Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 2

SEÑALES DETERMINÍSTICAS (I)

Teoría de la Comunicación (2º grado)

2020-2021

Contenidos

1. Clasificación de señales
2. Repaso análisis de Fourier y sistemas LTI
3. Representación temporal

Objetivos específicos

• **Clasificación** de señales

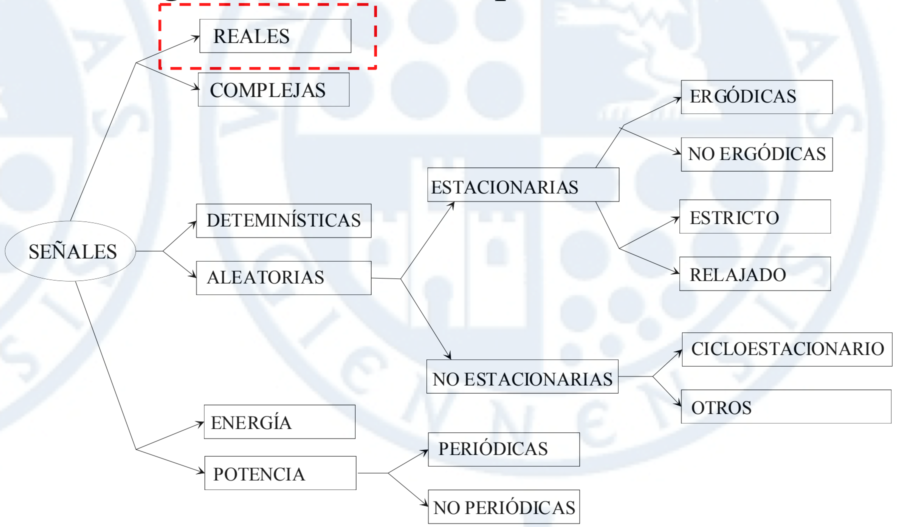
• Calcular correctamente la **transformada de Fourier** y la **transformada de Fourier inversa**.

• Determinar la **respuesta de un sistema LTI** a una determinada excitación, conocida la respuesta impulsiva o la respuesta en frecuencia del sistema.

• Descripción completa de una señal determinística en el dominio temporal mediante **parámetros** característicos de la señal, incluyendo la función de **autocorrelación** y **correlación cruzada** entre dos señales.

Clasificación de señales

• **Señal:** variación de una magnitud física susceptible de transmitir información.



• **Señales definidas en energía (Julios, J)**

- Duración temporal **finita** o aparece en un instante dado y se extingue con un comportamiento asintótico tendiendo a cero
- Potencia media nula ($P_x = 0$W)

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} \left|x(t)\right|^2 dt \quad [\,0 < E_x < \infty]$$

• **Señales definidas en potencia (Watios, W)**

- Duración temporal **infinita**. Pueden ser periódicas y no periódicas
- Energía media infinita ($E_x = \infty$ J)

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left|x(t)\right|^2 dt \quad [\,0 < P_x < \infty] \qquad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt\ldots$$

… si la señal es periódica T_0

Desarrollo en Series de Fourier

Las **series de Fourier** permiten representar a una señal **periódica** como suma de **exponenciales complejas**

Desarrollo en serie de Fourier señal $x(t)$ periódica de periodo T_0:

Ec. de síntesis: $$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \mathrm{e}^{j \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot t}$$

Ec. de análisis: $$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot \mathrm{e}^{-j \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot t} \, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 ...$$

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

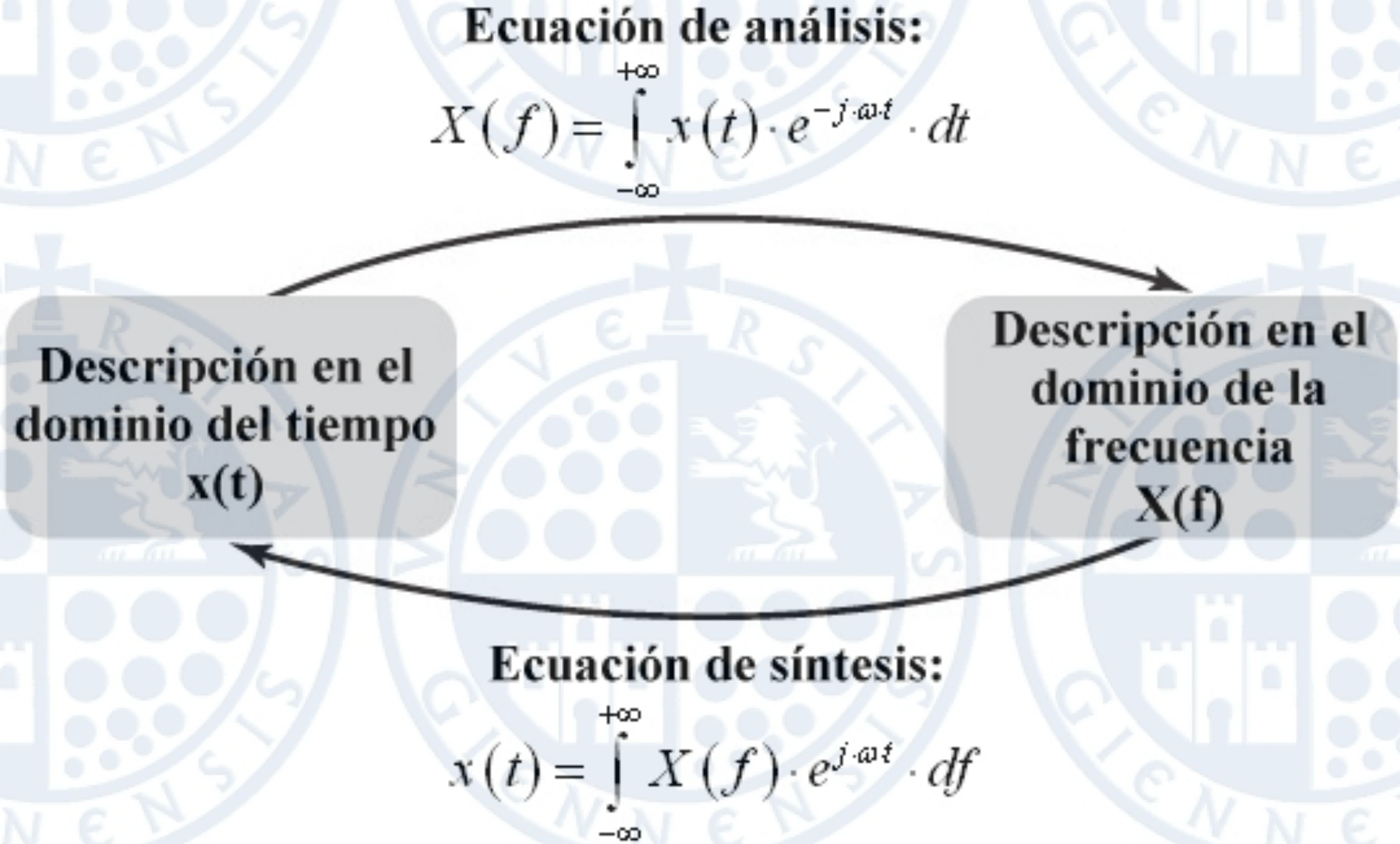
Para asegurar la existencia del desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica de periodo T_0 es suficiente (no necesario) que $x(t)$ cumpla las condiciones de Dirichlet:

1. La señal $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo de la señal.
2. La señal $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades en cualquier periodo de la señal. Además cada una de estas discontinuidades debe ser finita.
3. La señal $x(t)$ debe ser absolutamente integrable en cualquier periodo:

$$\int_{T_0} \left| x(t) \right| dt < \infty$$

Transformadas de Fourier (I)

En este tema repasaremos, brevemente, algunas propiedades y teoremas importantes relacionados con la **transformada de Fourier de señales**.



Transformadas de Fourier (II)

Para una señal no periódica y determinística, expresada como una función del tiempo la integral siguiente es su **transformada de Fourier**:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j 2\pi f \cdot t}\, dt$$

Donde $j = \sqrt{-1}$ y donde a veces se emplea en lugar de la frecuencia *f* (Hz) la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ (rad/s)

A partir de la transformada de Fourier *X(f),* la señal *x(t)* puede ser recuperada de forma exacta mediante la **transformada inversa de Fourier**:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \mathrm{e}^{j \cdot 2\pi f \cdot t}\, df$$

Para asegurar la existencia de la transformada de Fourier de una señal es suficiente (no necesario) que *x(t)* cumpla las condiciones de Dirichlet:

1. La señal *x(t)* debe tener un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito.
2. La señal *x(t)* debe tener un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito. Además cada una de estas discontinuidades debe ser finita.
3. La señal *x(t)* debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

Transformadas de Fourier (III)

Operación	Función	Transformada
Superposición	$a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)$	$a_1 \cdot X_1(f) + a_2 \cdot X_2(f)$
Retardo en el tiempo	$x(t - t_d)$	$X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$
Cambio de escala	$x(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} \cdot X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Dualidad	$X(t)$	$x(-f)$
Translación en frecuencia	$x(t) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t}$	$X(f - f_c)$
Modulación	$x(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \phi)$	$\frac{1}{2} \cdot \left(X(f - f_c) \cdot e^{j\phi} + X(f + f_c) \cdot e^{-j\phi} \right)$
Derivación	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot X(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$	$\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(f) + \frac{1}{2} X(0) \cdot \delta(f)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
Multiplicación	$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Multiplicación por t^n	$t^n \cdot x(t)$	$(-j \cdot 2 \cdot \pi)^{-n} \cdot \frac{d^n X(f)}{df^n}$

Teorema Integral:

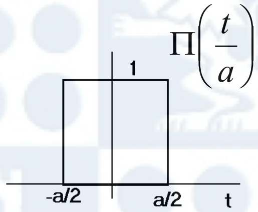
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f)\, df$$

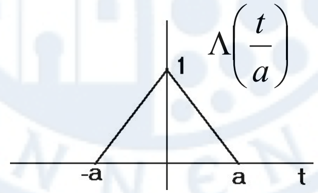
Teorema de Parseval:

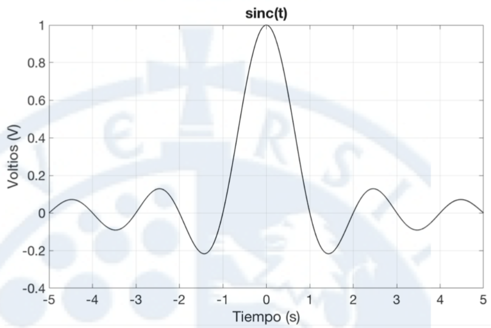
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t) \rvert^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(f) \rvert^2\, df$$

Transformadas de Fourier (IV)

Función	$x(t)$	$X(f)$
Rectangular	$\Pi\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \cdot \mathrm{sinc}(f \cdot a)$
Triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \cdot \mathrm{sinc}^2(f \cdot a)$
Gaussiana	$e^{-\pi \cdot (b \cdot t)^2}$	$\frac{1}{b} \cdot e^{-\pi \cdot (f/b)^2}$
Exponencial causal	$e^{-b \cdot t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{b + j2\pi f}$
Exponencial simétrica	$e^{-b\lvert t \rvert}$	$\frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2}$
Sinc	$\mathrm{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
Sinc al cuadrado	$\mathrm{sinc}^2(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$
Constante	1	$\delta(f)$
Fasor	$e^{j(2\pi f_c t + \phi)}$	$e^{j\phi} \cdot \delta(f - f_c)$
Sinusoide	$\cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \phi)$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\delta(f - f_c) \cdot e^{j\phi} + \delta(f + f_c) \cdot e^{-j\phi}\right)$
Impulso	$\delta(t - t_d)$	$e^{-j2\pi f \cdot t_d}$
Tren de deltas (muestreo)	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_s)$	$\frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - n \cdot \frac{1}{T_s}\right)$
Signo	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$







$$\cos^2 \boldsymbol{a} = \frac{1 + \cos 2\boldsymbol{a}}{2}$$

$$\cos^3 \boldsymbol{a} = \frac{3}{4}\cos \boldsymbol{a} + \frac{1}{4}\cos 3\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ja}} = \cos \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jsena}$$

Conceptos adicionales:
Transformadas.pdf

Transmisión de señales a través de sistemas LTI (I)

• **Sistema:** cualquier dispositivo físico que produce una señal de salida *y(t)* (respuesta) en respuesta a una señal de entrada *x(t)* (excitación).

$$y(t) = T[x(t)]$$

• **Clasificación de los sistemas:**

- Lineal/no lineal
- Invariante/variante en el tiempo
- Sin memoria/con memoria
- Causal/no causal
- Estable/inestable

En un **sistema lineal** se cumple el **principio de superposición**: la respuesta de un sistema lineal a una número de excitaciones aplicadas simultáneamente es igual a la suma de las respuestas del sistema cuando cada excitación es aplicada individualmente.

$$y(t) = T\left[x_1(t) + x_2(t)\right] = T\left[x_1(t)\right] + T\left[x_2(t)\right]$$
$$y(t) = T\left[a \cdot x(t)\right] = a \cdot T\left[x(t)\right]$$

Transmisión de señales a través de sistemas LTI (II)

En un **sistema invariante en el tiempo** un desplazamiento en el tiempo de la excitación ocasiona un desplazamiento en el tiempo de la respuesta.

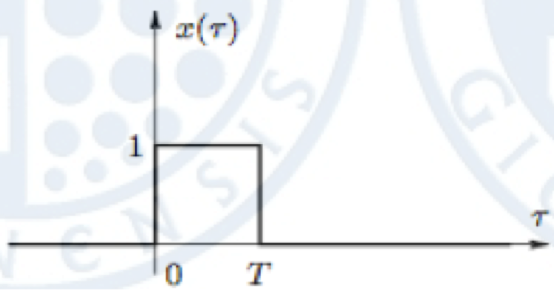
$$y(t)=T\left[x(t)\right]\rightarrow y(t-t_0)=T\left[x(t-t_0)\right]$$

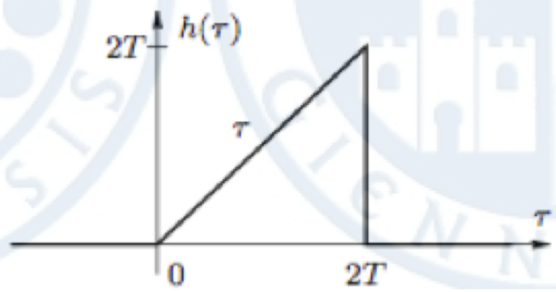
En un **sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI),** la respuesta a una excitación cualquiera *x(t)* se calcula a partir de la respuesta al impulso del sistema $h(t)=T\left[\delta(t)\right]$ a través de una integral de convolución

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau$$

Ejemplo de convolución

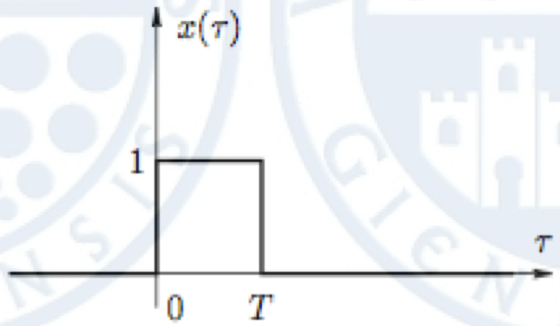
$$x(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0, & resto\end{cases}\qquad h(t)=\begin{cases}t, & 0<t<2T\\ 0, & resto\end{cases}\Rightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

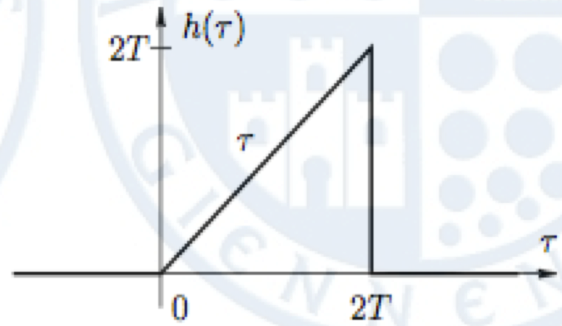




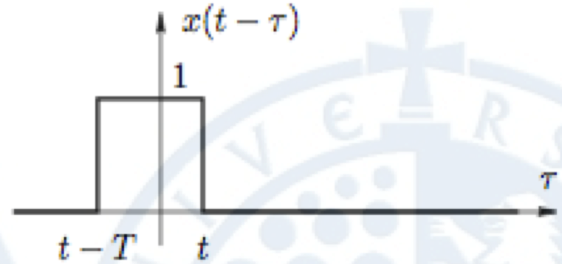
Transmisión de señales a través de sistemas LTI (III)

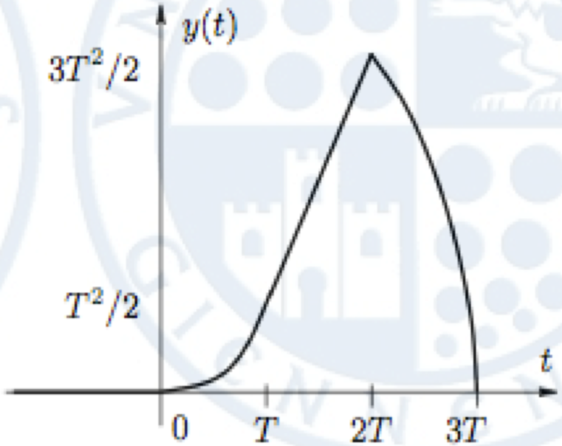
Sol: ejemplo de convolución





- $t \leq 0,\ y(t) = 0$
- $\begin{cases} t > 0 \\ t - T \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t \leq T,\ y(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$
- $\begin{cases} t - T > 0, \\ t \leq 2T \end{cases} \Rightarrow T < t \leq 2T,\ y(t) = \int_{t-T}^{t} \tau d\tau = tT - \frac{1}{2}T^2$
- $\begin{cases} t > 2T, \\ t - T \leq 2T \end{cases} \Rightarrow 2T < t \leq 3T,\ y(t) = \int_{t-T}^{2T} \tau d\tau = tT - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}T^2$
- $t - T > 3T \rightarrow t > 3T,\ y(t) = 0$





Transmisión de señales a través de sistemas LTI (IV)

¿Qué tiene que ver el **análisis de Fourier** con los **sistemas LTI**? La respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja es otra exponencial compleja. Y las exponenciales complejas son la clave del análisis de Fourier. Consideremos como excitación *x(t)* de un sistema LTI, una exponencial compleja:

$$x(t) = Ae^{j2\pi ft}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\partial\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{j2\pi f\,(t-\tau)}\partial\tau$$

$$= Ae^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\partial\tau =$$

$$= Ae^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\partial t = x(t)H(f)$$

$$x(t) = e^{j2\pi ft} \Longrightarrow y(t) = e^{j2\pi ft}\,H(f)$$

Parámetros de señal (I)

Una señal **determinística** se conoce **a priori** ya que queda completamente caracterizada por su expresión temporal explícita que indica el valor que toma la señal para cualquier instante de tiempo.

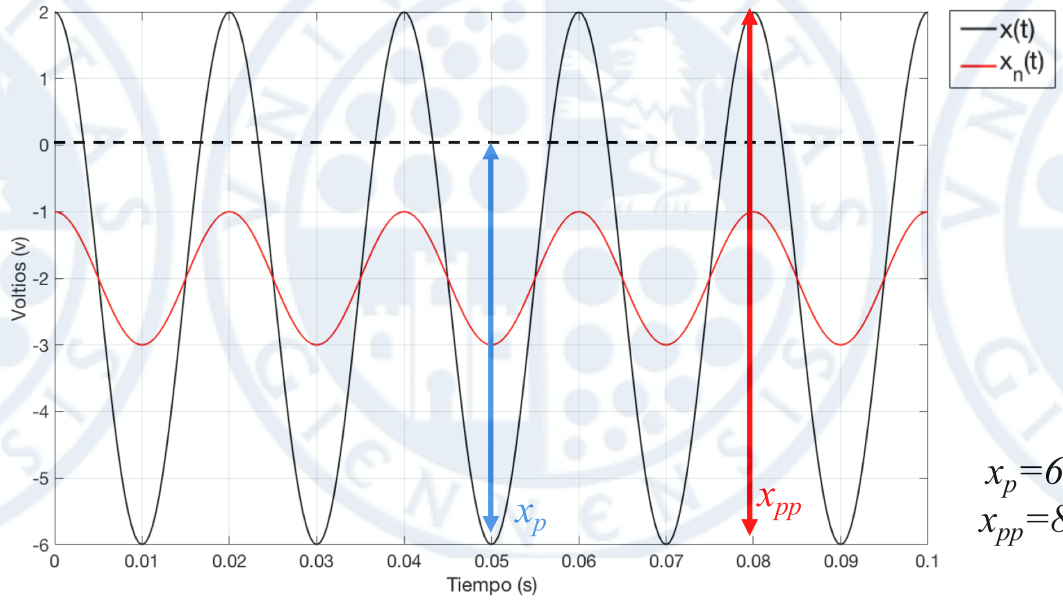
Supongamos una señal *x(t)* real, determinemos algunos parámetros de señal que la caracterizan parcialmente:

- **Valor de pico x_p ([V], [A])**: se define como el **máximo** valor que alcanza su **valor absoluto**. En comunicaciones, es muy útil **normalizar** $x_n(t)$ la señal de entrada $x(t)$ de forma que $x_p = 1$

$$x_p = |x(t)|_{max} \qquad\qquad x_n(t) = \frac{x(t)}{x_p} \Rightarrow |x_n(t)| \leq 1$$

- **Valor pico-pico x_{pp} ([V], [A]):** se define como la **diferencia** entre sus valores máximo y mínimo.

$$x_{pp} = x(t)_{\max} - x(t)_{\min}$$



x_p=6V

x_{pp}=8V

Parámetros de señal (II)

Valor medio (componente continua, [V],[A]): se define el valor medio de una señal *x(t)* en un intervalo de tiempo *T* centrado en t_0:

$$\langle x(t)\rangle_{T,t_0} = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x(t)\,dt \qquad \overline{x(t)} = \langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\langle x(t)\rangle_{T,t_0} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

- El valor medio de señal se representa como una **función delta de Dirac** $\delta(f)$ en el origen de frecuencias ($f = 0$Hz)
- La **potencia de continua $P_{x,cc}$ [W]** se define como el valor medio al cuadrado o el módulo al cuadrado de la transf. Fourier en el origen de frecuencias ($\delta(f)$)

$$P_{x_{cc}} = < x(t) >^2 = \left(\overline{x(t)}\right)^2 = |X(f)|^2{}_{f=0}$$

Valor cuadrático medio (potencia media P_x *[W]*): El valor cuadrático medio de una señal *x(t)* en un intervalo de tiempo *T* centrado en t_0:

$$\langle x^2(t)\rangle_{T,t_0} = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt \qquad P_x = \overline{x^2(t)} = \langle x^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\langle x^2(t)\rangle_{T,t_0} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$$

NOTA: si la señal *x(t)* es periódica, entonces los anteriores parámetros se pueden calcular promediando en un periodo (coinciden con los obtenidos promediando durante todo el eje de tiempos)

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt \qquad P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)\,dt$$

Parámetros de señal (III)

Valor eficaz ([V], [A]): es la desviación tipica (raíz cuadrada de la varianza) y representa la raíz cuadrada de la potencia de alterna de la señal *x(t)*

$$x_{ef} = \sigma_x = \sqrt{\left\langle \left[x(t) - \langle x(t) \rangle \right]^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \left[x(t) - \overline{x(t)} \right]^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle x^2(t) \right\rangle - \left\langle x(t) \right\rangle^2}$$

$$x_{ef}^2 = \sigma_x^2 = \left\langle x^2(t) \right\rangle - \left\langle x(t) \right\rangle^2 = P_x - P_{x_{cc}} = P_{x_{cz}}$$

- **Factor de cresta (adimensional):** relación entre valor de pico y valor eficaz. Informa de la importancia de las crestas de la señal respecto a la raíz cuadrada de la potencia en corriente alterna

$$K_C = \frac{x_p}{x_{ef}}$$

- **Factor de forma (adimensional):** relación entre valor eficaz y valor absoluto del valor medio de la señal. Se puede observar que su cuadrado indica la relación existente entre potencia alterna y continua

$$K_F = \frac{x_{ef}}{\left| \langle x(t) \rangle \right|}$$

Autocorrelación (I)

• La función de **autocorrelación** se basa en comparar la señal *x(t)* con **copias desplazadas** de *x(t)* en el tiempo, informando sobre la **redundancia o similitud** existente en la señal *x(t)*.

- La variable τ informa sobre el desplazamiento temporal realizado al evaluar la similitud de la señal *x(t)* con su réplica desplazada $x(t-\tau)$

• La autocorrelación $\boldsymbol{\rho_x(\tau)}$ de una señal *x(t)* **definida en energía:**

$$\rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

• La autocorrelación $\boldsymbol{R_x(\tau)}$ de una señal *x(t)* **definida en potencia:**

$$R_x(\tau) = \langle x(t+\tau)x^*(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)x^*(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T x(t)x^*(t-\tau)dt$$

si *x(t)* es **periódica** de periodo T_0, su función de autocorrelación también es **periódica** y del mismo periodo T_0, siendo su expresión:

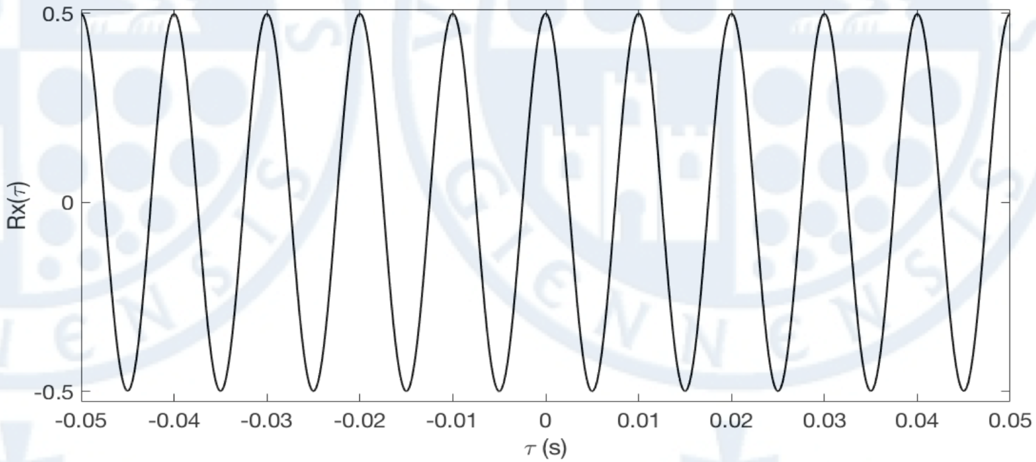
$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t+\tau)x^*(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x^*(t-\tau)\,dt$$

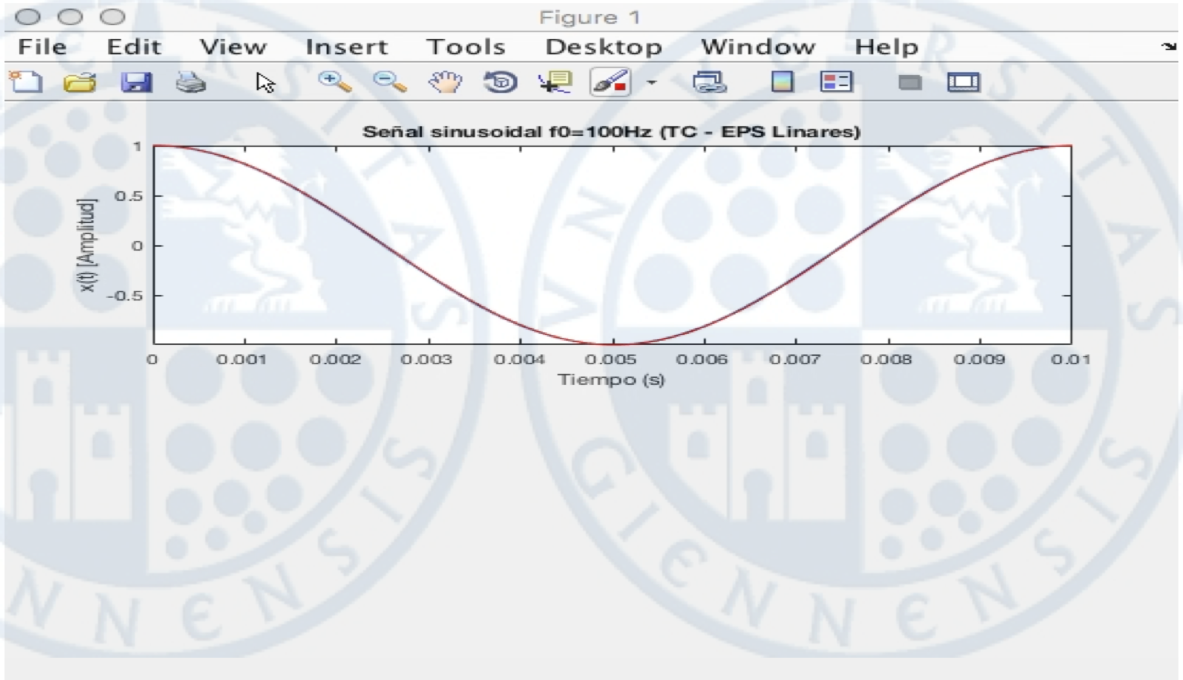
• Resumiendo, la **autocorrelación** para señales **determinísticas** es simplemente una **convolución**:

$$\rho_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

Autocorrelación (II)

Ejemplo visual: $x(t) = cos(2\pi f_0 t), f_0=100Hz$

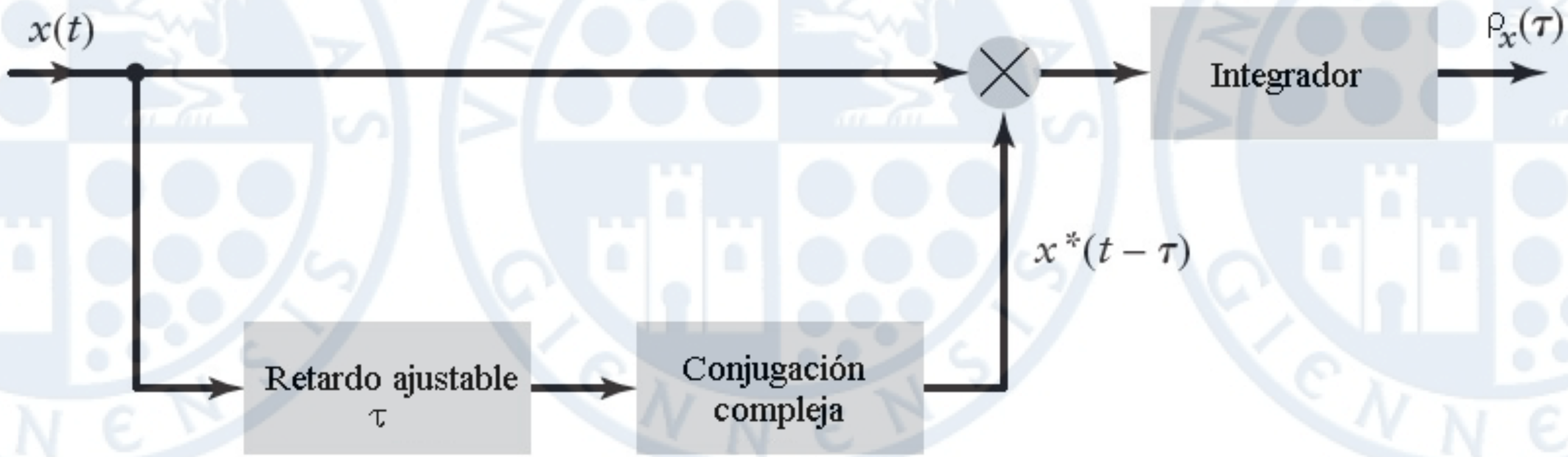




Observaciones:

- Cuando las señales están en fase y son similares, su producto siempre es positivo y la salida de la integral será un valor positivo elevado.
- Cuando la señales empiezan a desfasarse, algunas zonas de la señal se vuelven negativas, el producto puede ser negativo y la salida de la integral puede mostrar valores positivos pequeños o negativos elevados.

Autocorrelación (III)



Sistema para medir la función de autocorrelación de una señal de energía x(t) para un desplazamiento τ

- **Propiedades de la funciones de autocorrelación $\boldsymbol{\rho_x(\tau), R_x(\tau)}$**
  - Obtiene el valor máximo en $\tau = 0$ coincidiendo dicho valor con la energía media E_x o potencia media P_x de la señal *x(t)*

$$\rho_x(0) = E_x \geq \left|\rho_x(\tau)\right| \ ,\forall\tau \qquad R_x(0) = P_x \geq \left|R_x(\tau)\right| \ ,\forall\tau$$

  - Simetría hermítica $R_x^*(\tau) = R_x\ (-\tau)$. Si la señal *x(t)* es **real**, entonces la autocorrelación es **real** y **par**

$$R_x^*(\tau) = R_x\ (-\tau) \xRightarrow{x(t)\ \text{real}} R_x\ (\tau) = R_x\ (-\tau)$$

Correlación cruzada (I)

- Si *x(t)* y/o *y(t)* están **definidas en energía**, la función de correlación cruzada de ambas señales viene dada por:

$$\rho_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

- Si *x(t)* e *y(t)* están **definidas en potencia**, la función de correlación cruzada de ambas señales se define de la siguiente forma:

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t+\tau)y^*(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)y^*(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T x(t)y^*(t-\tau)dt$$

si *x(t)* e *y(t)* son señales **periódicas**, la función de correlación cruzada de ambas señales también es periódica de periodo T y viene dada por:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T x(t+\tau)y^*(t)dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)y^*(t-\tau)dt$$

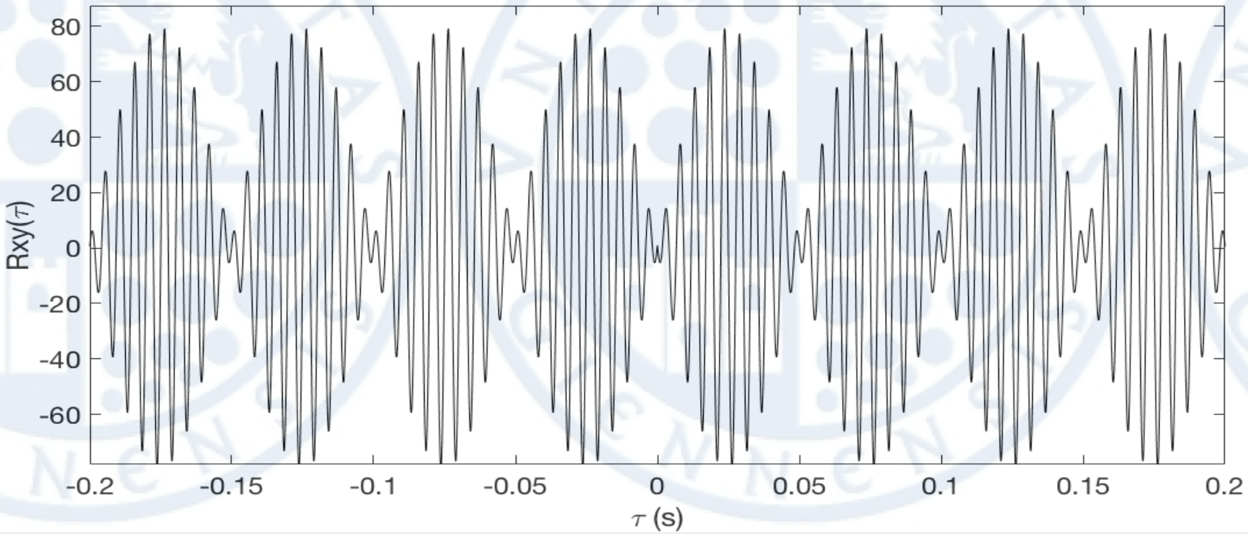
donde *T* es el inverso del m.c.d de las frecuencias de las señales *x(t)* e *y(t)*.

De manera similar a la autocorrelación, la correlación cruzada realiza una **comparación** entre dos señales *x(t)* e *y(t)* desplazada, siendo un indicador del grado de semejanza entre ellas.

- Resumiendo, la correlación cruzada para señales determinísticas es simplemente una convolución:

$$\rho_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Correlación cruzada (II)



x(t) = cos(2πf₁t), f₁=200Hz

- **Propiedades de la funciones de correlación cruzada $\boldsymbol{\rho_{xy}(\tau), R_{xy}(\tau)}$**
  - $R_{xy}(\tau)$ presenta simetría hermítica respecto de $R_{yx}(\tau)$. Si *x(t)* e *y(t)* son reales, $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ son reales y simétricas

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}^*(\tau) \xrightarrow{x(t),\, y(t) \text{ reales}} R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

  - Autocorrelación de la suma de dos señales

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_z(\tau) = \rho_x(\tau) + \rho_y(\tau) + \rho_{xy}(\tau) + \rho_{yx}(\tau)$$

  - Dos señales *x(t)* e *y(t)* son **ortogonales** cuando su correlación cruzada es $\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(\tau) = 0$, $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$. Las señales que no se solapan en el tiempo o en frecuencia también son ortogonales entre sí

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) \Rightarrow G_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) = 0 \Rightarrow R_{xy}(\tau) = 0$$

Correlación cruzada (III)

- **Teorema de la ortogonalidad de señales sinusoidales**
  - Matemáticamente, dos señales $f_1(t), f_2(t)$ son ortogonales en el intervalo *[a,b]* cuando se cumple la siguiente condición

$$\langle f_1(t), f_2(t)\rangle = \int_a^b f_1(t) f_2(t)\, dt = 0$$

    Esta propiedad se utiliza para minimizar o eliminar la interferencia entre señales que se transmiten de manera simultánea por el mismo canal (Tema 5 (Modulaciones digitales): dos canales (fase I y cuadratura Q) independientes y ortogonales)

  - Considerando sinusoides, la ortogonalidad implica que cada sinusoide de frecuencia f_i*=m/*T_0 está formada por un número entero de ciclos en el intervalo $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$

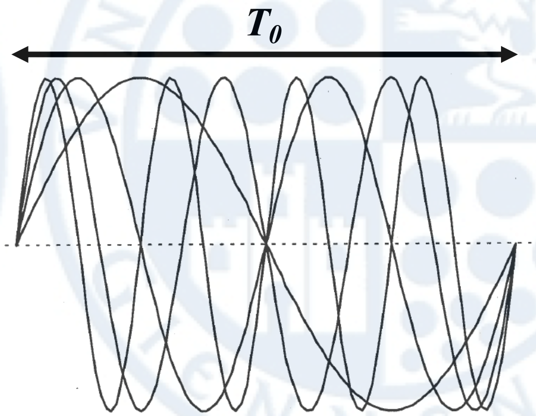
$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} cos\left(m2\pi t\frac{1}{T_0}\right) cos\left(n2\pi t\frac{1}{T_0}\right) dt = \begin{cases} \neq 0, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} cos\left(m2\pi t\frac{1}{T_0} + \emptyset\right) cos\left(n2\pi t\frac{1}{T_0}\right) dt = 0, \quad m \neq n$$

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} sin\left(m2\pi t\frac{1}{T_0}\right) sin\left(n2\pi t\frac{1}{T_0}\right) dt = \begin{cases} \neq 0, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} sin\left(m2\pi t\frac{1}{T_0} + \emptyset\right) sin\left(n2\pi t\frac{1}{T_0}\right) dt = 0, \quad m \neq n$$

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} sin\left(m2\pi t\frac{1}{T_0}\right) cos\left(n2\pi t\frac{1}{T_0}\right) dt = 0, \forall m, n$$



Ejemplo: 4 sinusoides ortogonales (f_0, $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$)

Correlación cruzada (IV)

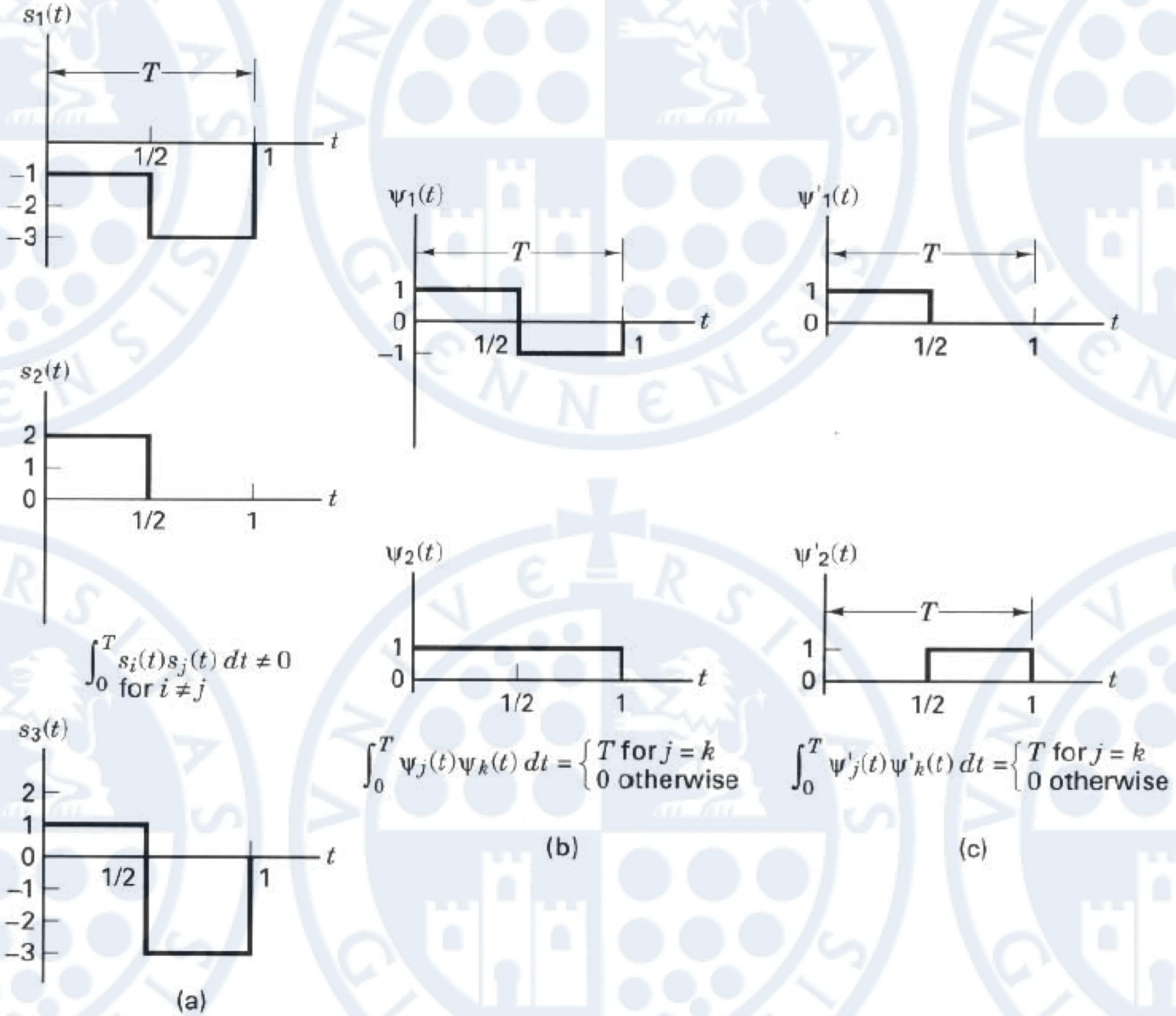


Figure 3.5 Example of an arbitrary signal set in terms of an orthogonal set. (a) Arbitrary signal set. (b) A set of orthogonal basis functions. (c) Another set of orthogonal basis functions.