Problemas Propuestos

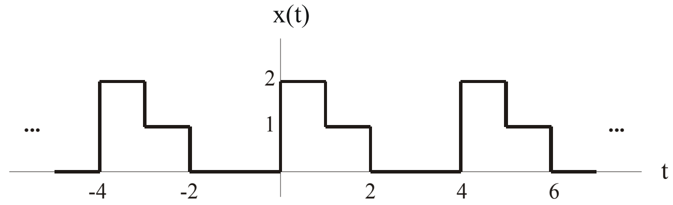
PROBLEMA 4.1

Obtenga el *desarrollo en serie de Fourier* (DSF) de las siguientes señales:

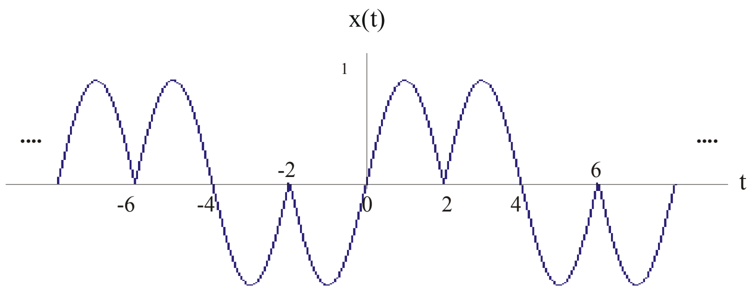
a.- Coseno rectificado en media onda.

b.- Señal periódica de periodo 2; siendo la señal en el intervalo $-1<t<1$ $x(t)=e^{-t}$:

c.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



d.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



Resultado

a.- $a_k = \frac{A}{4} \cdot \left[sinc\left(\frac{k+1}{2}\right) + sinc\left(\frac{k-1}{2}\right) \right]$

b.- $a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 - 1}{(1 + jk\pi) \cdot e^{(1+jk\pi)}}$

c.- $a_k = \frac{j}{2k\pi} \cdot \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 2 + (-1)^k \right)$

d.- $a_k = \frac{j}{2} \cdot \left[sinc\left(\frac{k+2}{2}\right) - sinc\left(\frac{k-2}{2}\right) + sinc(k-2) - sinc(k+2) \right]$

PROBLEMA 4.2

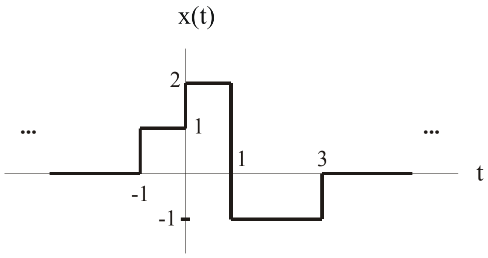
Obtenga la transformada de Fourier de la siguientes señales:

a.- Pulso coseno al cuadrado:

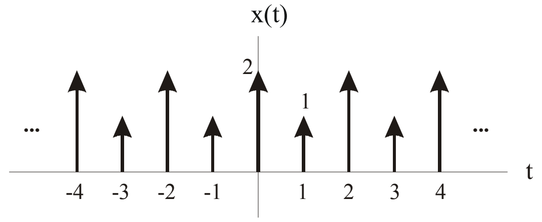
$$x(t) = \begin{cases} A \cdot cos^2(\omega_0 t), & |t| \le \frac{T_0}{4} \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{4} \end{cases} \quad ; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

b.- Señal $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

c.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



d.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



Resultado

a.- $X(\omega) = \dfrac{AT_0}{8}\left[2 \cdot sinc\left(\dfrac{\omega T_0}{4\pi}\right) + sinc\left(\dfrac{(\omega - 2\omega_0)T_0}{4\pi}\right) + sinc\left(\dfrac{(\omega + 2\omega_0)T_0}{4\pi}\right)\right]$

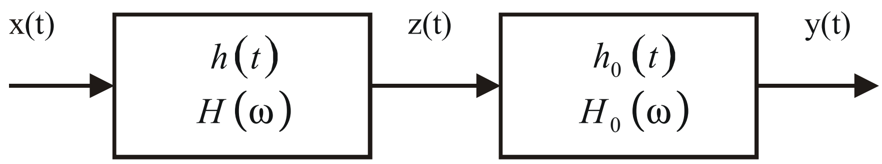
b.- $X(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

c.- $X(\omega) = sinc\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right) \cdot e^{j\frac{\omega}{2}} + 2 \cdot sinc\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} - 2 \cdot sinc\left(\dfrac{\omega}{\pi}\right) \cdot e^{-j2\omega}$

d.- $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\left(2 + (-1)^k\right) \cdot \delta(\omega - k\pi)$

PROBLEMA 4.3

Dada la siguiente interconexión de sistemas LTI:

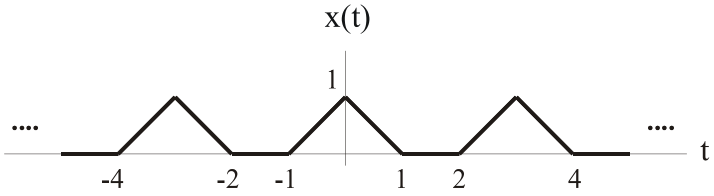


donde:

$$h(t) = e^{-|t|} \qquad\qquad H_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2 \\ 0, & resto\ \omega \end{cases}$$

Obtenga la señal $y(t)$ en los siguientes casos:

a.- $x(t)$ es la señal periódica representada en la siguiente figura:



b.- $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \delta(t - n\pi)$

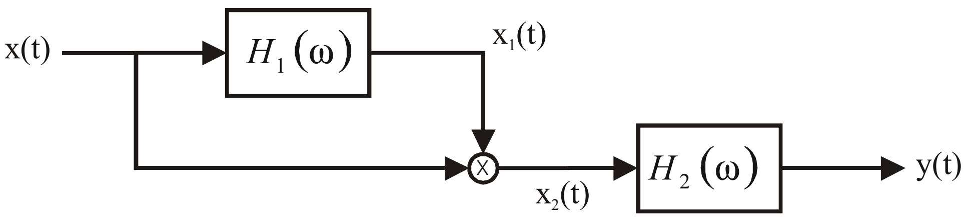
Resultado

a.- $y(t) = \frac{2}{3}$

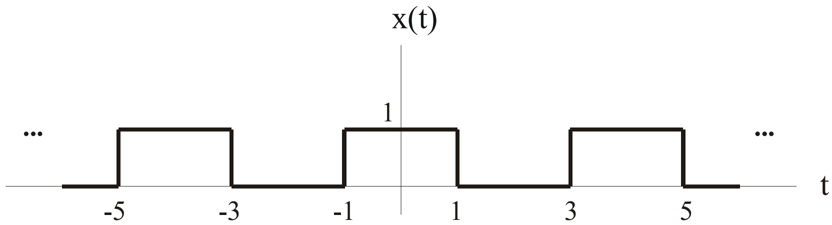
b.- $y(t) = \frac{2}{\pi} \cdot cos(t)$

PROBLEMA 4.4

En el sistema de la figura:



se aplica a la entrada la señal periódica $x(t)$:



Siendo la respuesta en frecuencia para ambos filtros las siguientes:

$$H_1(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{4}<|\omega|<\dfrac{3\pi}{4}\\ 0, & resto\ \omega\end{cases} \qquad H_2(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\dfrac{3\pi}{2}\\ 0, & resto\ \omega\end{cases}$$

Bajo las condiciones del enunciado se pide representar:

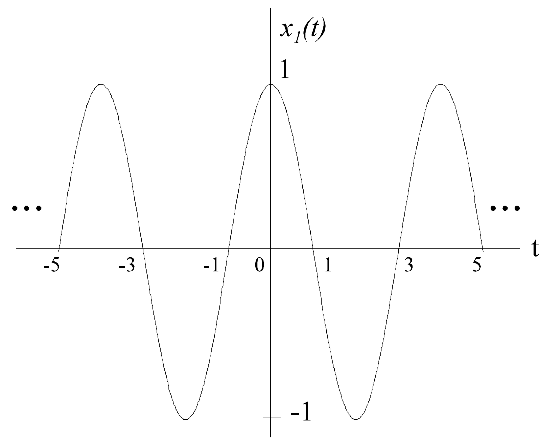
a.- La señal $x_1(t)$.

b.- La señal $x_2(t)$.

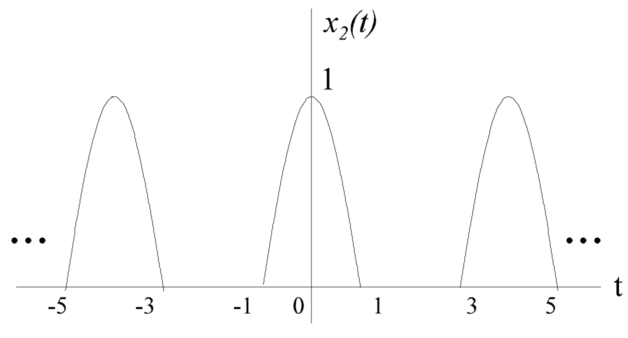
c.- El espectro de la señal de salida $Y(\omega)$.

Resultado

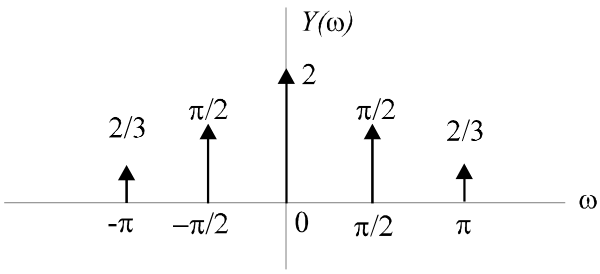
a.-



b.-

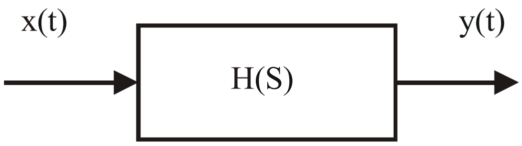


c.-



PROBLEMA 4.5

Dado el sistema causal de la figura:



donde la función de transferencia del sistema es:

$$H(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Se pide:

a.- Calcular la respuesta en frecuencia y representar gráficamente su módulo.

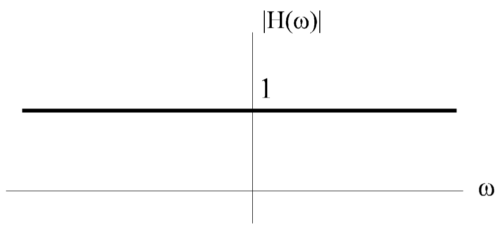
b.- Obtener la respuesta del sistema ante la entrada:

$$x(t) = 2 \cdot cos(t) + 3 \cdot cos(10t)$$

Resultado

a.-

$$H(\omega) = \frac{(\omega^2 - 1) + j\omega}{(\omega^2 - 1) - j\omega}$$



b.- $y(t) = 2 \cdot cos(t + \pi) + 3 \cdot cos(10t + 0{,}2013)$

PROBLEMA 4.6

Las siguientes ecuaciones diferenciales caracterizan a cuatro sistemas LTI causales:

a.- $\dfrac{d^2\,x(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{d\,y(t)}{d\,t} + 2\,y(t)$

b.- $x(t) = \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{d\,y(t)}{d\,t} + 2\,y(t)$

c.- $\dfrac{d\,x(t)}{d\,t} = \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{d\,y(t)}{d\,t} + 2\,y(t)$

d.- $\dfrac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{d\,y(t)}{d\,t} + 2\,y(t)$

Identifique cada una de ellas con algunos de los siguientes tipos de filtros:

- Filtro paso bajo.
- Filtro paso alto.
- Filtro paso banda.
- Filtro banda eliminada.

Resultado

a.- Filtro paso alto.

b.- Filtro paso bajo.

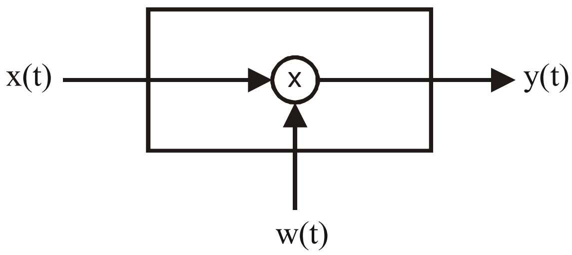
c.- Filtro paso banda.

d.- Filtro banda eliminada.

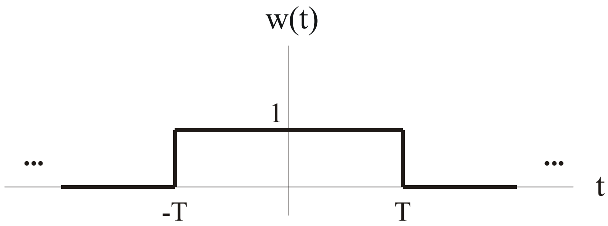
PROBLEMA 4.7

En aplicaciones prácticas, cuando la duración de una señal es demasiado grande, su análisis espectral debe realizarse seleccionando segmentos de una longitud razonable que posteriormente serán estudiados uno a uno. A continuación se pretende observar las diferencias que existen entre el espectro de la señal original y el correspondiente a un segmento de dicha señal.

La figura 1 representa un sistema cuya misión es seleccionar un determinado tramo de la señal de entrada $x(t)$.



El procedimiento consiste en multiplicar dicha señal por una función $w(t)$ (también llamada ventana) como la que se muestra la figura 2.



Tomando $x(t) = 20 \cdot cos(15t)$, calcule y represente el espectro de la señal de salida para los siguientes valores de T:

a.- $T \to \infty$

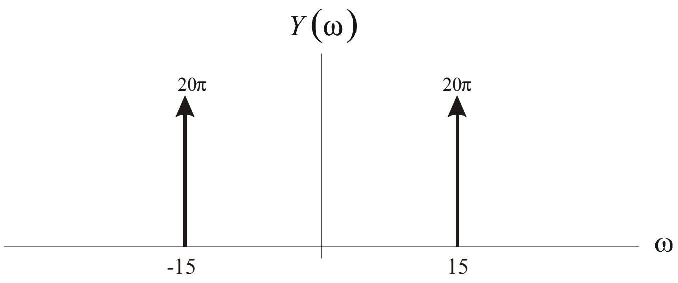
b.- $T = \pi$

c.- $T = \dfrac{\pi}{20}$

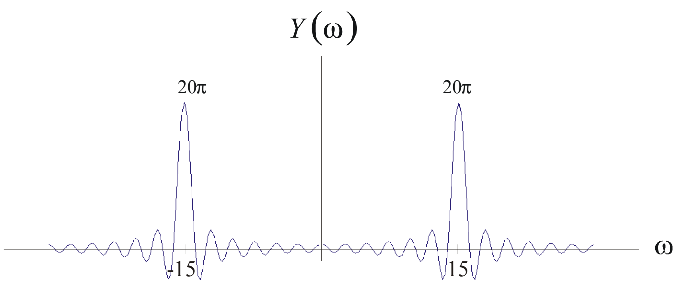
Comente como influye la duración de la ventana en el espectro de la señal de salida.

Resultado

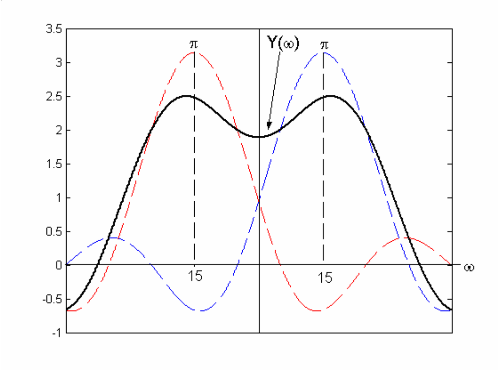
a.-



b.-



c.-



Comentario:

Como se puede apreciar, a medida que decrece la anchura de la ventana, la *interferencia* (*distorsión*) que existe entra ambas *sinc*'*s* aumenta. Este es el efecto que se puede apreciar en el dominio de la frecuencia, mientras que visto desde un punto de vista temporal se aprecia como ese decremento en la anchura de la ventana provoca una menor obtención de información de la señal, lo que repercute en una distorsión en el estudio de la misma. Además de la distorsión, se puede apreciar una existencia de energía en zonas de frecuencia en las que antes no existía, lo cual se conoce como *fugas espectrales*.

PROBLEMA 4.8

En el sistema de la figura 1 se pretende estudiar las señales existentes en determinados puntos del mismo cuando a la entrada se aplica la señal $x(t) = 2\,cos(\omega_1\, t)$.

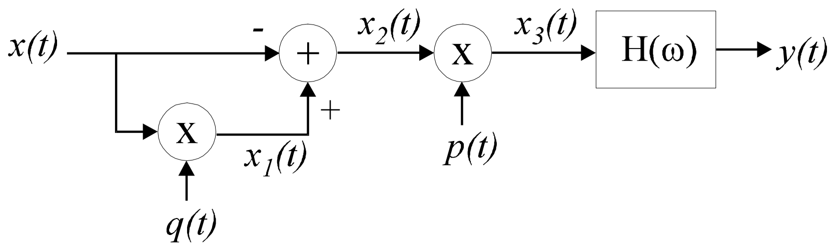


Figura 1

Del sistema conocemos los siguientes datos:

- Expresión temporal de la señal $q(t)$: $q(t) = 2\,cos(3\,\omega_1\, t)$
- Expresión temporal de la señal $p(t)$: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, cuyo periodo fundamental es $T = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\omega_1}$.
- Respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega)$:

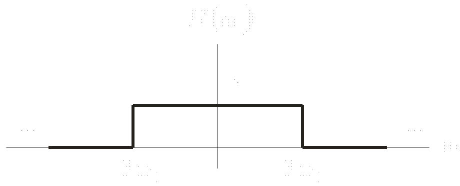


Figura 2

Obtenga:

a.- Expresión de $x_2(t)$ y expresión literal y representación gráfica de $X_2(\omega)$.

b.- Expresión de $x_3(t)$ y de $X_3(\omega)$.

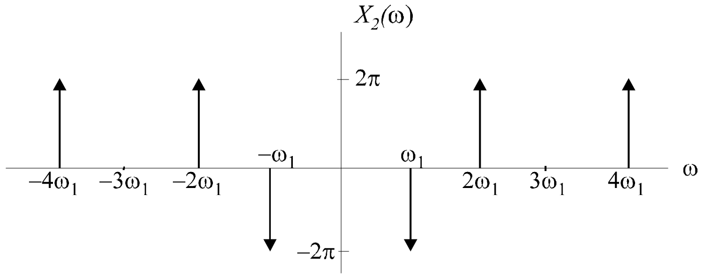
c.- Representación gráfica de $Y(\omega)$ y expresión de $y(t)$.

Resultado

a.-

$$x_2(t) = -2\,cos(\omega_1\,t) + 2\,cos(2\,\omega_1\,t) + 2\,cos(4\,\omega_1\,t)$$

$$X_2(\omega) = 2\pi\,[-\delta(\omega-\omega_1) - \delta(\omega+\omega_1) + \delta(\omega-2\,\omega_1) + \delta(\omega+2\,\omega_1) + \delta(\omega-4\,\omega_1) + \delta(\omega+4\,\omega_1)]$$

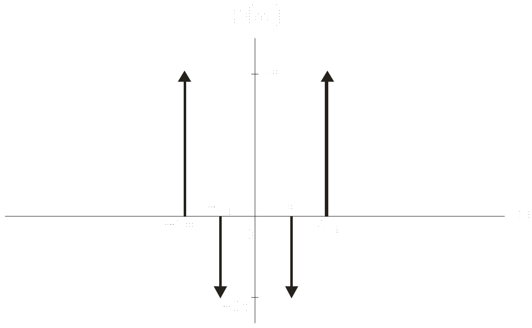


b.-

$$x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-2\,cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 2\,cos\left(2\frac{\pi}{3}n\right) + 2\,cos\left(4\frac{\pi}{3}n\right)\right]\cdot\delta\left(t - n\frac{\pi}{3\,\omega_1}\right)$$

$$X_3(\omega) = 6\,\omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty}[-\delta(\omega-\omega_1-k\,6\,\omega_1) - \delta(\omega+\omega_1-k\,6\,\omega_1) + \delta(\omega-2\,\omega_1-k\,6\,\omega_1) + \delta(\omega+2\,\omega_1-k\,6\,\omega_1) + \delta(\omega-4\,\omega_1-k\,6\,\omega_1) + \delta(\omega+4\,\omega_1-k\,6\,\omega_1)]$$

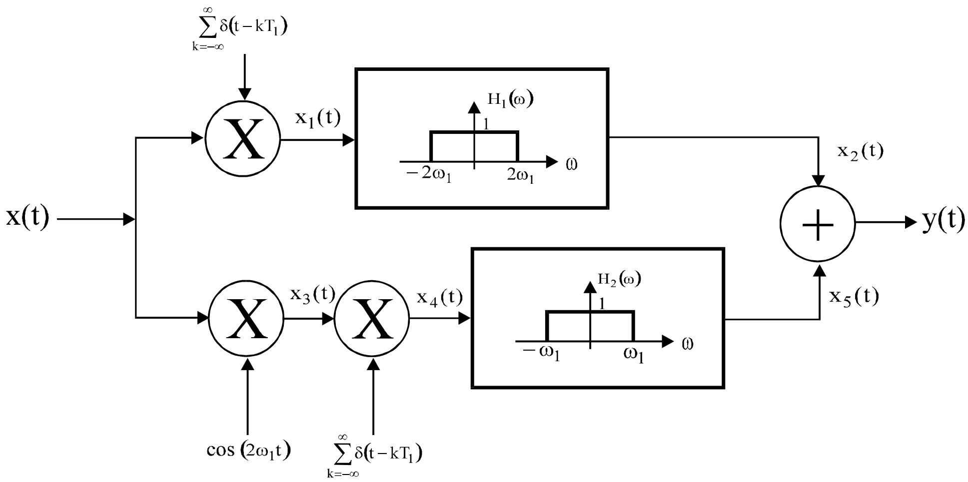
c.-



$$y(t) = -2\,cos(\omega_1\, t) + 4\,cos(2\,\omega_1\, t)$$

PROBLEMA 4.9

En el sistema de la siguiente figura:



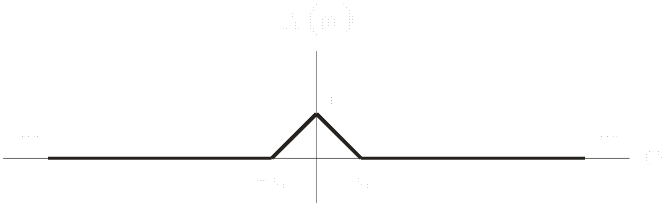
sabiendo que $x(t) = \dfrac{\omega_1}{2\pi} sinc^2\left(\dfrac{\omega_1}{2\pi} t\right)$ y que $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$, se pide:

a.- Obtener y representar los espectros de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ e $y(t)$.

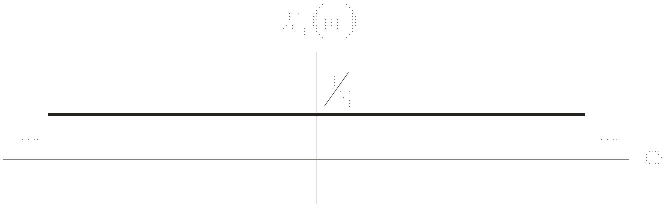
b.- Obtener la expresión de $y(t)$.

Resultado

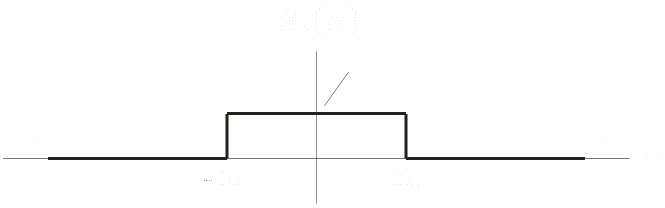
a.-



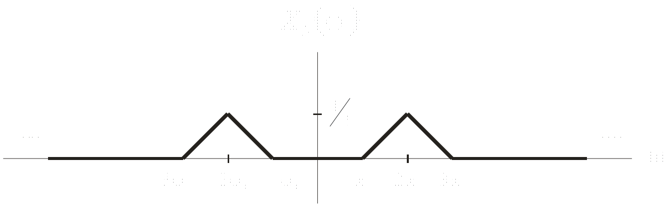
$$X_1(\omega) = \frac{1}{T_1}$$



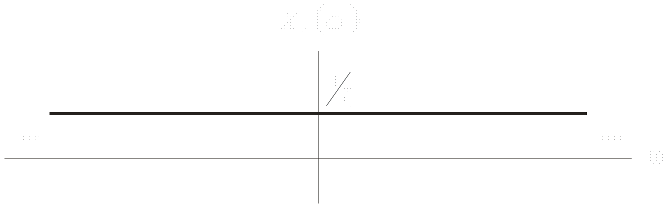
$$X_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_1} \ , & |\omega| \le 2\,\omega_1 \\ 0 \ , & |\omega| > 2\,\omega_1 \end{cases}$$



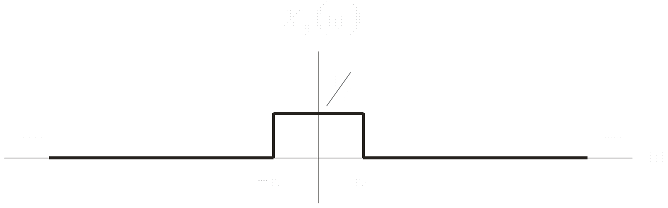
$$X_3(\omega) = \frac{1}{2}\left[\, X(\omega - 2\,\omega_1) + X(\omega + 2\,\omega_1)\,\right]$$



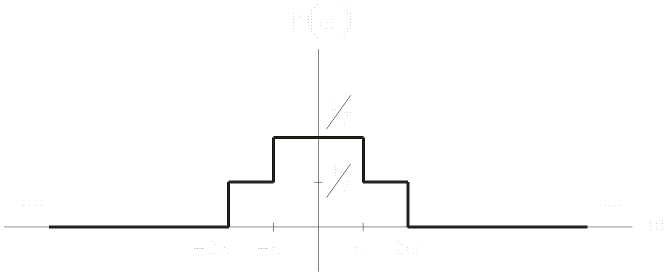
$$X_4(\omega) = \frac{1}{T_1}$$



$$X_5(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{T_1}, & |\omega|\le\omega_1\\ 0\ , & |\omega|>\omega_1\end{cases}$$



$$Y(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{T_1} & , \quad |\omega|\le\omega_1\\ \dfrac{1}{T_1} & , \quad \omega_1<|\omega|\le 2\,\omega_1\\ 0 & , \quad |\omega|>2\,\omega_1\end{cases}$$

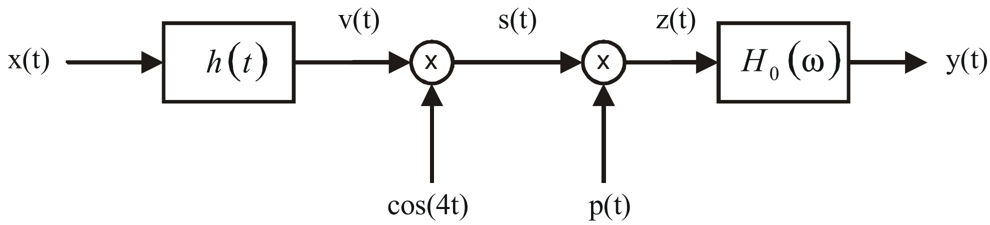


b.-

$$y(t)=\frac{2}{T_1^2}\cdot sinc\left(\frac{2}{T_1}t\right)+\frac{4}{T_1^2}\cdot sinc\left(\frac{4}{T_1}t\right)$$

PROBLEMA 4.10

Dado el diagrama de bloques de la siguiente figura:



donde:

$$x(t) = \frac{sen(t)}{\pi t} \qquad\qquad h(t) = \delta(t - t_0) \quad 0 \le t_0 \le \frac{\pi}{8}$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \qquad\qquad H_0(\omega) = \begin{cases} T_s \ , & |\omega| < 2 \\ 0 \ , & resto\ \omega \end{cases}$$

Se pide:

a.- Calcular los valores máximo y mínimo que puede tomar la energía de la señal $s(t)$.

b.- Si $t_0 = 0$, determinar razonadamente si existe algún valor de T_S tal que $y(t) = x(t)$. En caso afirmativo obtener dicho valor.

Resultado

a.- $E_{\min}\{s(t)\} = E_{\max}\{s(t)\} = \dfrac{1}{2\pi}$ $\quad$ (*Independientemente de* t_0)

b.- Sí existe. Su valor es $T_S = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.