

CURSO DE ESTADÍSTICA

Examen final (Solución) 3-7-2013

👉 Completa esto antes de empezar

► N° de matrícula:

► Apellidos:

► Nombre:

1 – Ejercicio

- a) En una distribución bidimensional la varianza para la variable X es $3'75$ y la varianza para la variable Y es $7'40$. ¿Puede ser el coeficiente de regresión de Y sobre X $b = 1'44$? (1 punto)
- b) Las medias en una distribución bidimensional son $M_x = 16$ $M_y = 12$, y sus varianzas verifican $5\sigma_x = 4\sigma_y$, siendo el coeficiente de correlación $r = 0'75$. ¿Qué valor se puede esperar para la variable x cuando $y = 4$? (1 punto)

Solución:

a) Es conocido por teoría

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \implies \sigma_{xy} = b\sigma_x^2 = 1'44 \cdot 3'75 = 5'4$$

de esta forma, el coeficiente de correlación será

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{5'40}{\sqrt{3'75}\sqrt{7'40}} = \frac{5'4}{5'27} = 1'025 \quad \text{absurdo.}$$

b) Se ha visto en teoría:

$$r_{xy} \equiv x - M_x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - M_y)$$

Puesto que

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{3}{4} \implies \sigma_{xy} = \frac{3}{4}\sigma_x\sigma_y \quad \text{además} \quad \sigma_x = \frac{4}{5}\sigma_y$$

reulta

$$\sigma_{xy} = \frac{3}{4}\sigma_y^2$$

Así pues,

$$b' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y} = \frac{\frac{3}{4}\sigma_y^2}{\frac{4}{5}\sigma_y} = \frac{3}{5}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

② – Ejercicio

Una máquina envasa azúcar en bolsas de peso teórico de 1 kilogramo. El peso real en kilos de las bolsas es una v.a. X que sigue una distribución $N(1, \sigma = 0'025)$. Estas bolsas se distribuyen en cajas de 30 unidades cada una. Una bolsa se considera aceptable si su peso está entre 950 y 1050 gramos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa elegida al azar sea aceptable? (1 punto)
- ¿Cuál es el porcentaje de cajas que tienen más de cuatro bolsas no aceptables? (2 puntos)
- A cada caja se le asigna un valor Y que depende del número de bolsas no aceptables que contenga, de modo que

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si el n}^\circ \text{ de bolsas no aceptables es mayor que 4} \\ 20 & \text{si el n}^\circ \text{ de bolsas no aceptables es menor que 2} \\ 10 & \text{resto} \end{cases}$$

Se pide la función de probabilidad, función de distribución y media de esta v.a. (3 puntos)

Solución:

a) Sea la v.a X = peso de una bolsa con $X \equiv N(1, \sigma = 0'025)$
 $P(\text{bolsa aceptable}) = P(0'95 < X < 1'05) = P\left(\frac{0'95 - 1}{0'025} < \frac{X - 1}{0'025} < \frac{1'05 - 1}{0'025}\right) =$
 $= P(-2 < N(0, 1) < 2) = 0'9545$

b) $P(\text{bolsa no aceptable}) = 1 - 0'9545 \approx 0'04$.
 Sea la v.a T = número de bolsas no aceptables en una caja con $T \equiv B(30, 0'04)$
 $P(\text{caja con más de 4 bolsas no aceptables}) = P(T > 4) \approx P(\mathcal{P}(1'2) > 4)$
 pues $T \approx \mathcal{P}(30 \times 0'04)$
 $P(\mathcal{P}(1'2) > 4) = 1 - 0'992 = 0'008$.

Por tanto, el 0'8% de las cajas tienen más de 4 bolsas no aceptables.

c) $Y = \begin{cases} 0 & T > 4 \\ 10 & 2 \leq T \leq 4 \\ 20 & T < 2 \end{cases}$
 $P(Y = 20) = P(T < 2) \approx P(\mathcal{P}(1'2) < 2) = P(\mathcal{P}(1'2) \leq 1) = 0'663$
 $P(Y = 0) = P(T > 4) = 0'008$
 $P(Y = 10) = 1 - (P(Y = 20) + P(Y = 0)) = 0'329$.

La función de distribución de la v.a. Y será

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 0'008 & 0 \leq y < 10 \\ 0'337 & 10 \leq y < 20 \\ 1 & 20 \leq y \end{cases}$$

$$E(Y) = \sum kP(Y = k) = 10P(Y = 10) + 20P(Y = 20) = 16'55$$

⊠

③ – Ejercicio

Se ha estudiado el beneficio anual (pérdida en el caso de valores negativos) de las empresas de una determinada localidad. y se ha caracterizado por una distribución poblacional Normal con dos millones

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



A la vista del enunciado del problema se define la v.a. y se establece su distribución poblacional

$$X \equiv \text{Beneficio o pérdida anual de las empresas} \sim N(\mu, 2)$$

Hay que estimar el valor de μ mediante intervalos de confianza. Se parte de una *m.a.s.* de $n = 25$ empresas. Puesto que las distribuciones poblacionales de la *m.a.s.* son Normales se considera como *cantidad pivotal*

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

lo que nos lleva a considerar un intervalo de confianza para μ de la forma

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$$

a) Para un nivel del confianza del 90 % resulta

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \implies P(Z > z_{0'05}) = 0'05 \iff P(Z \leq z_{0'05}) = 0'95 \implies z_{0'05} = 1'64$$

con lo cual el intervalo de confianza queda

$$I_{90} = \left(0'5 - 1'64 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}}, 0'5 + 1'64 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}} \right) = (-0'158, 1'158)$$

b) Para un nivel del confianza del 95 % resulta

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \implies P(Z > z_{0'025}) = 0'025 \iff P(Z \leq z_{0'025}) = 0'975 \implies z_{0'025} = 1'96$$

con lo cual el intervalo de confianza queda

$$I_{95} = \left(0'5 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}}, 0'5 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}} \right) = (-0'284, 1'284)$$

Es inmediato darse cuenta que

$$I_{90} \subset I_{95}$$

Por tanto al aumentar el nivel de confianza aumenta el intervalo de confianza y disminuye la precisión. Esto es así, como consecuencia de la expresión

$$P\left(|\bar{X} - \mu| \leq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

En cierta manera, la precisión se puede relacionar con la cantidad $|\bar{X} - \mu|$. Si se quiere que la precisión sea elevada entonces $|\bar{X} - \mu|$ debe ser pequeña. Si la confianza se impone grande, entonces el valor $z_{\alpha/2}$ es grande y la cota $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es grande. Como consecuencia, el intervalo de confianza es grande y disminuye la precisión. \boxtimes



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70