

Problemas Propuestos

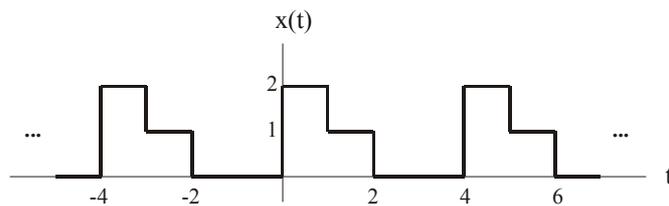
PROBLEMA 4.1

Obtenga el *desarrollo en serie de Fourier* (DSF) de las siguientes señales:

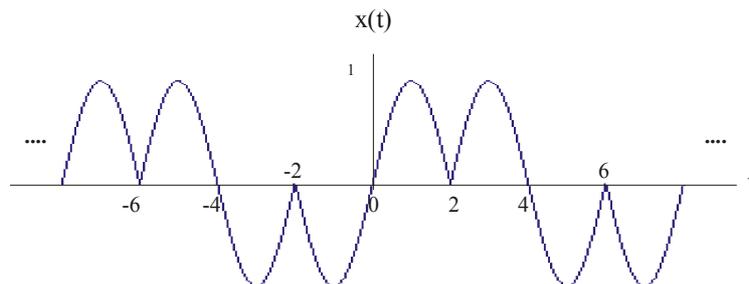
a.- Coseno rectificado en media onda.

b.- Señal periódica de periodo 2; siendo la señal en el intervalo $-1 < t < 1$
 $x(t) = e^{-t}$:

c.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



d.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



209

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Resultado

$$\text{a.- } a_k = \frac{A}{4} \cdot \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k+1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{k-1}{2}\right) \right]$$

$$\text{b.- } a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 - 1}{(1 + jk\pi) \cdot e^{(1+jk\pi)}}$$

$$\text{c.- } a_k = \frac{j}{2k\pi} \cdot \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 2 + (-1)^k \right)$$

$$\text{d.- } a_k = \frac{j}{2} \cdot \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k+2}{2}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{k-2}{2}\right) + \operatorname{sinc}(k-2) - \operatorname{sinc}(k+2) \right]$$

PROBLEMA 4.2

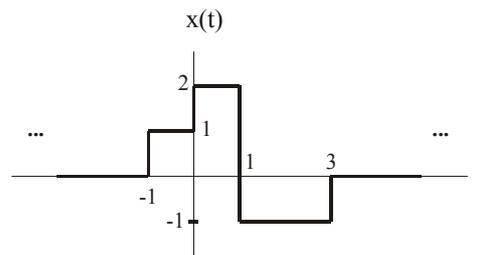
Obtenga la transformada de Fourier de la siguientes señales:

a.- Pulso coseno al cuadrado:

$$x(t) = \begin{cases} A \cdot \cos^2(\omega_0 t), & |t| \leq \frac{T_0}{4} \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{4} \end{cases}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

b.- Señal $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

c.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



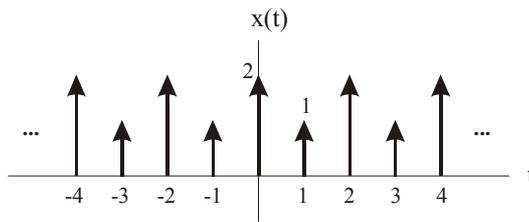
210

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

d.- La señal $x(t)$ de la siguiente figura:



Resultado

$$\text{a.- } X(\omega) = \frac{AT_0}{8} \left[2 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_0}{4\pi}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(\omega - 2\omega_0)T_0}{4\pi}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(\omega + 2\omega_0)T_0}{4\pi}\right) \right]$$

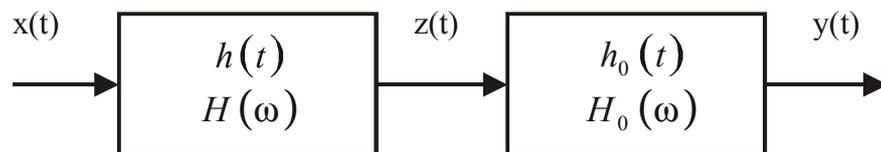
$$\text{b.- } X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\text{c.- } X(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot e^{j\frac{\omega}{2}} + 2 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} - 2 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \cdot e^{-j2\omega}$$

$$\text{d.- } X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi(2 + (-1)^k) \cdot \delta(\omega - k\pi)$$

PROBLEMA 4.3

Dada la siguiente interconexión de sistemas LTI:



donde:

$$h(t) = e^{-|t|} \quad H_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2 \\ 0, & \text{resto } \omega \end{cases}$$

Obtenga la señal $y(t)$ en los siguientes casos:

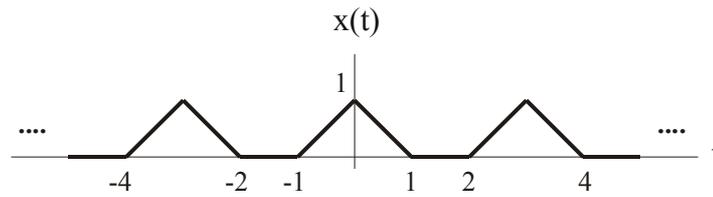
211

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

a.- $x(t)$ es la señal periódica representada en la siguiente figura:



b.-
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \delta(t - n\pi)$$

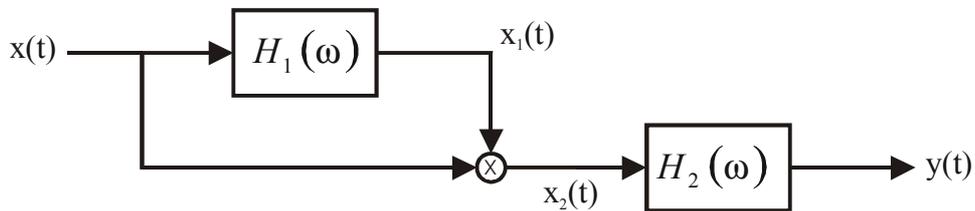
Resultado

a.-
$$y(t) = \frac{2}{3}$$

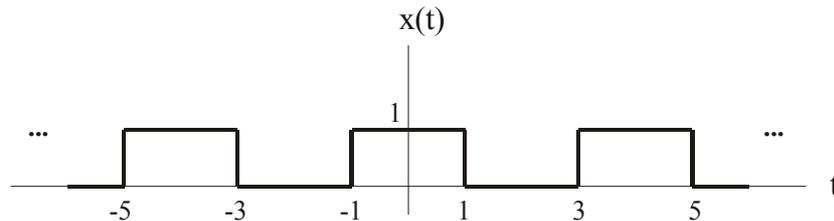
b.-
$$y(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \cos(t)$$

PROBLEMA 4.4

En el sistema de la figura:



se aplica a la entrada la señal periódica $x(t)$:



212



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Siendo la respuesta en frecuencia para ambos filtros las siguientes:

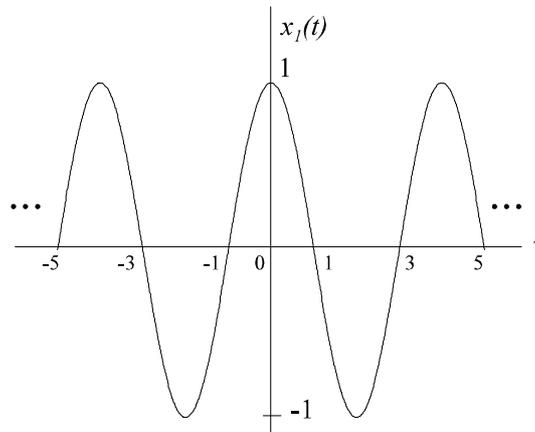
$$H_1(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{resto } \omega \end{cases} \quad H_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{resto } \omega \end{cases}$$

Bajo las condiciones del enunciado se pide representar:

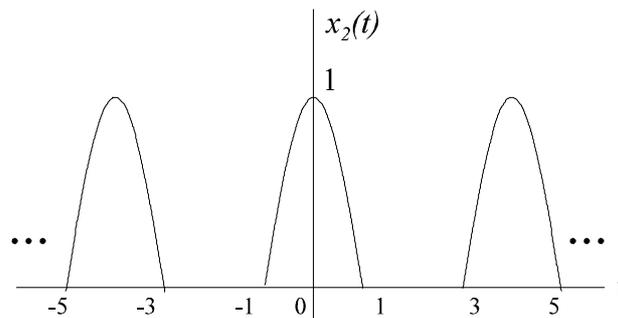
- La señal $x_1(t)$.
- La señal $x_2(t)$.
- El espectro de la señal de salida $Y(\omega)$.

Resultado

a.-



b.-

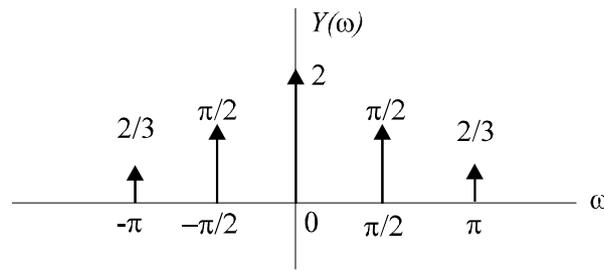


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

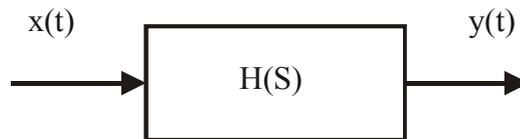
Cartagena99

c.-



PROBLEMA 4.5

Dado el sistema causal de la figura:



donde la función de transferencia del sistema es:

$$H(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Se pide:

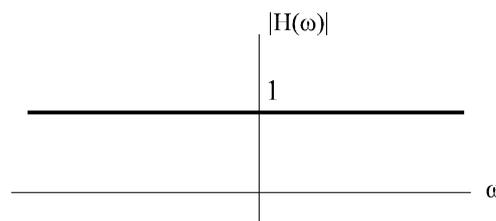
- a.- Calcular la respuesta en frecuencia y representar gráficamente su módulo.
- b.- Obtener la respuesta del sistema ante la entrada:

$$x(t) = 2 \cdot \cos(t) + 3 \cdot \cos(10t)$$

Resultado

a.-

$$H(\omega) = \frac{(\omega^2 - 1) + j\omega}{(\omega^2 - 1) - j\omega}$$



b.- $y(t) = 2 \cdot \cos(t + \pi) + 3 \cdot \cos(10t + 0,2013)$

214



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

PROBLEMA 4.6

Las siguientes ecuaciones diferenciales caracterizan a cuatro sistemas LTI causales:

$$\text{a.- } \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{d y(t)}{d t} + 2 y(t)$$

$$\text{b.- } x(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{d y(t)}{d t} + 2 y(t)$$

$$\text{c.- } \frac{d x(t)}{d t} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{d y(t)}{d t} + 2 y(t)$$

$$\text{d.- } \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{d y(t)}{d t} + 2 y(t)$$

Identifique cada una de ellas con algunos de los siguientes tipos de filtros:

- Filtro paso bajo.
- Filtro paso alto.
- Filtro paso banda.
- Filtro banda eliminada.

Resultado

- a.-** Filtro paso alto.
- b.-** Filtro paso bajo.
- c.-** Filtro paso banda.
- d.-** Filtro banda eliminada.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

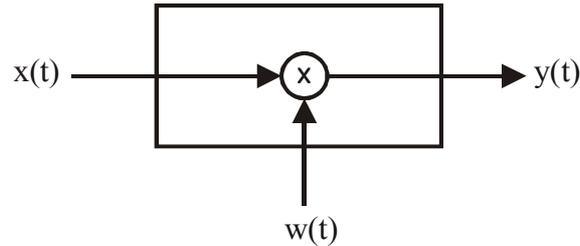


Cartagena99

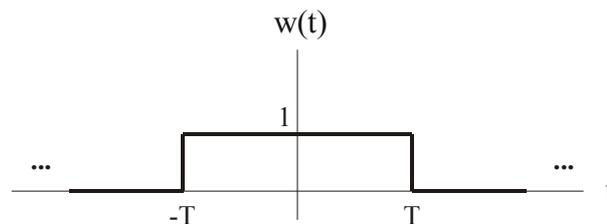
PROBLEMA 4.7

En aplicaciones prácticas, cuando la duración de una señal es demasiado grande, su análisis espectral debe realizarse seleccionando segmentos de una longitud razonable que posteriormente serán estudiados uno a uno. A continuación se pretende observar las diferencias que existen entre el espectro de la señal original y el correspondiente a un segmento de dicha señal.

La figura 1 representa un sistema cuya misión es seleccionar un determinado tramo de la señal de entrada $x(t)$.



El procedimiento consiste en multiplicar dicha señal por una función $w(t)$ (también llamada ventana) como la que se muestra la figura 2.



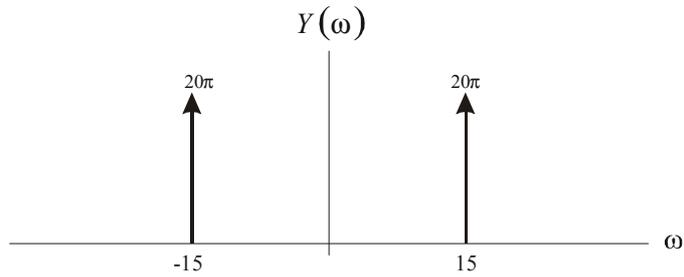
Tomando $x(t) = 20 \cdot \cos(15t)$, calcule y represente el espectro de la señal de salida para los siguientes valores de T :

- $T \rightarrow \infty$
- $T = \pi$
- $T = \frac{\pi}{20}$

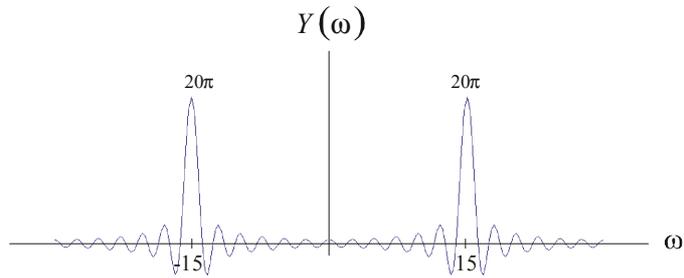
Comente como influye la duración de la ventana en el espectro de la señal de salida.

Resultado

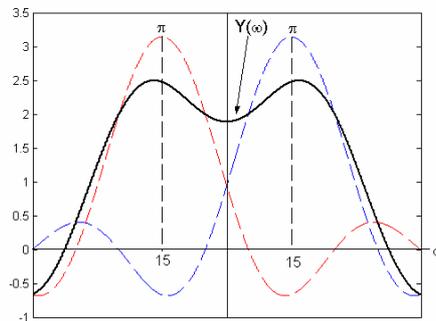
a.-



b.-



c.-



Comentario:

Como se puede apreciar, a medida que decrece la anchura de la ventana, la *interferencia (distorsión)* que existe entre ambas *sinc's* aumenta. Este es el efecto que se puede apreciar en el dominio de la frecuencia, mientras que visto desde un punto de vista temporal se aprecia como ese decremento en la anchura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

de la ventana provoca una menor obtención de información de la señal, lo que repercute en una distorsión en el estudio de la misma. Además de la distorsión, se puede apreciar una existencia de energía en zonas de frecuencia en las que antes no existía, lo cual se conoce como *fugas espectrales*.

PROBLEMA 4.8

En el sistema de la figura 1 se pretende estudiar las señales existentes en determinados puntos del mismo cuando a la entrada se aplica la señal $x(t) = 2 \cos(\omega_1 t)$.

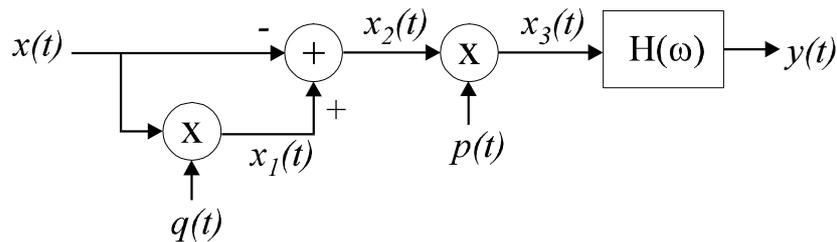


Figura 1

Del sistema conocemos los siguientes datos:

- Expresión temporal de la señal $q(t)$: $q(t) = 2 \cos(3 \omega_1 t)$
- Expresión temporal de la señal $p(t)$: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, cuyo periodo fundamental es $T = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\omega_1}$.
- Respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega)$:

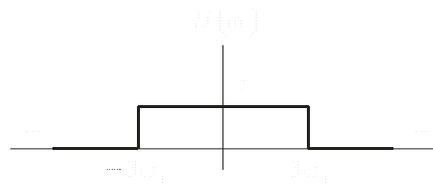


Figura 2

Obtenga:

218

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

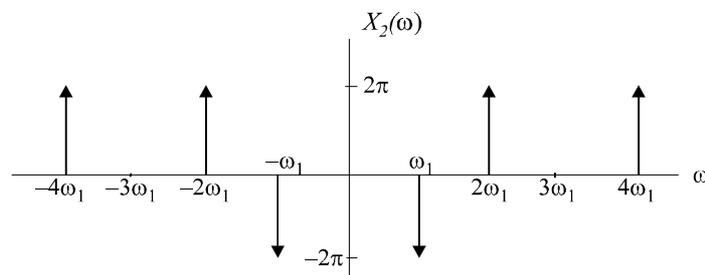
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- a.- Expresión de $x_2(t)$ y expresión literal y representación gráfica de $X_2(\omega)$.
- b.- Expresión de $x_3(t)$ y de $X_3(\omega)$.
- c.- Representación gráfica de $Y(\omega)$ y expresión de $y(t)$.

Resultado**a.-**

$$x_2(t) = -2 \cos(\omega_1 t) + 2 \cos(2 \omega_1 t) + 2 \cos(4 \omega_1 t)$$

$$X_2(\omega) = 2\pi [-\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - 2\omega_1) + \delta(\omega + 2\omega_1) + \delta(\omega - 4\omega_1) + \delta(\omega + 4\omega_1)]$$

**b.-**

$$x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-2 \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right) + 2 \cos\left(2 \frac{\pi}{3} n\right) + 2 \cos\left(4 \frac{\pi}{3} n\right) \right] \cdot \delta\left(t - n \frac{\pi}{3 \omega_1}\right)$$

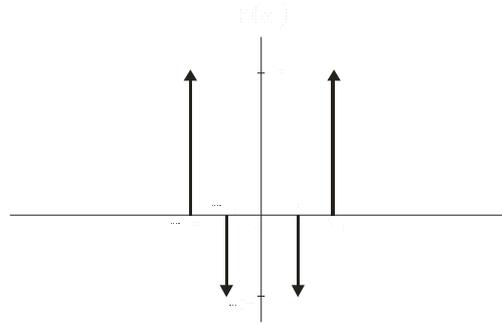
$$X_3(\omega) = 6 \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [-\delta(\omega - \omega_1 - k 6 \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1 - k 6 \omega_1) + \delta(\omega - 2 \omega_1 - k 6 \omega_1) + \delta(\omega + 2 \omega_1 - k 6 \omega_1) + \delta(\omega - 4 \omega_1 - k 6 \omega_1) + \delta(\omega + 4 \omega_1 - k 6 \omega_1)]$$

c.-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

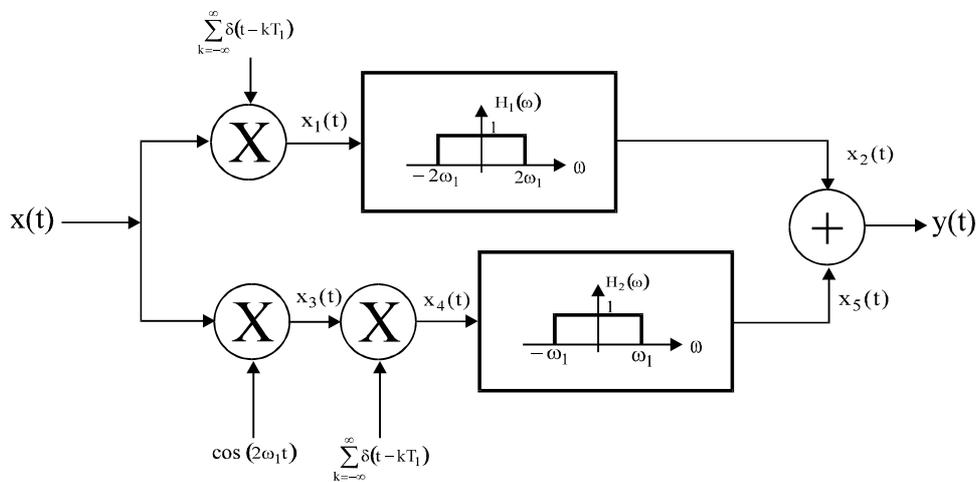
Cartagena99



$$y(t) = -2 \cos(\omega_1 t) + 4 \cos(2 \omega_1 t)$$

PROBLEMA 4.9

En el sistema de la siguiente figura:



sabiendo que $x(t) = \frac{\omega_1}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_1}{2\pi} t\right)$ y que $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, se pide:

- a.- Obtener y representar los espectros de las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ e $y(t)$.
- b.- Obtener la expresión de $y(t)$.

Resultado

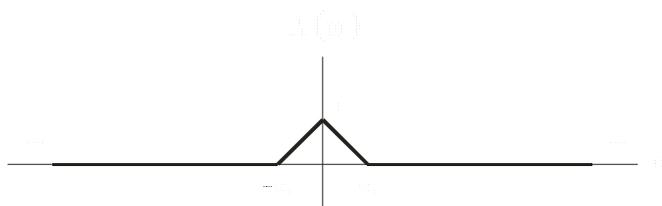
a.-

???

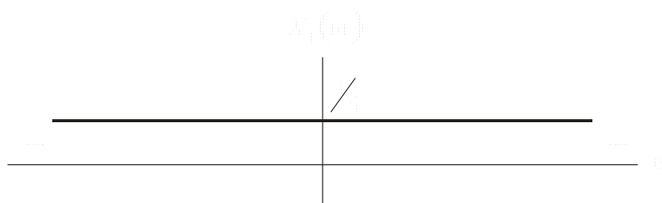


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

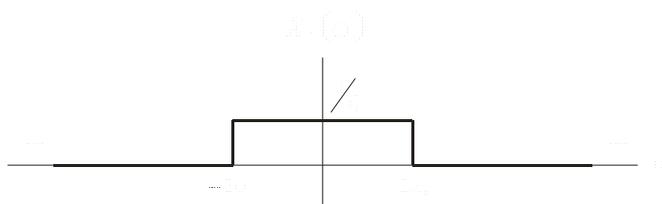
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



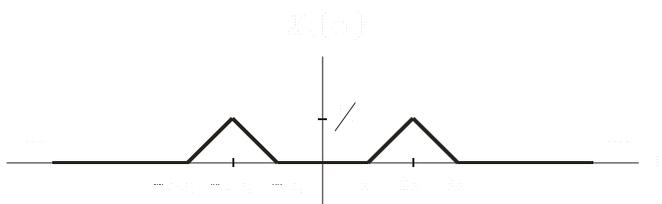
$$X_1(\omega) = \frac{1}{T_1}$$



$$X_2(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{T_1}, & |\omega| \leq 2\omega_1 \\ 0, & |\omega| > 2\omega_1 \end{cases}$$



$$X_3(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - 2\omega_1) + X(\omega + 2\omega_1)]$$

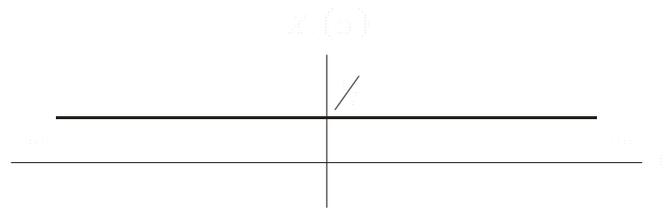


$$X_4(\omega) = \frac{1}{T_1}$$

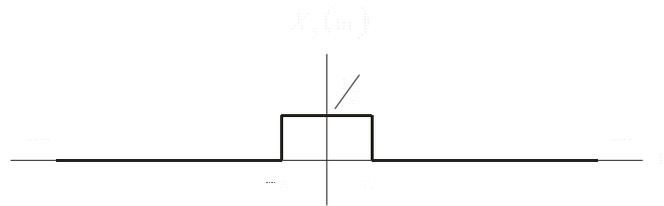
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

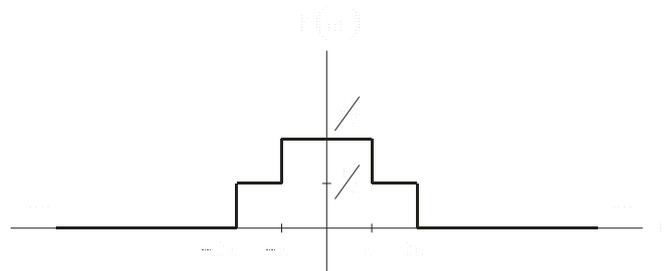
Cartagena99



$$X_s(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{T_1}, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$



$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{T_1}, & |\omega| \leq \omega_1 \\ \frac{1}{T_1}, & \omega_1 < |\omega| \leq 2\omega_1 \\ 0, & |\omega| > 2\omega_1 \end{cases}$$



b.-

$$y(t) = \frac{2}{T_1^2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{2}{T_1}t\right) + \frac{4}{T_1^2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{4}{T_1}t\right)$$

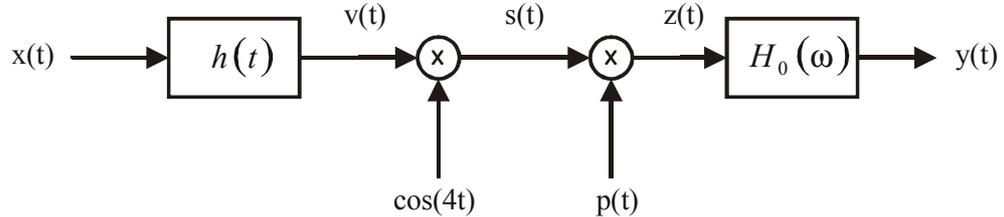
???

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

PROBLEMA 4.10

Dado el diagrama de bloques de la siguiente figura:



donde:

$$x(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\pi t}$$

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad 0 \leq t_0 \leq \frac{\pi}{8}$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$H_0(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < 2 \\ 0, & \text{resto } \omega \end{cases}$$

Se pide:

- Calcular los valores máximo y mínimo que puede tomar la energía de la señal $s(t)$.
- Si $t_0 = 0$, determinar razonadamente si existe algún valor de T_s tal que $y(t) = x(t)$. En caso afirmativo obtener dicho valor.

Resultado

- $E_{\min}\{s(t)\} = E_{\max}\{s(t)\} = \frac{1}{2\pi}$ (Independientemente de t_0)
- Sí existe. Su valor es $T_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99