

HOJA DE PROBLEMAS 6

FECHA DE ENTREGA: **Miércoles, 13 de Marzo**

1. El porcentaje de sustancias genéticamente modificadas que contienen los productos alimentarios que se venden en el supermercado *Naturaliisima* es una variable aleatoria, G , con función de densidad,

$$f_G(x) = \begin{cases} \theta x & \text{si } x \in [5, 15], \\ 0 & \text{si } x \notin [5, 15], \end{cases}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es una constante desconocida.

- (a) Hallar el valor de la constante θ para que f_G sea una función de densidad.
- (b) Hallar la función de distribución de G , $F_G(t) = P(G \leq t)$.
- (c) Si se elige al azar uno de los alimentos que se venden en *Naturaliisima*, ¿cuál es la probabilidad de que contenga más de un 9% de sustancias transgénicas?
- (d) Una niña entra al supermercado para comprar su merienda. No tiene preferencias en cuanto a qué producto merendar, pero quiere contenga menos de un 9% de transgénicos. Si selecciona alimentos al azar y lee sus etiquetas hasta encontrar uno que cumpla este requisito, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que mirar las etiquetas de más de 6 productos?
- (e) Uno de los dependientes de *Naturaliisima* ha ido separando en un almacén los productos en los que ha detectado un porcentaje de transgénicos superior al 9%. Si se selecciona aleatoriamente uno de los alimentos de dicho almacén, ¿cuál es la probabilidad de que su contenido en sustancias genéticamente modificadas sea inferior al 13%?

(Examen Final de Junio de 2016)

Solución:

- (a) Para que f_G sea una función de densidad debe verificar que

i. $f_G(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

ii. $\int_5^{15} f_G(x) dx = 1$

Es evidente que, para que se cumpla $f_G(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el parámetro desconocido debe verificar $\theta \geq 0$.

Además, para que la función integre 1 en el soporte se debe satisfacer

$$1 = \int_5^{15} \theta x dx = \theta \left[\frac{x^2}{2} \right]_5^{15} = \theta \frac{15^2 - 5^2}{2} = \theta \frac{225 - 25}{2} = 100 \theta,$$

de donde se deduce que

$$\theta = \frac{1}{100}.$$

Luego la función de densidad de G es

$$f_G(x) = \begin{cases} \frac{x}{100} & \text{si } x \in [5, 15], \\ 0 & \text{si } x \notin [5, 15], \end{cases}$$

(b) La **función de distribución** de G es

$$F_G(t) = P[G \leq t] = \int_{-\infty}^t f_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 5, \\ \frac{t^2 - 25}{100} & \text{si } 5 \leq t \leq 15, \\ 1 & \text{si } t \geq 15. \end{cases}$$

(c) La probabilidad de que un alimento elegido al azar en *Naturaliisima* contenga más de un 9% de sustancias transgénicas es

$$P(G > 9) = 1 - P(G \leq 9) = 1 - F_G(9) = 1 - \frac{9^2 - 25}{200} = 1 - \frac{56}{200} = 1 - 0.28 = \boxed{0.72}$$

(d) Cada vez que la niña elige un producto de supermercado, la probabilidad de que contenga menos de un 9% de transgénicos es la complementaria de la calculada en el apartado (a):

$$P(G < 9) = 1 - P(G \geq 9) = 1 - 0.72 = 0.28$$

Como además elige los productos de forma independiente, la distribución de la variable aleatoria N = número de alimentos examinados hasta encontrar uno con menos del 9% de transgénicos, es

$$N \sim Ge(0.28).$$

Luego la probabilidad de que la niña tenga que mirar las etiquetas de más de 6 productos es

$$P(N > 6) = 0.72^6 = \boxed{0.1393}$$

(e) En el almacén sólo hay productos con un porcentaje de transgénicos superior al 9%. La probabilidad de que uno de estos productos contenga menos de un 13% es la **probabilidad condicionada**

$$\begin{aligned} P(G < 13 \mid G > 9) &= \frac{P((G < 13) \cap (G > 9))}{P(G > 9)} \\ &= \frac{P(9 < G < 13)}{P(G > 9)} \\ &= \frac{F_G(13) - F_G(9)}{0.72} \\ &= \frac{\frac{13^2 - 25}{200} - \frac{9^2 - 25}{200}}{0.72} \\ &= \frac{88/200}{0.72} \\ &= \frac{0.44}{0.72} \\ &= \boxed{0.6111} \end{aligned}$$

2. Nos proponen participar en el siguiente juego: elegimos un número del 1 al 6 y la banca lanza 3 dados equilibrados.

- Si el número que hemos elegido sale en los tres dados, cobramos 300 €,
- Si sale en dos de los dados, cobramos 200 €,
- Si sale en uno, cobramos 100 €,
- Si no sale en ninguno, de los dados perdemos 100 €.

La banca argumenta que, al jugar con tres dados, tenemos el triple de oportunidades y además, a veces se ganan más de 100 €, que es lo máximo que podemos llegar a perder en cada partida.

¿Es el juego tan ventajoso como parece? ¿Participarías en él?

Razonar la respuesta.

Solución: **No, este juego no es nada ventajoso.**

Llamemos G a la ganancia que podemos obtener si participamos en el juego. Observemos en primer lugar que la probabilidad de perder dinero si jugamos es

$$P(\text{perder dinero}) = P(G < 0) = P(G = -100) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787,$$

y por tanto

$$P(\text{ganar dinero}) = 1 - 0.5787 = 0.4213,$$

luego

$$P(\text{perder dinero}) > P(\text{ganar dinero}),$$

lo cual ya podría quitarnos las ganas de apostar.

Pero además, la **ganancia esperada**, $E(G)$, es (bastante) negativa, ya que

$$\begin{aligned}P(G = -100) &= 0.5787, \\P(G = 100) &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472, \\P(G = 200) &= 3 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0.0694, \\P(G = 300) &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.0046,\end{aligned}$$

por lo que

$$E(G) = -100 \times 0.5787 + 100 \times 0.3472 + 200 \times 0.0694 + 300 \times 0.0046 = -\mathbf{7.89},$$

por lo que, definitivamente, **no es conveniente participar en este juego.**

3. Demostrar que, si $N \sim Ge(p)$, entonces para $h, k \in \mathbb{N}^+$ se verifica

$$P(N \geq h + k \mid N > h) = P(N \geq k).$$

(Examen Parcial de 2018)

Solución: Recordemos que si $N \sim Ge(p)$, entonces, llamando $q = 1 - p$, se verifica, para cualquier $m \in \mathbb{N}^+$,

$$(a) \quad P(N = m) = q^{m-1}p,$$

$$(b) \quad P(N > m) = q^m,$$

y por consiguiente, teniendo en cuenta que la distribución geométrica sólo toma valores naturales positivos, también se verifica

$$(c) \quad P(N \geq m) = P(N > m - 1) = q^{m-1}.$$

Utilizando (b) y (c) tenemos que

$$P(N \geq k) = P(N > k - 1) = q^{k-1},$$

y por otra parte que

$$\begin{aligned} P(N \geq h + k \mid N > h) &= \frac{P[(N > h + k - 1) \cap (N > h)]}{P(N > h)} \\ &= \frac{P(N > h + k - 1)}{P(N > h)} \\ &= \frac{q^{h+k-1}}{q^h} \\ &= \frac{q^h \times q^{k-1}}{q^h} \\ &= q^{k-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, efectivamente, se verifica

$$P(N \geq h + k \mid N > h) = P(N \geq k) = q^{k-1}.$$

c.q.d.

4. El número de clientes que acuden a una tienda de videojuegos sigue una distribución de Poisson con una media de 2 clientes por hora.

- (a) Hallar la probabilidad de que entre las 10:30 y las 11:30
 - i. llegue a este establecimiento algún cliente,
 - ii. acuda un único cliente.
- (b) Si en la última hora ha entrado a la tienda al menos un cliente, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido exactamente uno?
- (c) Acaba de entrar en la tienda un cliente. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra menos de media hora hasta que llegue el siguiente?
- (d) Ha transcurrido ya bastante tiempo desde que entró el último cliente. Calcular la probabilidad de que, a partir de este instante, pasen más de tres horas hasta que llegue el siguiente.
- (e) Calcular la probabilidad de que de 12:00 a 14:00 entren en la tienda más de dos clientes.

(Examen Final de Mayo de 2017)

Solución: Para cada $k \in \mathbb{R}^+$ definimos la variable aleatoria

$N_k =$ número de clientes que llegan a la tienda en k horas

La distribución de cada una de estas variables es

$$N_k \sim Po(2k)$$

(a) Sea

$N_1 =$ número de clientes en 1 hora

Puesto que $N_1 \sim Po(2)$, se tiene que

i. $P(N_1 \geq 1) = 1 - P(N_1 = 0) = 1 - e^{-2} = \boxed{0.8647}$

ii. $P(N_1 = 1) = e^{-2} \times \frac{2^1}{1!} = e^{-2} = \boxed{0.2707}$

(b) La probabilidad de que en la última hora haya llegado exactamente un cliente, sabiendo que ha llegado alguno es la probabilidad condicionada

$$P(N_1 = 1 | N_1 \geq 1) = \frac{P((N_1 = 1) \cap (N_1 \geq 1))}{P(N_1 \geq 1)} = \frac{P(N_1 = 1)}{P(N_1 \geq 1)} = \frac{0.2707}{0.8647} = \boxed{0.3130}$$

(c) La probabilidad de que transcurra menos de media hora hasta que llegue el siguiente cliente es la probabilidad de que en este periodo se produzca alguna llegada.

Dado que $N_{\frac{1}{2}} \sim Po(1)$, dicha probabilidad es

$$P\left(N_{\frac{1}{2}} \geq 1\right) = 1 - P\left(N_{\frac{1}{2}} = 0\right) = 1 - e^{-1} = \boxed{0.6321}$$

(d) La probabilidad de que pasen más de tres horas hasta la llegada del próximo cliente es la probabilidad de que en tres horas no entre nadie.

Dado que $N_3 \sim Po(6)$,

$$P(N_3 = 0) = e^{-6} = \boxed{0.0025}$$

(e) Sea

$N_2 =$ número de clientes que acuden a la tienda en 2 horas

Se tiene que $N_2 \sim Po(4)$, y por tanto, la probabilidad de que entre las 12:00 y las 14:00 lleguen a la tienda más de dos clientes es

$$\begin{aligned} P(N_2 > 2) &= 1 - P(N_2 \leq 2) \\ &= 1 - P(N_2 = 0) - P(N_2 = 1) - P(N_2 = 2) \\ &= 1 - e^{-4} - e^{-4} \cdot 4 - e^{-4} \cdot \frac{4^2}{2!} \\ &= \boxed{0.7619} \end{aligned}$$

5. La contaminación por benceno de los atunes del Mar de Arafura, medida en microgramos por metro cúbico ($\mu g/m^3$), es una variable aleatoria, B , con función de distribución

$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3, \\ \frac{x^2 - 9}{40} & \text{si } 3 \leq x < 7, \\ 1 & \text{si } x \geq 7. \end{cases}$$

El límite legal (LL) de benceno para el consumo de pescado está fijado en $5 \mu g/m^3$, aunque estudios médicos indican que este valor frontera no asegura que se mitiguen los efectos cancerígenos del benceno, por lo que el límite aconsejado por los médicos (AM) es de $4 \mu g/m^3$.

- (a) Hallar la probabilidad de que un atún elegido al azar en el Mar de Arafura supere el límite AM.
- (b) Se ha comprobado que uno de los atunes pescados en esta región **no** supera el límite LL. ¿Cuál es la probabilidad de que este atún **sí** supere el límite AM?
- (c) Un barco pesquero ha capturado un total de 6 atunes en una de sus salidas al Mar de Arafura.
- Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos superen el límite AM.
 - ¿Cuántos de los atunes pescados se espera que superen el límite AM?
- (d) Otro barco se hace al Mar de Arafura con el encargo de traer un atún que respete el límite AM (es decir, que **no** lo supere). Sus pescadores capturan atunes, los someten a un test de contaminación por benceno y, en caso de que superen el límite AM, los devuelven al agua.
- ¿Cuál es la probabilidad de que tengan que pescar **menos de 7** atunes hasta dar con uno que respete el límite AM?
 - ¿Cuántos atunes se espera que tengan que capturar hasta encontrar uno como el que buscan?

(Examen Final de Mayo de 2018)

Solución: Puesto que F_B no presenta discontinuidades, B es una variable aleatoria continua.

- (a) El límite de benceno aconsejado por los médicos (AM) para el consumo de pescado es de $4 \mu g/m^3$. Por tanto, la probabilidad de que un atún elegido al azar supere dicho límite es

$$\begin{aligned}
 P(B > 4) &= 1 - P(B \leq 4) \\
 &= 1 - F_B(4) \\
 &= 1 - \frac{4^2 - 9}{40} \\
 &= 1 - \frac{16 - 9}{40} \\
 &= 1 - \frac{7}{40} \\
 &= 1 - 0.175 \\
 &= \boxed{0.825}
 \end{aligned}$$

- (b) El límite legal (LL) de benceno para el consumo de pescado está fijado en $5 \mu g/m^3$. Luego, si se sabe que un atún no supera este límite, la probabilidad de que **sí** supere el límite AM es

$$\begin{aligned}
 P(B > 4 \mid B < 5) &= \frac{P(B > 4 \cap B < 5)}{P(B < 5)} \\
 &= \frac{P(4 < B < 5)}{P(B < 5)} \\
 &= \frac{F_B(5) - F_B(4)}{F_B(5)} \\
 &= \frac{\frac{5^2 - 9}{40} - \frac{4^2 - 9}{40}}{\frac{5^2 - 9}{40}} \\
 &= \frac{9}{16} \\
 &= \boxed{0.5625}
 \end{aligned}$$

Observamos que esta probabilidad es inferior a la calculada en el apartado anterior, ya que la información que proporciona el hecho de saber que el atún capturado no supera los $5 \mu g/m^3$ hace **más improbable** que dicho pescado supere los $4 \mu g/m^3$.

- (c) Un barco pesquero ha capturado un total de 6 atunes en una de sus salidas al Mar de Arafura. Para cada atún, la probabilidad de que supere el límite AM es, según hemos visto en el apartado (a),

$$P(B > 4) = 0.825.$$

Además, los atunes se pescan independientemente unos de otros. Por consiguiente, la variable aleatoria

A = número de atunes capturados que superan el límite AM,

sigue una distribución

$$A \sim \text{Bin}(n = 6, p = 0.825).$$

- i. La probabilidad de que exactamente cuatro de ellos superen el límite AM es

$$P(A = 4) = \binom{6}{4} \times 0.825^4 \times (1 - 0.825)^2 = 15 \times 0.825^4 \times 0.175^2 = \mathbf{0.2128}.$$

- ii. El número de atunes que se espera que superen el límite AM es

$$E(A) = 6 \times 0.825 = \mathbf{4.95} \text{ atunes.}$$

- (d) Otro barco se hace al Mar de Arafura con el encargo de traer un atún que respete el límite AM (es decir, que **no** lo supere). Para cada atún, la probabilidad de respetar el límite AM es la complementaria de que lo supere, esto es

$$P(B \leq 4) = 1 - P(B > 4) = 1 - 0.825 = 0.175.$$

Como además los atunes se capturan de manera independiente, la distribución de la variable aleatoria

N = número de atunes capturados hasta dar con uno que respete el límite AM,

es

$$N \sim \text{Ge}(0.175).$$

- i. La probabilidad de que tengan que pescar **menos de 7** atunes hasta dar con uno que respete el límite AM es

$$P(N < 7) = P(N \leq 6) = 1 - P(N > 6) = 1 - (1 - 0.175)^6 = 1 - 0.825^6 = 1 - 0.3153 = \mathbf{0.6847}.$$

- ii. El valor esperado de la variable aleatoria N es

$$E(N) = \frac{1}{0.175} = \mathbf{5.7143} \text{ atunes.}$$