kN(15m)+15kN(10m)+3kn(2m)=0$$

$$A_y=12kN$$

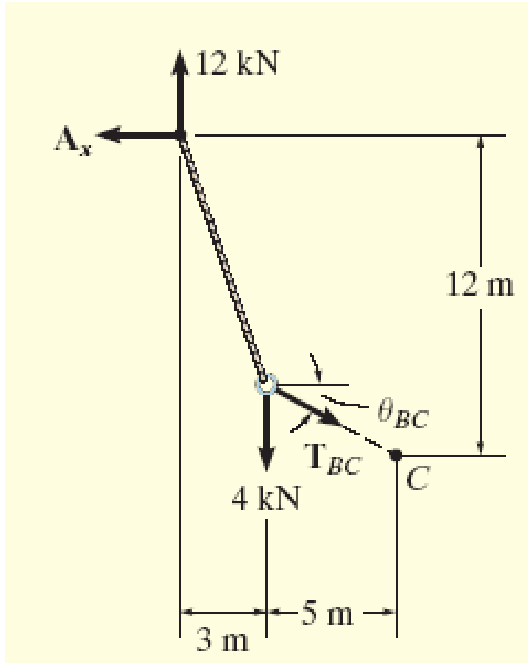
$$+\uparrow\sum F_y=0;$$

$$12kN-4kN-15kN-3kN+E_y=0$$

$$E_y=10kN$$

# Solución

Considere la sección que queda al cortar el cable BC, ya que $y_C = 12m$.




$$\sum M_C = 0;$$

$$A_x(12m) - 12kN(8m) + 4kN(5m) = 0$$

$$A_x = E_x = 6.33kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$$

$$T_{BC}\cos\theta_{BC} - 6.33kN = 0$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0;$$

$$12kN - 4kN - T_{BC}\sin\theta_{BC} = 0$$

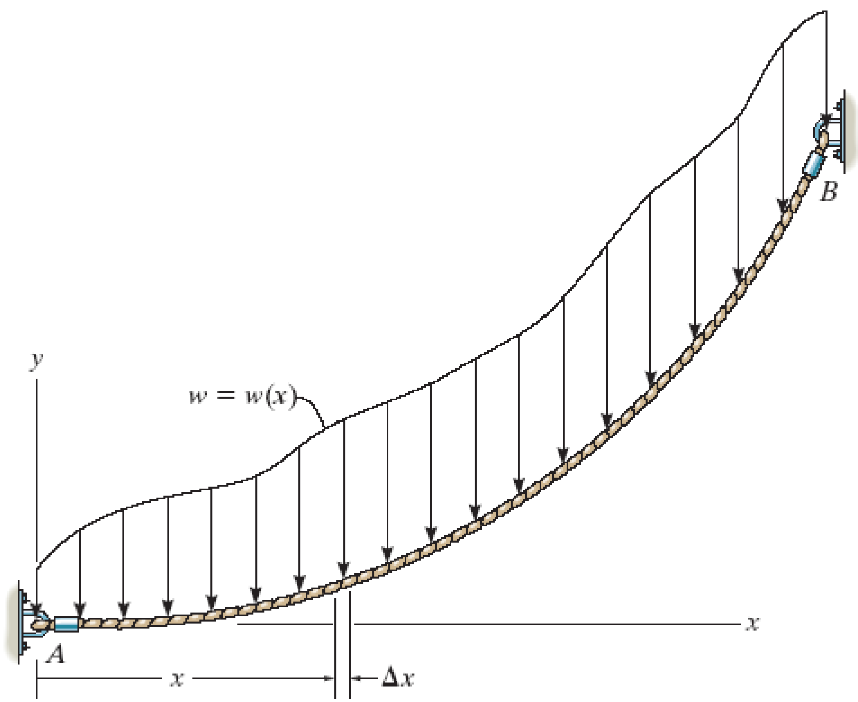
$$\theta_{BC} = 51.6^\circ, T_{BC} = 10.2kN$$

Y por último podríamos analizar el equilibrio en A, C y E para obtener las tensiones que faltan: $T_{AB}$ = 13.6 kN, $T_{CD}$=9.44 kN y $T_{ED}$=11.8 kN

# 7.4 Cables

Cable sujeto a una carga distribuida

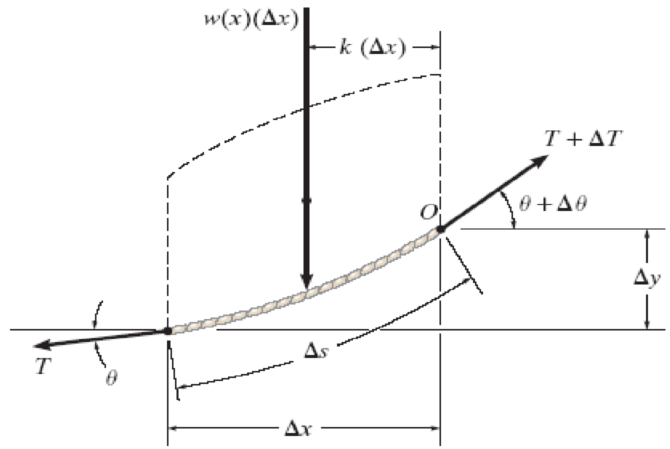
- Considere un cable de peso despreciable sujeto a una carga distribuida w = w(x) medida en la dirección x.



# 7.4 Cables

Cable sujeto a una carga distribuida

- Para el DCL de una sección de longitud Δs
- Ya que la fuerza tensil cambia de manera continua, denotaremos por ΔT este cambio.
- La forma del cable se obtiene a partir del DCL de la sección e integrando dos veces (siendo *FH* la tensión horizontal)




$-T\cos\Theta + (T+\Delta T)\cos(\Theta+\Delta\Theta)=0$

$-T\,\mathrm{sen}\,\Theta - w(x)\Delta x + (T+\Delta T)\,\mathrm{sen}(\Theta+\Delta\Theta)=0$

$w(x)\Delta x\, k\Delta x - T\cos\Theta\,\Delta y + T\,\mathrm{sen}\,\Theta\,\Delta x = 0$

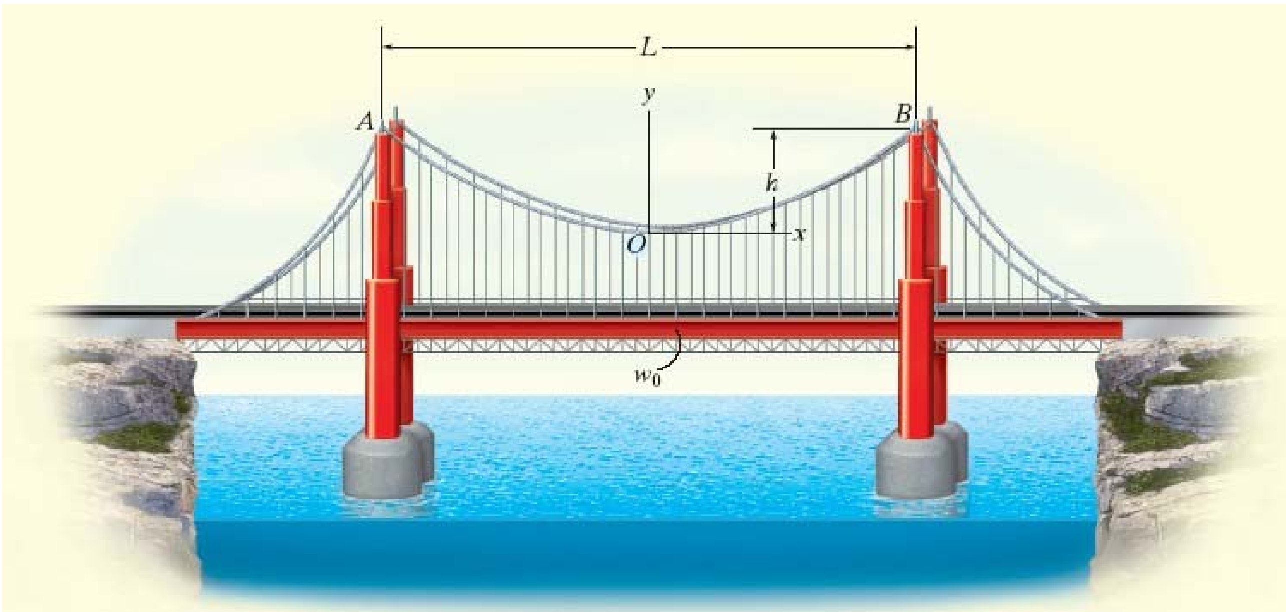
$$T\cos\Theta = cosnt = F_H$$

$$T\,sen\,\Theta = \int w(x)\,dx$$

$$y = \frac{1}{F_H}\int\left(\int w(x)\,dx\right)dx$$

# Ejemplo

El cable de un puente colgante soporta la mitad de la carretera uniforme entre las columnas A y B. Si esta carga distribuida es $w_0$, determine la fuerza máxima que se desarrolla en el cable y la longitud requerida del mismo. El vano mide *L* y, la altura *h*.



# Solución

Note $w(x) = w_0$ ➔ $y = \frac{1}{F_H} \int \left( \int w_o \, dx \right) dx$

Hacemos las dos integrales ➔ $y = \frac{1}{F_H} \left( \frac{w_o x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right)$

Condiciones en $x = 0$ ➔ $y = 0, x = 0, dy/dx = 0$

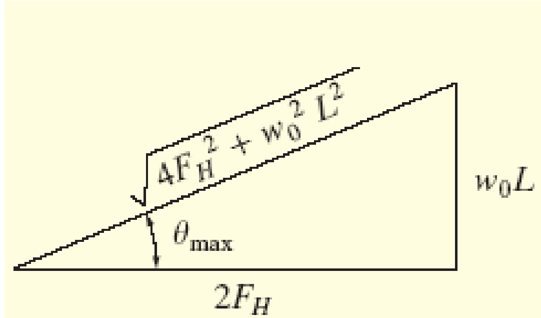
Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$

La curva es $y = \frac{w_o}{2F_H} x^2$

Es la ecuación de una parábola

Condición de contorno $x = L/2$ ➔ $y = h$

# Solución




La constante, $F_H = \frac{w_o L^2}{8h}$ and $y = \frac{4h}{L^2} x^2$

Tensión, T = $F_H$/cosθ

Pendiente en B ➔ $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=L/2} = \tan\theta_{max} = \frac{w_o x}{F_H}\Big|_{x=L/2} \Rightarrow \theta_{max} = \tan^{-1}\left(\frac{w_o L}{2F_H}\right)$

Por tanto, $T_{max} = \frac{F_H}{\cos(\theta_{max})}$

Usando la relación triangular $T_{max} = \frac{\sqrt{4F_H^2 + w_o^2 L^2}}{2}$

# Solución

Un segmento diferencial del cable, de longitud ds,

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

La longitud total se obtiene integrando,

$$\ell=\int ds=2\int\sqrt{1+\left(\frac{8\mathrm{h}}{L^2}x\right)^2}\,dx$$

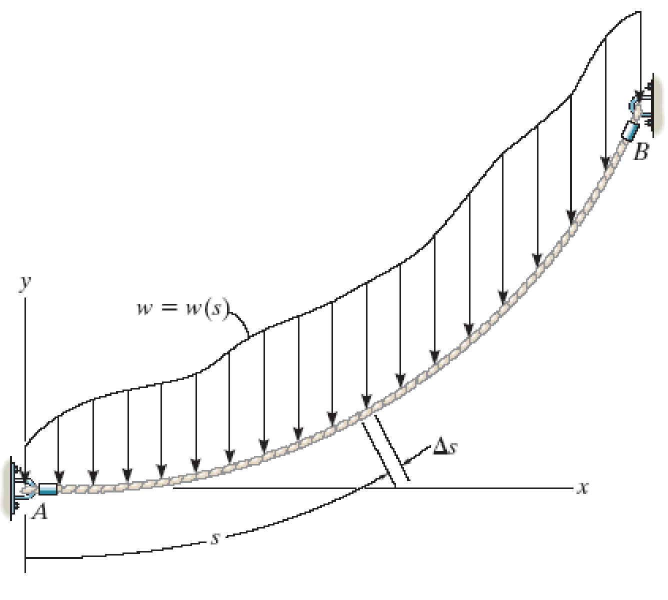
Resulta,

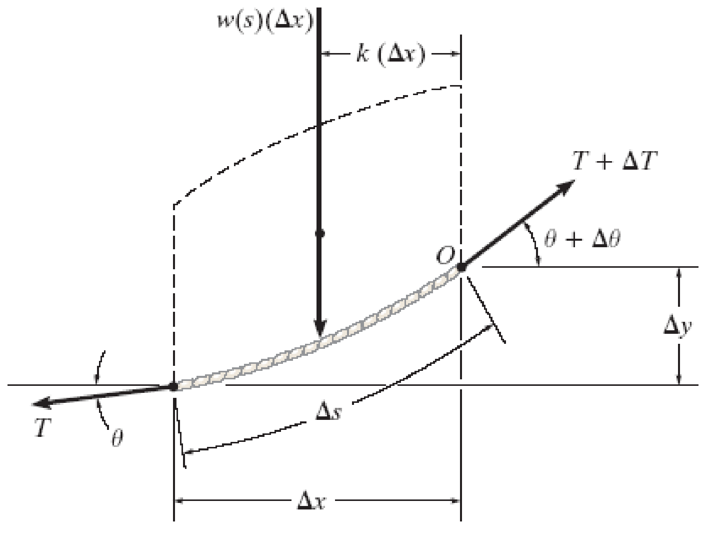
$$\ell=\frac{L}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4\mathrm{h}}{L}\right)^2}+\frac{L}{4\mathrm{h}}\sinh^{-1}\left(\frac{4\mathrm{h}}{L}\right)\right]$$

# 7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Cuando se considera el peso del cable, la función de carga llega a ser una función de la longitud de arco s más que de x
- DCL de un segmento del cable



# 7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Aplique las ecuaciones de equilibrio al sistema

$$T\cos\theta = F_H$$

$$T\sin\theta = \int w(s)\,ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H}\int w(s)\,ds$$

- Reemplace dy/dx por ds/dx para poder integrar

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}$$

# 7.4 Cables

Cable sujeto a su propio peso

- Resulta

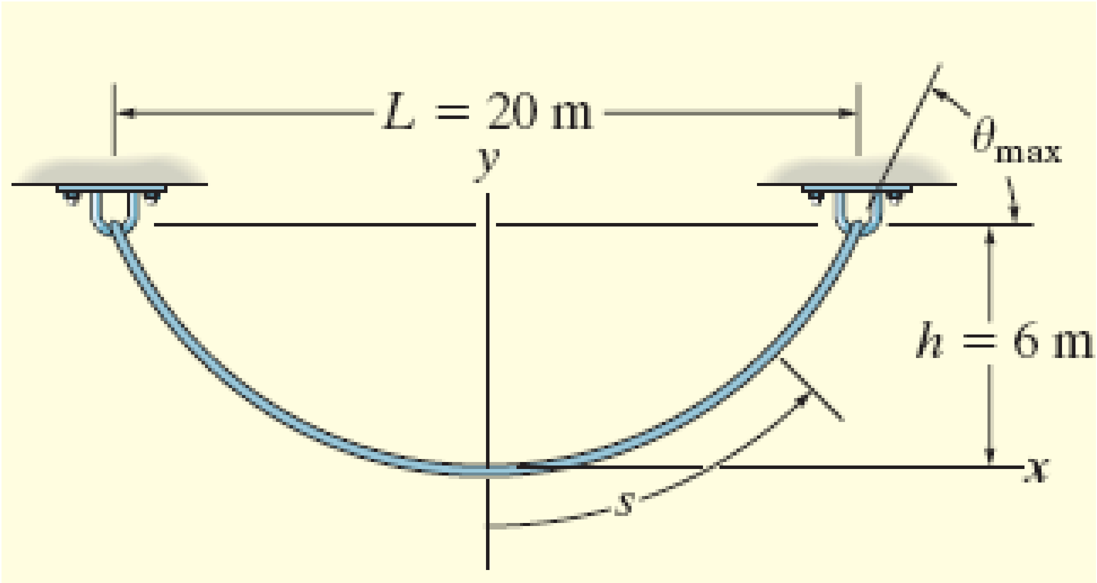
$$\frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left( \int w(s)\, ds \right)^2 \right\}^{1/2}$$

- Separando las variables e integrando

$$x = \int \frac{ds}{\left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left( \int w(s)\, ds \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

# Ejemplo

Determine la deflección de la curva, la longitud, y la máxima tensión en el cable uniforme. El cable pesa $w_0$ = 5N/m.



# Solución

Por simetría, se elige el origen en el centro del cable.

La curva de deflección se expresa como y = f(x)

$$x=\int \frac{ds}{\left[1+\left(1/F_H^2\right)\left(\int w_o\, ds\right)^2\right]^{1/2}}$$

Integraando el término en el denominador

$$x=\int \frac{ds}{\left[1+\left(1/F_H^2\right)\left(w_o s+C_1\right)^2\right]^{1/2}}$$

# Solución

Sustituimos

$$u=\left(1/F_H\right)\left(w_o s+C_1\right)$$

De manera que

$$du=\left(w_o/F_H\right)ds$$

Se hace la segunda integración

$$x=\frac{F_H}{w_o}\left\{\sinh^{-1}u+C_2\right\}$$

o

$$x=\frac{F_H}{w_o}\left\{\sinh^{-1}\left[\frac{1}{F_H}\left(w_o s+C_1\right)\right]+C_2\right\}$$

# Solución

Evaluamos las constantes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w_o \, ds$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{1}{F_H} w_o s + C_1 \right)$$

dy/dx = 0 en s = 0, da $C_1 = 0$, y s=0 en x=0 da $C_2 = 0$

Para obtener la curva de deflección, se resuelve para s

$$s = \frac{F_H}{w_o} \sinh\left( \frac{w_o}{F_H} x \right)$$

# Solución

Así, $$\frac{dy}{dx}=\sinh\left(\frac{w_o}{F_H}x\right)$$

$$y=\frac{F_H}{w_o}\cosh\left(\frac{w_o}{F_H}x\right)+C_3$$

Condición y = 0 en x = 0 ➔ $$C_3=-\frac{F_H}{w_o}$$

Para la curva de deflección resulta entonces,

$$y=\frac{F_H}{w_o}\left[\cosh\left(\frac{w_o}{F_H}x\right)-1\right]$$

Esta ecuación define una *catenaria*.

# Solución

Condición de contorno y = h en x = L/2

$$h=\frac{F_H}{w_o}\left[\cosh\left(\frac{w_o}{F_H}x\right)-1\right]$$

Ya que $w_0$ = 5N/m, h = 6m , L = 20m,

$$6\mathrm{m}=\frac{F_H}{5\mathrm{N}/m}\left[\cosh\left(\frac{50\,N}{F_H}\right)-1\right]$$

Por ensayo y error (numéricamente),

$$F_H=45.9\mathrm{N}$$

# Solution

La curva de deflección por tanto resulta,

$$y = 9.19\left[\cosh\left(0.109x\right) - 1\right]m$$

Sustit x = 10m, para la mitad de la longitud del cable s(x)

$$\frac{\ell}{2} = \frac{45.9}{5\mathrm{N}/m}\sinh\left[\frac{5\mathrm{N}/m}{45.9\mathrm{N}}\left(10m\right)\right] = 12.1\mathrm{m}$$

Así,

$$\ell = 24.2\mathrm{m}$$

La máxima tensión ocurre cuando θ es máximo, i.e. a

s = $\ell$/2 = 12.1m

# Solución

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{s=12.1\text{m}} = \tan\theta_{\max} = \frac{5\text{N}/m\,(12.1\text{m})}{45.9\text{N}} = 1.32$$

$$\theta_{\max} = 52.8^{\circ}$$

$$T_{\max} = \frac{F_H}{\cos\theta_{\max}} = \frac{45.9\text{N}}{\cos 52.8^{\circ}} = 75.9\text{N}$$

# QUIZ

1. En un miembro multi-fuerza, el miembro está sometido generalmente a __________ interna.

A) una fuerza normal B) una fuerza de corte

C) un momento flector D) todo lo anterior

2. En mecánica, la componente de la fuerza V que actúa tangente a, o a lo largo de, la sección se llama

__________ .

A) Fuerza axial B) Fuerza de corte

C) Fuerza normal D) Momento flector