Probabilidad

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

Hoja de Problemas 3

Fecha de Entrega: **Martes, 19 de Febrero**

1. Xavier, Yamila y Zuriñe comparten un piso en el que hay un teléfono fijo. De las llamadas que se reciben en la casa, el 40% son para Xavier, el 20% para Yamila y el resto para Zuriñe.

   Evidentemente estos estudiantes no siempre están en casa para atender las llamadas. Xavier está fuera el 50% del tiempo, Yamila el 75% del tiempo y Zuriñe, la más casera, el 25% del tiempo. Los horarios de permanencia en casa de los tres son independientes.

   Calcular la probabilidad de que:

   (a) Si se produce una llamada, no haya nadie en el piso para atenderla.

   (b) Si alguien realiza una llamada al piso, se encuentre presente la persona a la que busca.

   (c) Si llaman en 4 ocasiones al piso, Yamila se encuentre en casa al menos una de las veces.

   (d) Si alguien está tratando de localizar a Zuriñe en el piso:

      i. La persona que está llamando a Zuriñe tenga que realizar más de 4 llamadas hasta encontrarla.

      ii. La persona que está llamando a Zuriñe tenga que realizar exactamente 3 llamadas hasta encontrarla en casa.

   (**Examen Parcial de 2017**)

   Solución:

   (a) Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Xavier } \textbf{no} \text{ se encuentra en casa,}\\
B &= \text{Yamila } \textbf{no} \text{ se encuentra en casa,}\\
C &= \text{Zuriñe } \textbf{no} \text{ se encuentra en casa.}
\end{aligned}
$$

   Según indica el enunciado, se tiene que

$$P(A) = 0.50, \qquad P(B) = 0.75, \qquad P(C) = 0.25,$$

   y además los tres sucesos son **independientes**. Por lo tanto, la probabilidad de que, cuando se produce una llamada, no haya nadie en el piso para atenderla, es

De acuerdo con el enunciado,

$$P(X) = 0.4, \qquad P(Y) = 0.2, \qquad P(Y) = 0.4.$$

Definimos además el suceso

$$V = \text{cuando se recibe una llamada, la persona a la que llaman está en la vivienda,}$$

para el cual se verifica

$$P(V^c|X) = P(A) = 0.50, \qquad P(V^c|Y) = P(B) = 0.75, \qquad P(V^c|Y) = P(C) = 0.25,$$

y por tanto

$$P(V|X) = 0.50, \qquad P(V|Y) = 0.25, \qquad P(V^c|Y) = 0.55.$$

Aplicando el **teorema de la probabilidad total**, obtenemos que la probabilidad de que al producirse una llamada se encuentre en el piso la persona a la que llaman es

$$P(V) = P(X)P(V|X) + P(Y)P(V|Y) + P(Z)P(V|Z) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.75 = \boxed{\mathbf{0.55}}$$

(c) Cada vez que llaman a Yamila, la probabilidad de que se encuentre fuera de casa es

$$P(B) = 0.75.$$

Luego, si le llaman en 4 ocasiones, se tendrá

$$\begin{aligned} P(\text{Yamila se encuentra alguna vez en casa}) &= 1 - P(\text{Yamila no se encuentra ninguna vez en casa}) \\ &= 1 - 0.75^4 \\ &= \boxed{\mathbf{0.6836}} \end{aligned}$$

(d) Cada vez que llaman a Zuriñe, la probabilidad de que ésta se encuentre fuera es

$$P(C) = 0.25,$$

y por tanto, la de que esté en el piso es

$$P(C^c) = 0.75.$$

En consecuencia:

i. La probabilidad de que la persona que busca a Zuriñe tenga que llamar más de 4 veces para encontrarla es

$$P(\text{más de 4 llamadas}) = P(N > 4) = 0.25^4 = \boxed{\mathbf{0.0039}}$$

ii. La probabilidad de que necesite exactamente 3 llamadas es

Calcular $P[B \cup C]$.

Solución: Del enunciado se deduce de manera inmediata que

$$P(A) = 1 - (A^c) = 1 - 0.6 = 0.4,$$

y también, por las leyes de Morgan, que

$$P[A \cup B \cup C] = 1 - P[A^c \cap B^c \cap C^c] = 1 - 0.1 = 0.9.$$

Observemos además que

$$P(A) = P[A \cap (B \cup C)] + P[A \setminus (B \cup C)],$$

de donde, despejando, se obtiene que

$$P[A \setminus (B \cup C)] = P(A) - P[A \cap (B \cup C)] = 0.4 - 0.3 = 0.1.$$

De aquí se deduce que

$$P(B \cup C) = P[A \cup B \cup C] - P[A \setminus (B \cup C)] = 0.9 - 0.1 = \boxed{\mathbf{0.8}}$$

Observación: Hay otras formas equivalentes de llegar a este resultado.

3. Se sabe que el 10% de las personas de cierta población padecen del síndrome de Hasti. Para detectarlo se utiliza una prueba que da positivo en el 95% de los pacientes que sufren esta enfermedad. Además, el 1% de los pacientes sanos dan también positivo en la prueba.

   (a) Obtener la probabilidad de que la prueba clasifique a una persona como enferma de este síndrome.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona padezca realmente el síndrome de Hasti si la prueba lo ha establecido como tal?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sufra del síndrome de Hasti si la prueba ha indicado que está sana?

   (**Examen Parcial de 2016**)

   Solución: Sean los sucesos,

$$\begin{aligned} E &= \text{la persona padece la enfermedad,} \\ \overline{E} &= \text{la persona está sana (\textbf{no} padece la enfermedad);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \text{la prueba indica que la persona padece la enfermedad (prueba positiva),} \\ \overline{P} &= \text{la prueba indica que la persona está sana (prueba negativa).} \end{aligned}$$

El enunciado nos indica que

$$\begin{aligned} P(E) &= 0.1, \\ P(\overline{E}) &= 0.9. \end{aligned}$$

$$P(P) = P(E) \times P(P|E) + P(\overline{E}) \times P(P|\overline{E}) = 0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.01 = \boxed{0.104}$$

(b) Ahora estamos interesados en hallar $P(E|P)$. Utilizando el **teorema de Bayes**:

$$P(E|P) = \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{P(E) \times P(P|E)}{P(P)} = \frac{0.1 \times 0.95}{0.104} = \boxed{\mathbf{0.9135}}$$

(c) Por último debemos determinar la probabilidad $P(E|\overline{P})$. Aplicando nuevamente el **teorema de Bayes**:

$$P(E|\overline{P}) = \frac{P(E \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(E) \times P(\overline{P}|E)}{P(\overline{P})} = \frac{0.1 \times 0.05}{1 - 0.104} = \frac{0.005}{0.896} = \boxed{\mathbf{0.0056}}$$

4. Un armario contiene 10 pares de zapatos. Si se selecciononan al azar 8 de estos calzados, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un par que case?

Solución:

$$\begin{aligned} P(\text{algún par coincide}) &= 1 - P(\text{ningún par coincide}) \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{8} \times 2^8}{\binom{20}{8}} \\ &= 1 - \frac{20 \times 18 \times 16 \times 14 \times 12 \times 10 \times 8 \times 6}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13} \\ &= \boxed{\mathbf{0.9085}} \end{aligned}$$

5. Una urna contiene 8 bolas rojas y 7 bolas blancas. Supongamos que las bolas se extraen al azar, de una en una y sin reemplazamiento.

Calcular la probabilidad de que se extraigan exactamente 4 bolas rojas antes de extraer la tercera bola blanca.

(**Examen Parcial de 2018**)

Solución: Para que se extraigan exactamente 4 bolas rojas antes de extraer la tercera bola blanca tienen que aparecer un total de cuatro bolas rojas y dos blancas en las seis primeras extracciones (en cualquier orden), y una bola blanca en la séptima extracción.

Por tanto, la probababilidad requerida es

$$\begin{aligned} P(\text{aparecen 4 bolas rojas antes de la } 3^a \text{ bola blanca}) &= \frac{8}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \binom{6}{2} \\ &= \frac{8}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times 15 \end{aligned}$$