Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 2

SEÑALES DETERMINÍSTICAS (II)

Teoría de la Comunicación (2º grado)

2020-2021

Contenidos

1. Representación espectral

Objetivos específicos

- Calcular correctamente la **densidad espectral de energía** o **potencia** y relacionar estos conceptos con los de transformada y desarrollo en serie de Fourier para señales determinísticas

- Relación entre **densidad espectral** y función de **autocorrelación** para señales determinísticas.

- **Ancho de banda** de una señal de acuerdo a diferentes criterios de comunicación.

Espectro de potencia (I)

- El **espectro de potencia o densidad espectral de potencia (DEP)** $G_x(f)$ para una señal determinística *x(t)* definida en potencia, se obtiene calculando **la transformada de Fourier de su función de autocorrelación** $R_x(\tau)$ en virtud del teorema de **Wiener-Khinchin**:

$$G_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) e^{j\omega\tau} df$$

Propiedades

1. $G_x(f)$ es real y $G_x(f) \geq 0, \quad \forall f$

$$G_x(f) = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2 \geq 0$$

2. Si *x(t)* es real ⇒ $G_x(f)$ es par ⇒ ⇒ ⇒ ⇒ ⇒

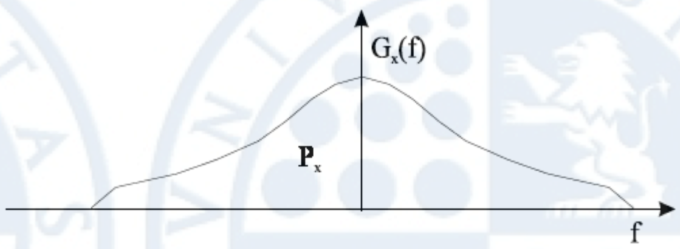


Figura 2.3. Espectro de potencia de una señal

3. $P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df$

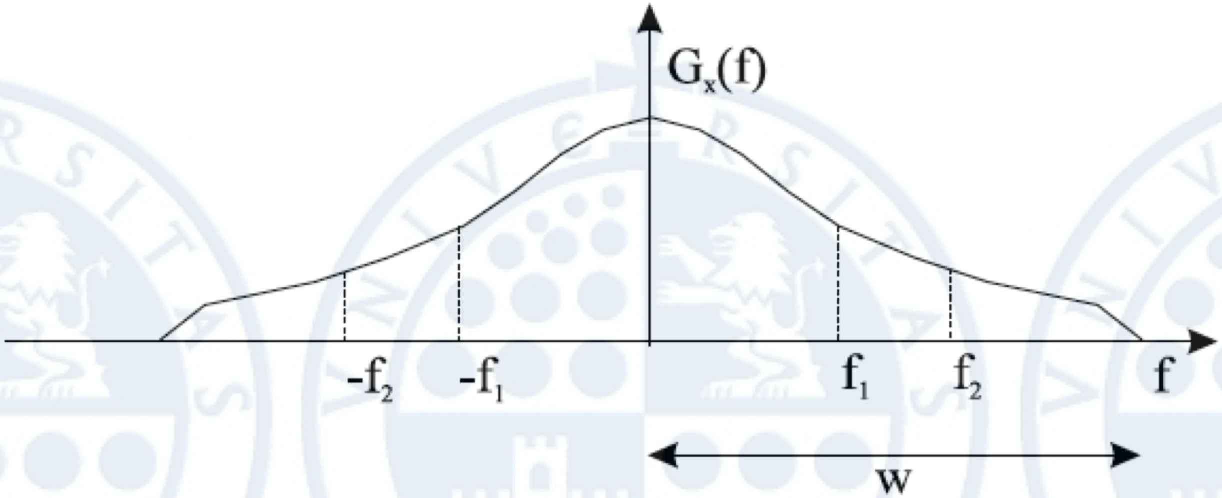
4. $G_x(f)$ es la potencia de señal *x(t)* por unidad de frecuencia (densidad espectral de potencia, DEP) y se expresa en W/Hz (también en dBW/Hz y dBm/Hz). Informa cómo se distribuye la potencia de la señal *x(t)* en la frecuencia

Espectro de potencia (II)

- Debido a que $G_x(f)$ indica cómo se distribuye la potencia de $x(t)$ en el eje de frecuencias, **la potencia de la señal en la banda [f_1, f_2]** será:

$$P_{x_{f_1-f_2}} = \int_{-f_2}^{-f_1} G_x(f)\,df + \int_{f_1}^{f_2} G_x(f)\,df$$

si $x(t)$ es real ⇒ debido a la paridad: $P_{x_{f_1-f_2}} = 2\int_{f_1}^{f_2} G_x(f)\,df$



- Si la señal $x(t)$ es periódica de periodo $T_0 = 1/f_0$, entonces

$$G_x(f) = \sum_n |c_n|^2 \,\delta\left(f - n\cdot f_0\right)$$

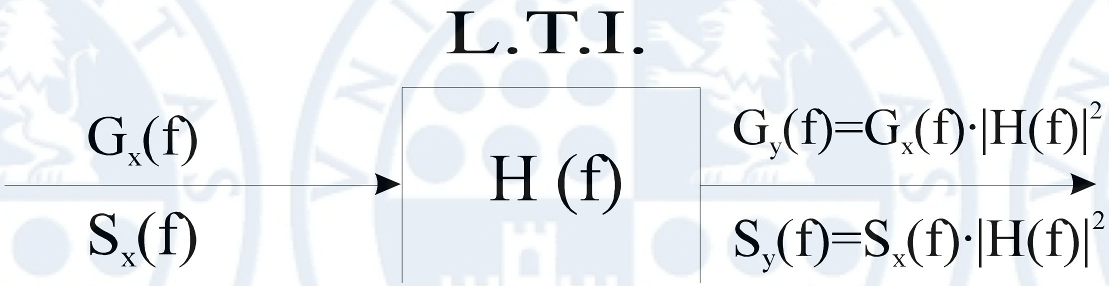
Espectro de Energía

- La **densidad espectral de energía (DEE) o espectro de energía** $S_x(f)$ para una señal determinística *x(t)* definida en energía se obtiene utilizando la **transformada de Fourier** de su función de autocorrelación $\rho_x(\tau)$ por el teorema de **Wiener-Khinchin**:

$$S_x(f) = \mathcal{F}[\rho_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\rho_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_x(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j\omega\tau} df$$

- Respuesta de un sistema LTI cuando la señal de entrada es la DEP o DEE:



$$\rho_y(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau) \Rightarrow S_y(f) = Y(f)\cdot Y^*(f) =$$

$$= X(f)\cdot H(f)\cdot X^*(f)\cdot H^*(f) = \left|X(f)\right|^2 \cdot \left|H(f)\right|^2 = S_x(f)\cdot \left|H(f)\right|^2$$

Ancho de banda (I)

Las señales que se utilizan en sistemas de telecomunicaciones reales se encuentran **limitadas en banda** (la **mayor parte** de su **potencia o energía** está contenida en un **intervalo espectral finito**). El tamaño del intervalo se denomina **ancho de banda**

No existe una única definición de ancho de banda, sino que pueden establecerse diferentes definiciones, dependiendo del contexto y finalidad de la aplicación:

- **Ancho de banda de una señal estrictamente limitada en banda:** intervalo espectral en el que la potencia o energía de la señal es distinto de cero. **No existen** en la realidad al presentar no causalidad (duración temporal infinita, *x(t) =sinc(t)*)
- **Ancho de banda equivalente (W_{EQ}):** se define como el que tendría que tener una señal estrictamente limitada en banda de la misma potencia que la señal de entrada *x(t)* pero con una dep o dee uniforme cuyo valor es el máximo de la DEP o DEE. El calculo de P_x o E_x se pueden calcular en el dominio del tiempo o frecuencia

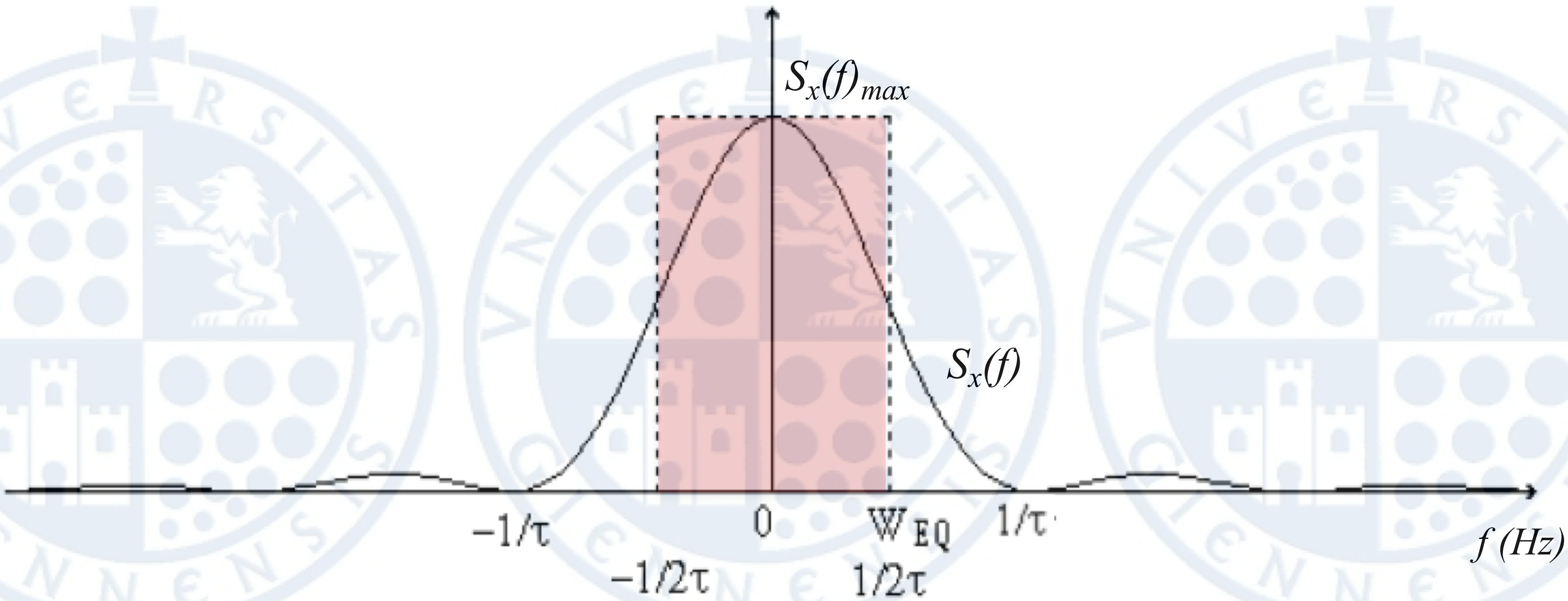
$$P_x = 2 \cdot G_x(f)|_{\max} \cdot W_{EQ} \qquad E_x = 2 \cdot S_x\left(f\right)\Big|_{\max} \cdot W_{EQ}$$

$$W_{EQ} = \frac{P_x}{2 \cdot G_x(f)|_{\max}} \qquad W_{EQ} = \frac{E_x}{2 \cdot S_x(f)|_{\max}}$$

Ancho de banda (II)

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{TF} X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) \Rightarrow S_x(f) = \left|X(f)\right|^2 = A^2\tau^2 \operatorname{sinc}^2(\tau f)$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = A^2\tau \\ S_x(f)\Big|_{\max} &= A^2\tau^2 \end{aligned}\right\} W_{EQ} = \frac{E_x}{2\cdot S_x(f)|_{\max}} = \frac{A^2\tau}{2A^2\tau^2} = \frac{1}{2\tau}\ Hz$$



Ancho de banda (III)

• **Ancho de banda 3dB (W_{3dB}):** se define por el intervalo entre la frecuencia f_{max} donde la densidad espectral $G_x(f)$, $S_x(f)$ es máxima y por aquella frecuencia f_{3dB} en la que $G_x(f)$, $S_x(f)$ disminuye a la mitad de su valor máximo.

$$G_x(f_{3dB}) = \frac{G_x(f)|_{\max}}{2} \Rightarrow W_{3dB} = \left| f_{\max} - f_{3dB} \right| \text{ donde } G_x(f)|_{\max} = G_x\left(f_{\max}\right)$$

• **Ancho de banda del 90% $W_{0.9}$:** ancho de banda en el que está contenido el 90% de la potencia (o energía) de la señal $x(t)$. Sólo tiene sentido con señales reales.

$$2 \cdot \int_0^{W_{0.9}} G_x(f)\,df = 0.9 \cdot P_x \qquad 2 \cdot \int_0^{W_{0.9}} S_x(f)\,df = 0.9 \cdot E_x$$

• **Ancho de banda de primer nulo W_{pn} en banda base:** se define como el intervalo que existe entre el origen de frecuencias y la primera frecuencia donde el espectro de potencia o energía es nulo. Se emplea mucho para señales **digitales** o pulsos, donde el espectro presenta nulos equi-espaciados.

Ancho de banda (IV)

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \Rightarrow S_x(f) = A^2\tau^2 \sin c^2\left(\tau f\right)$$

$$\bullet\, S_x(f_{3dB}) = \frac{S_x(f)\big|_{\max}}{2} \Rightarrow A^2\tau^2 \sin c^2\left(\tau f_{3dB}\right) = \frac{A^2\tau^2}{2} \Rightarrow \sin c^2\left(\tau f_{3dB}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{3dB} = \frac{0.443}{\tau}$$

$$\Rightarrow W_{3dB} = \left|f_{\max} - f_{3dB}\right| = \left|0 - \frac{0.443}{\tau}\right| = \frac{0.443}{\tau}\,Hz$$

$$\bullet\, 2\cdot\int_0^{W_{0.9}} S_x(f)\,df = 0.9\cdot E_x \Rightarrow \int_0^{W_{0.9}} S_x(f)\,df = \frac{0.9\cdot A^2\tau}{2} \Rightarrow \int_0^{W_{0.9}} A^2\tau^2 \sin c^2\left(\tau f\right)df = \frac{0.9\cdot A^2\tau}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{W_{0.9}} \sin c^2\left(\tau f\right)df = \frac{0.9}{2\tau} \Rightarrow W_{0.9} = \frac{1.25}{\tau}\,Hz$$

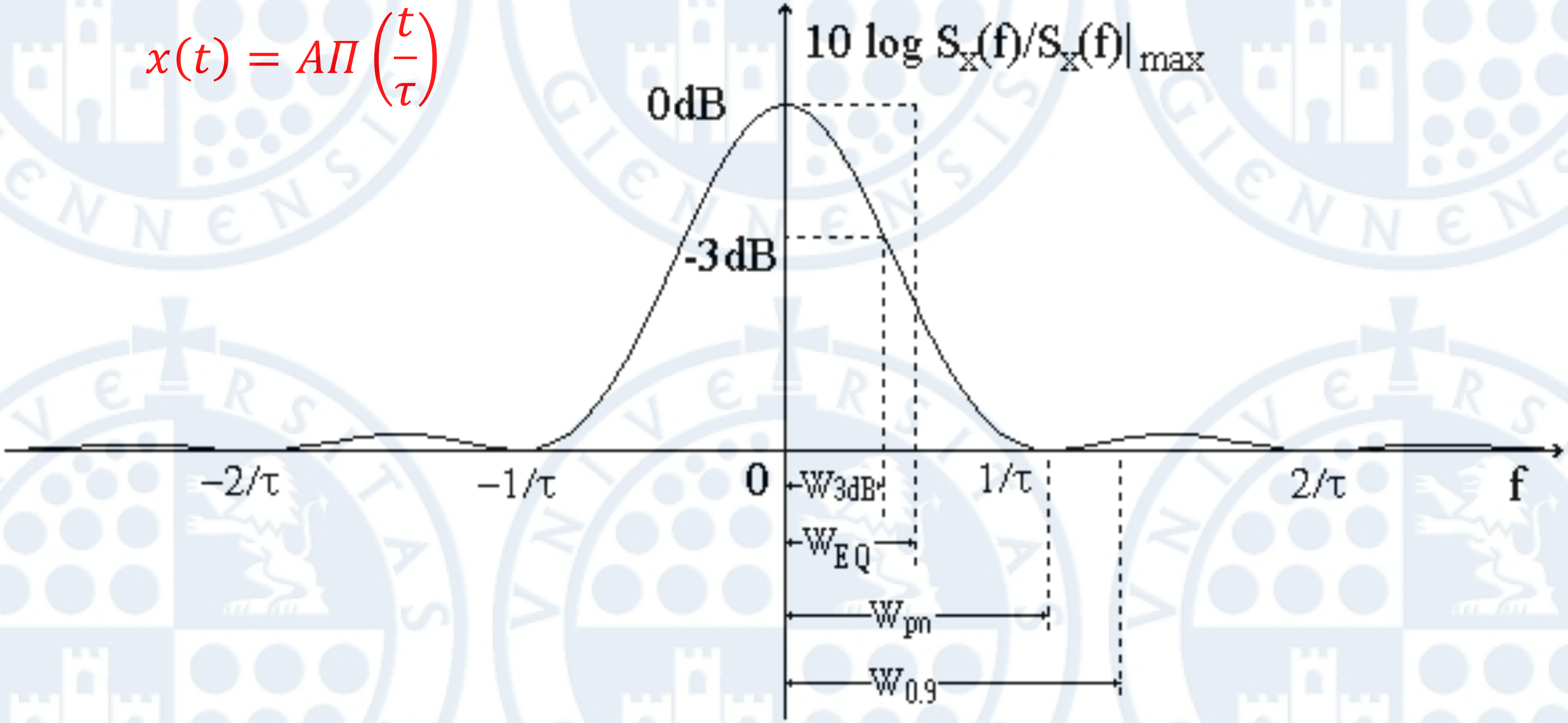
$$\bullet S_x(f) = 0 \Rightarrow A^2\tau^2 \sin c^2\left(\tau f\right) = 0 \Rightarrow \sin c^2\left(\tau f\right) = 0 \Rightarrow \sin c\left(\tau f\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)} = 0$$

$$\Rightarrow \pi\tau f = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{\tau},\, k \in Z \Rightarrow W_{pn}(k=1) = \frac{1}{\tau}\,Hz$$

Ancho de banda (V)

Señal paso-bajo (banda base)

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$W_{3dB} = \frac{0.443}{\tau} \qquad W_{EQ} = \frac{1}{2\tau} \qquad W_{pn} = \frac{1}{\tau} \qquad W_{0.9} = \frac{1.25}{\tau}$$

Ancho de banda (VI)

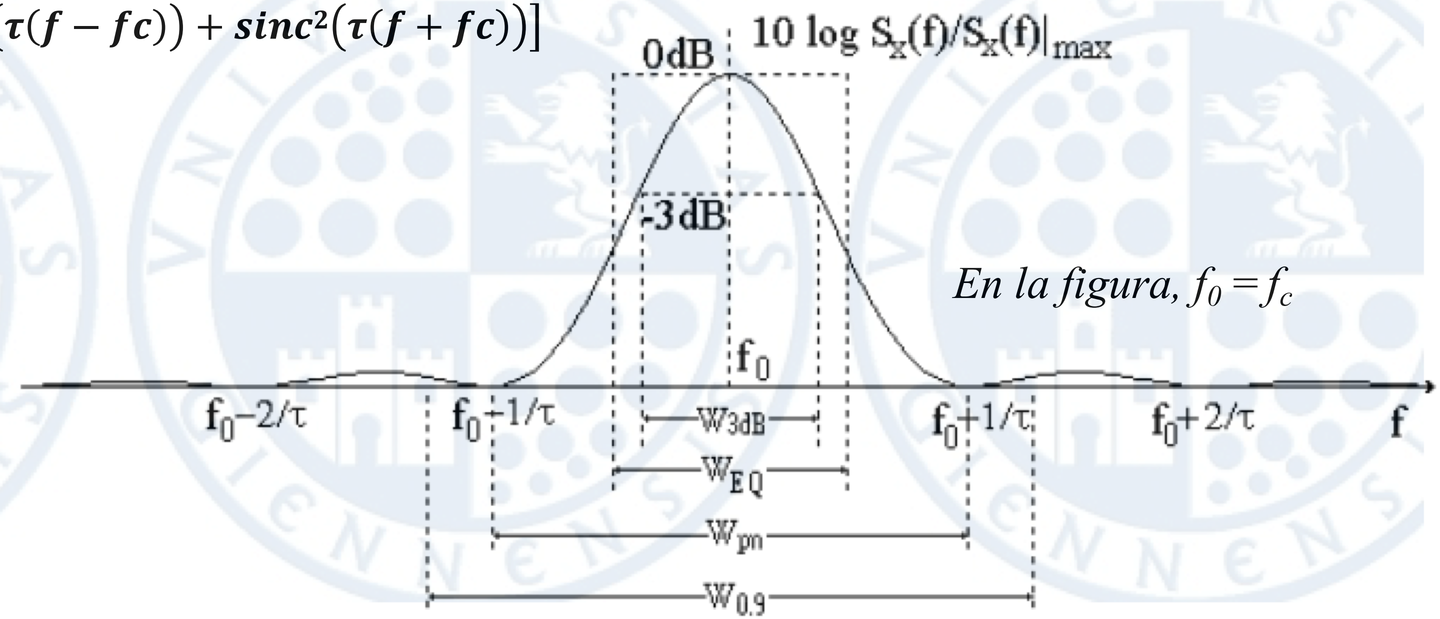
Señal paso-banda. Características de las señales paso-banda:

- Potencia concentrada entorno a la frecuencia f_c >> 0Hz
- Señales de banda estrecha $\left(\frac{W}{f_c} \ll 1\right)$
- El ancho de banda es el **doble** del ancho de banda de una señal paso-bajo

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{2A}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)cos(2\pi fct)}$$

$$\boldsymbol{X(f) = 2Asinc(\tau f) * \frac{1}{2}[\delta(f - fc) + \delta(f + f_c)] = A\big[sinc\big(\tau(f - fc)\big) + sinc\big(\tau(f + f_c)\big)\big]}$$

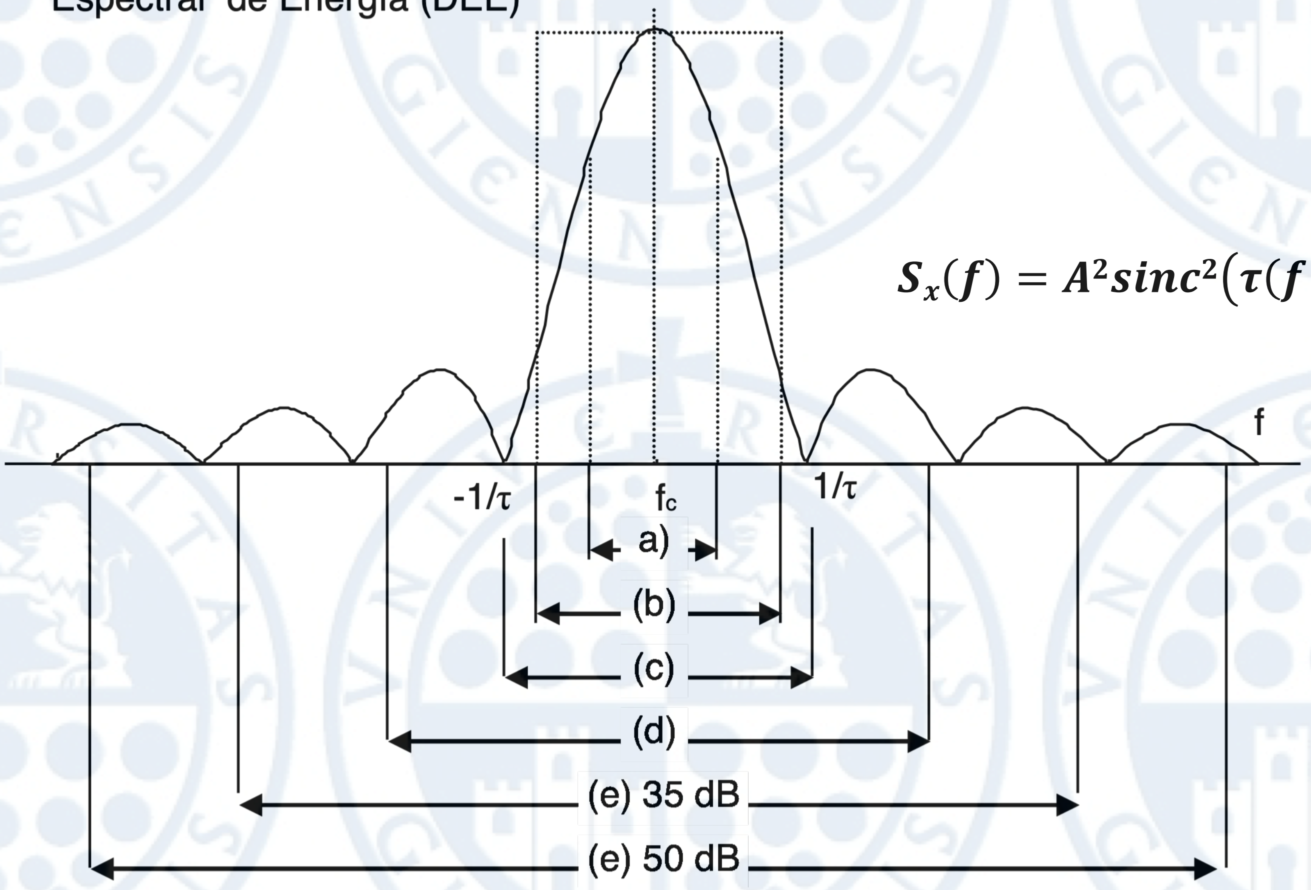
$$\boldsymbol{S_x(f) = A^2\big[sinc^2\big(\tau(f - fc)\big) + sinc^2\big(\tau(f + fc)\big)\big]}$$



En la figura, $f_0 = f_c$

Ancho de banda (VII)

Otros ancho de banda de señal paso-banda.



$$S_x(f) = A^2 sinc^2\big(\tau(f - fc)\big)$$

Ancho de banda de un pulso de modulado (pulso de RF). a) Potencia mitad. b) De ruido equivalente. c) De nulo a nulo. d) 99% de la energía. e) Limitando la *DEE* (atenuación fuera del ancho de banda) a 35 y 50 dB.