



Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 3

SEÑALES ALEATORIAS EN SISTEMAS DE COMUNICACIÓN (II)

Contenidos

1. El **ruido** como proceso estocástico presente en los sistemas de comunicación
2. Caracterización espectral del ruido: **ruido blanco** y **ruido coloreado**
3. Procesos **estocásticos paso-banda**
4. Ruido paso-banda (o de banda estrecha)

Objetivos específicos

- **Características espectrales y autocorrelación del ruido blanco y salida de un sistema LTI** excitado con ruido blanco
- Caracterización a través de su autocorrelación y densidad espectral, los **procesos estocásticos paso-banda**, y los procesos analíticos y envolvente compleja asociados
- Características del **ruido paso-banda** obtenido a partir del filtrado de ruido blanco.

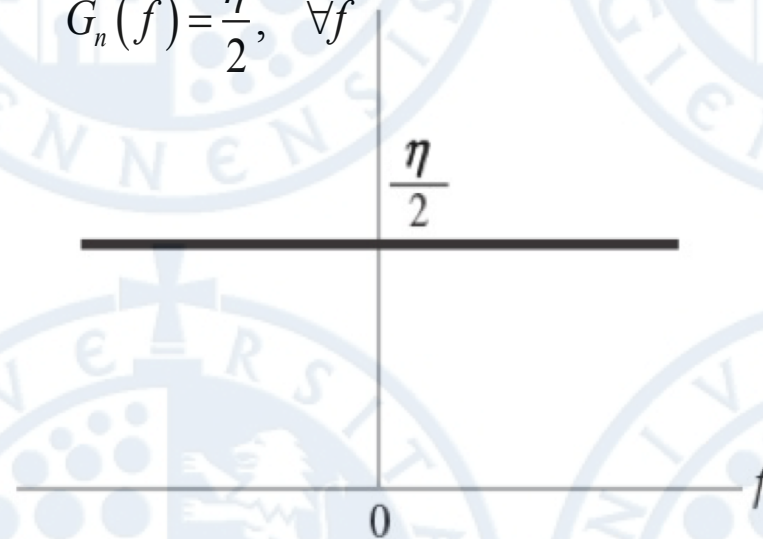
El ruido en los sistemas de comunicaciones

- El ruido es el **proceso estocástico** (señal **aleatoria**) más importante que aparece en los sistemas de comunicaciones. Este proceso estocástico distorsiona a las señales que transportan la información en un sistema de comunicación.
- En sistemas de comunicación analógicos, donde la medida de la calidad se hace a través de la relación señal a ruido, la mayoría de las veces resulta más que suficiente caracterizar al ruido $n(t)$ a través de su media η_n y función de autocorrelación $R_n(\tau) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} G_n(f)$
- En sistemas de comunicación digital, los estadísticos del ruido permiten estimar la probabilidad de una determinada amplitud de ruido
- El **ruido** que aparece en los sistemas de comunicaciones se puede considerar **estacionario** en sentido amplio o relajado: $\eta_n(t) = \eta_n$, $R_n(t_1, t_2) = R_n(\tau)$

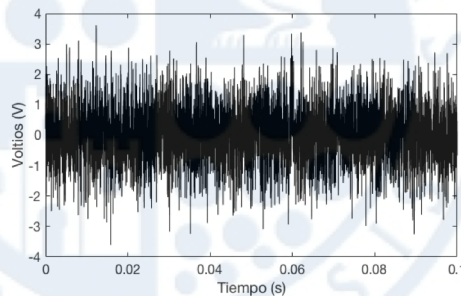
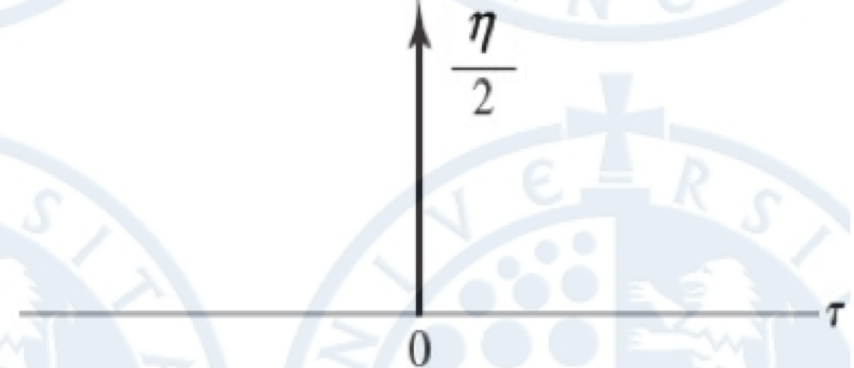
Ruido blanco y ruido coloreado (I)

- El **ruido blanco** $n(t)$ es un modelo **ideal** de ruido, siendo un proceso **estacionario** en sentido **relajado** ($\eta_n = 0$, $R_n(\tau)$) cuya **densidad espectral de potencia** $G_n(f)$ es **constante**

$$G_n(f) = \frac{\eta}{2}, \quad \forall f$$



$$R_n(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau)$$



Fragmento de 100ms de una señal de ruido blanco $n(t)$ con una potencia media de 1W. Las muestras son independientes entre sí

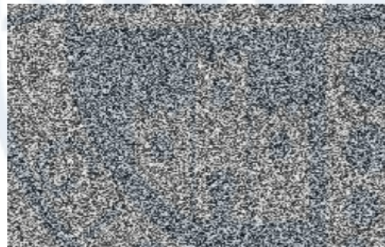


Imagen blanco y negro de un canal de TV no sintonizado. La variación de los píxeles de cada línea horizontal representa una señal de ruido blanco

Ejemplo: ruido térmico (Johnson, 1928) debido al movimiento aleatorio de los electrones en un medio conductor. Este movimiento da lugar a una corriente aleatoria y debido a ella en bornes de una resistencia aparece una tensión de ruido. El espectro de potencia del ruido térmico es prácticamente plano hasta aprox. 10^{13} Hz, de forma que en el ámbito de la Teoría de la Comunicación, puede considerarse constante

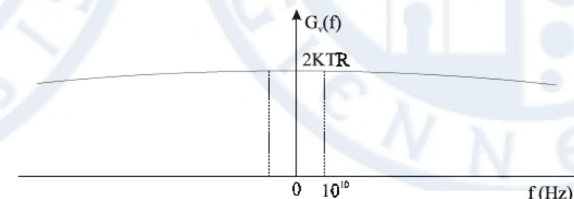


Figura 3.6. Densidad espectral de potencia del ruido térmico.

Ruido blanco y ruido coloreado (II)

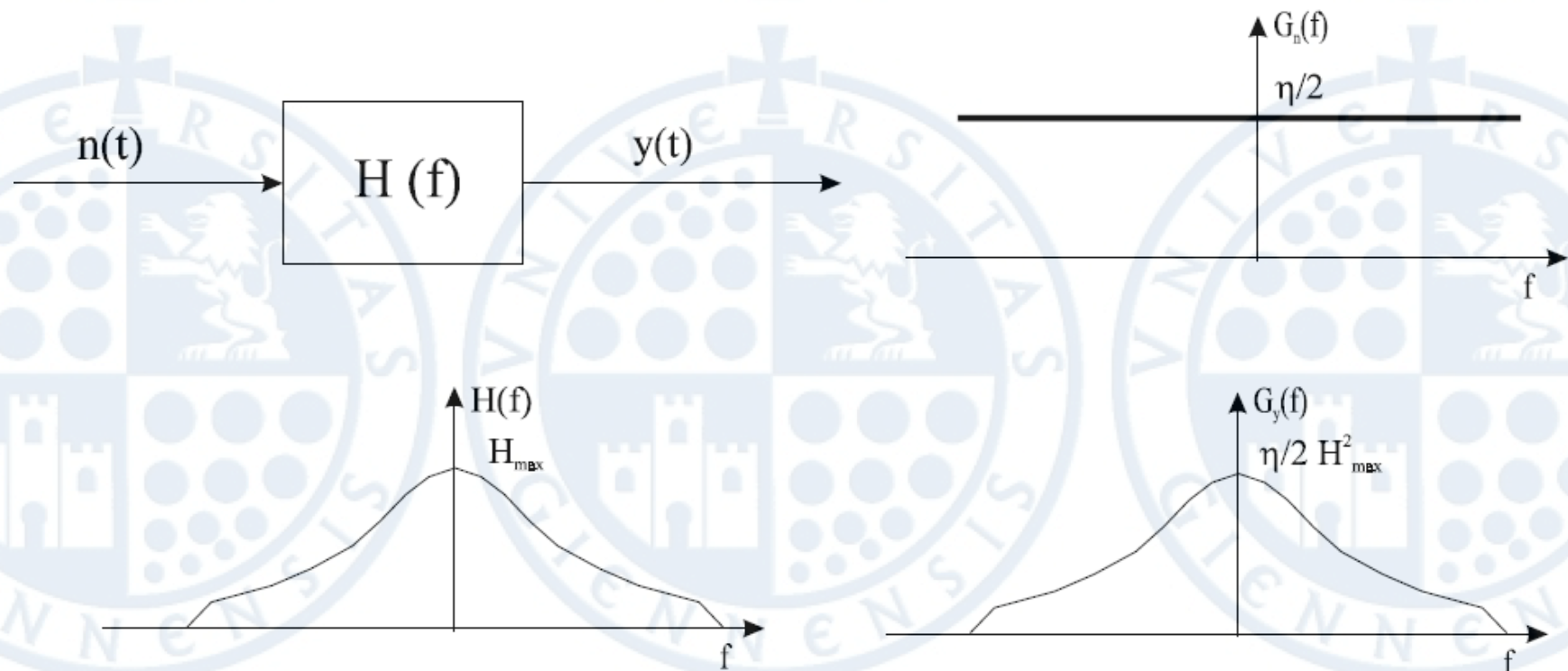
- Un proceso estocástico blanco no puede existir físicamente porque es un proceso que tendría **potencia infinita**. **Utilidad: el ruido que aparece en un sistema de comunicaciones se puede aproximar a ruido blanco** si el ancho de banda de dicha señal ruidosa es mucho más grande que el ancho de banda de la señal a transmitir en el sistema de comunicación
- Como se puede deducir del espectro y de la autocorrelación del ruido blanco, la media del proceso es cero, y las distintas **variables aleatorias** que componen el proceso estocástico son **incorreladas** y **ortogonales** entre sí.
- Si el proceso estocástico además de blanco es gaussiano, podemos decir que las variables aleatorias que componen el proceso estocástico son **independientes**.

Ruido blanco y ruido coloreado (III)

- Si un ruido blanco $n(t)$ atraviesa un sistema LTI con función de transferencia $H(f)$, la salida $y(t)$ del sistema es **ruido coloreado**

$$G_y(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2$$

El ruido coloreado $y(t)$ tiene una densidad espectral de potencia $G_y(f)$ que **no es plana**, sino que ha sido conformado por $H(f)$

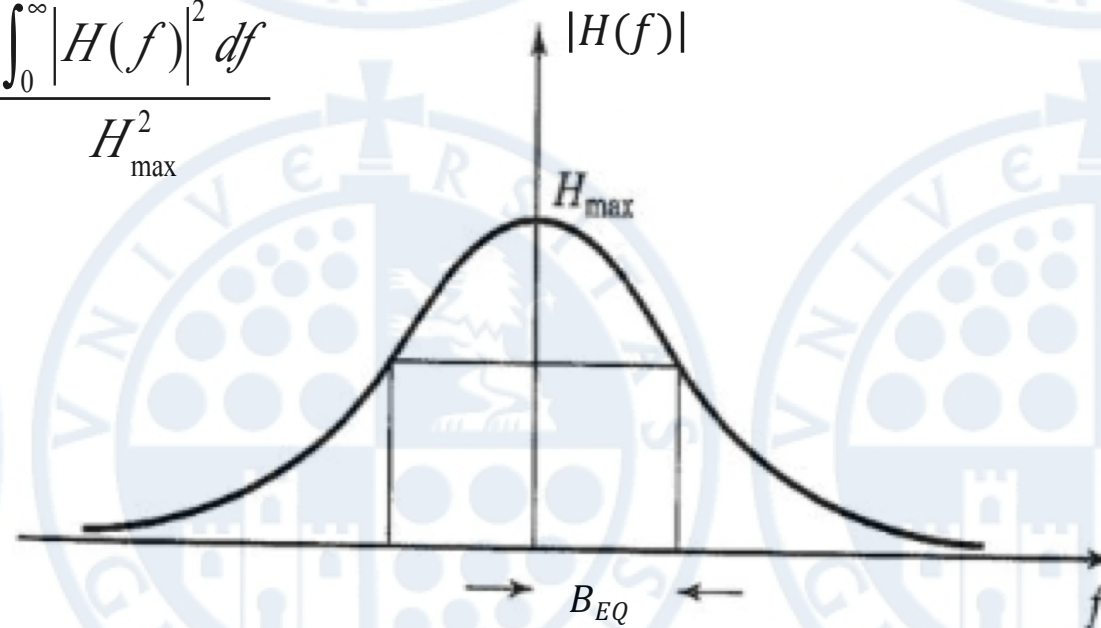


Ruido blanco y ruido coloreado (IV)

- **Ancho de banda equivalente de ruido B_{EQ} de un sistema LTI:** el ancho de banda que tendría un filtro ideal (respuesta en frecuencia **plana**) cuya función de transferencia $H(f)$ tuviese una amplitud igual al valor máximo de $|H(f)|$ para que dejara pasar la misma potencia de ruido que el sistema LTI

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} H_{\max}^2 2B_{EQ}$$

$$\Rightarrow B_{EQ} = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{H_{\max}^2}$$

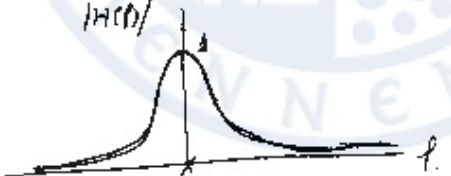


- Para que la relación señal a ruido tenga sentido en un sistema de comunicaciones de esta asignatura, es necesario que el **ruido** sea **aditivo**.

Ruido blanco y ruido coloreado (V)

Ejemplo: Suponiendo que se desea analizar el siguiente sistema de un filtro paso bajo con $H(f) = \frac{1}{1+j\omega RC}$, calcule el ancho de banda equivalente de ruido

$$H(f) = \frac{1}{1+j\omega RC} \Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1+(\omega RC)^2}$$

$$\stackrel{\omega=2\pi f}{=} \frac{1}{1+4\pi^2 f^2 R^2 C^2}$$


$$B_{EQ} = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H(f)|_{max}^2} \Rightarrow |H(f)|_{max}^2 = 1 \Rightarrow B_{EQ} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 f^2 R^2 C^2} df$$

$\Rightarrow \int \frac{u'}{1+u^2} du = \arctan u$. aplicamos dicha igualdad: $u = 2\pi fRC$,

$$B_{EQ} = \frac{1}{2\pi RC} \int_0^{\infty} \frac{2\pi RC}{1+(2\pi RC f)^2} df =$$

$$= \frac{1}{2\pi RC} \arctan(2\pi RC f) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi RC} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4RC} = B_{EQ}$$

Soluc: $B_{EQ} = \frac{1}{4RC}$

Proceso estocásticos paso banda (I)

Para señales reales determinísticas $x(t)$ paso-banda (modulada, Tema 2)

$$x(t) = x_F(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t) - x_C(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t)$$

$$\hat{x}(t) = x_F(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t) + x_C(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t)$$

siendo $x_F(t)$ y $x_C(t)$ señales reales determinísticas **paso-bajo** que reciben el nombre de componentes en fase y cuadratura de la señal $x(t)$. La señal $x(t)$ paso-banda se puede expresar en función de su equivalente-paso bajo (envolvente compleja) $v_x(t)$

$$v_x(t) = x_F(t) + j \cdot x_C(t)$$

$$x(t) = \text{Re}\left(v_x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\right) = \text{Re}\left(x_+(t)\right) = \text{Re}\left(x(t) + j \hat{x}(t)\right)$$

- **Considerando señales aleatorias estacionarias**, un proceso estocástico $x(t)$ real paso-banda tiene asociado un proceso estocástico $v_x(t)$ paso-bajo equivalente (envolvente compleja) cuya autocorrelación $R_{v_x}(\tau)$ está dada por:

$$R_{v_x}(\tau) = E\left[v_x(t+\tau) \cdot v_x^*(t)\right] = E\left[\left(x_F(t+\tau) + j \cdot x_C(t+\tau)\right) \cdot \left(x_F(t) - j \cdot x_C(t)\right)\right]$$

$$R_{v_x}(\tau) = R_{x_F}(\tau) + R_{x_C}(\tau) - j \cdot R_{x_F x_C}(\tau) + j \cdot R_{x_C x_F}(\tau)$$

$$R_{v_x}(\tau) = R_{x_F}(\tau) + R_{x_C}(\tau) - j \cdot R_{x_F x_C}(\tau) + j \cdot R_{x_F x_C}(-\tau)$$

Proceso estocásticos paso banda (II)

$$R_{v_x}(\tau) = R_{x_F}(\tau) + R_{x_C}(\tau) - 2 \cdot j \frac{R_{x_F x_C}(\tau) - R_{x_F x_C}(-\tau)}{2}$$

$$R_{v_x}(\tau) = R_{x_F}(\tau) + R_{x_C}(\tau) - 2 \cdot j \cdot \text{Impar}(R_{x_F x_C}(\tau))$$

En la expresión anterior considerando $\tau = 0$, tenemos que:

$$R_{v_x}(0) = R_{x_F}(0) + R_{x_C}(0) - j \cdot R_{x_F x_C}(0) + j \cdot R_{x_F x_C}(0) = R_{x_F}(0) + R_{x_C}(0)$$

, de donde tenemos que la potencia del proceso envolvente compleja es la suma de las potencias de las señales en fase y cuadratura (superposición de potencias):

$$R_{v_x}(0) = R_{x_F}(0) + R_{x_C}(0) \Rightarrow P_{v_x} = P_{x_F} + P_{x_C}$$

La densidad espectral de potencia de la envolvente compleja es igual a

$$G_{v_x}(f) = F(R_{v_x}(\tau)) \Rightarrow G_{v_x}(f) = G_{x_F}(f) + G_{x_C}(f) + 2 \cdot \text{Im}(G_{x_F x_C}(f))$$

Por tanto, el ancho de banda de la envolvente compleja $v_x(t)$ será menor o igual que el mayor de los anchos de banda de las componentes $x_F(t)$ y $x_C(t)$.

Proceso estocásticos paso banda (III)

Para señales determinísticas $x(t)$ paso-banda reales se demostró en el tema 2 que las señal analíticas asociadas son señales compleja paso-banda

$$x_+(t) = v_x(t) \cdot e^{j2\pi f_c \cdot t}$$

$$x_-(t) = v_x^*(t) \cdot e^{-j2\pi f_c \cdot t}$$

- Para **señales aleatorias estacionarias** paso-banda reales se puede demostrar que:

$$R_{x_+}(\tau) = E[x_+(t+\tau) \cdot x_+^*(t)]$$

$$R_{x_-}(\tau) = E[x_-(t+\tau) \cdot x_-^*(t)]$$

$$R_{x_+}(\tau) = R_{v_x}(\tau) \cdot e^{j2\pi f_c \tau}$$

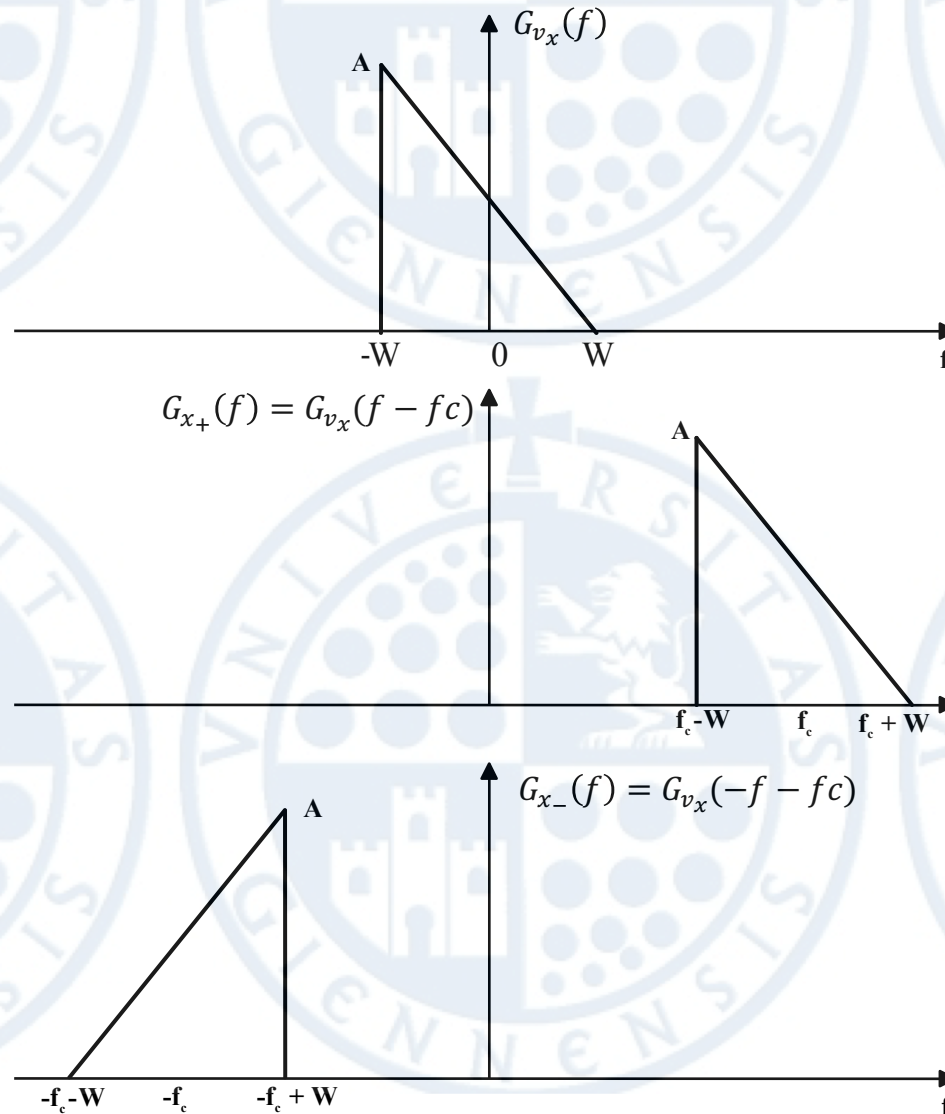
$$R_{x_-}(\tau) = R_{v_x}^* \cdot e^{-j2\pi f_c \tau}$$

$$R_{x_+}(0) = R_{v_x}(0) \Rightarrow P_{x_+} = P_{x_F} + P_{x_C}$$

$$R_{x_-}(0) = R_{v_x}(0) \Rightarrow P_{x_-} = P_{x_F} + P_{x_C}$$

Proceso estocásticos paso banda (IV)

- Para **señales $x(t)$ aleatorias estacionarias** paso-banda reales se puede demostrar que el espectro de potencia $G_{x_+}(f)$, $G_{x_-}(f)$ de la señal analítica $x_+(t)$, $x_-(t)$:



Proceso estocásticos paso banda (V)

Para señales determinísticas $x(t)$ paso-banda reales,

$$x(t) = \text{Re}[x_+(t)] = \frac{x_+(t) + x_+^*(t)}{2} = \frac{x_+(t) + x_-(t)}{2}$$

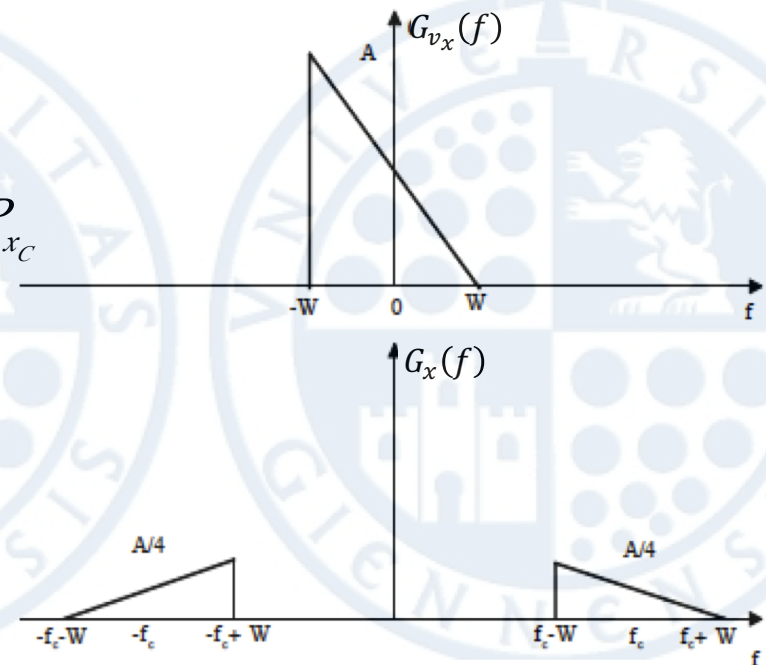
- Para señales aleatorias $x(t)$ paso-banda reales se puede demostrar que,

$$R_x(\tau) = E[x(t+\tau)x^*(t)] = \frac{1}{4} \cdot E[(x_+(t+\tau) + x_-(t+\tau))(x_+^*(t) + x_-^*(t))]$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{4} R_{x_+}(\tau) + \frac{1}{4} R_{x_-}(\tau) \Rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{4} R_{v_x}(\tau) e^{j2\pi f_c \tau} + \frac{1}{4} R_{v_x}^*(\tau) e^{-j2\pi f_c \tau}$$

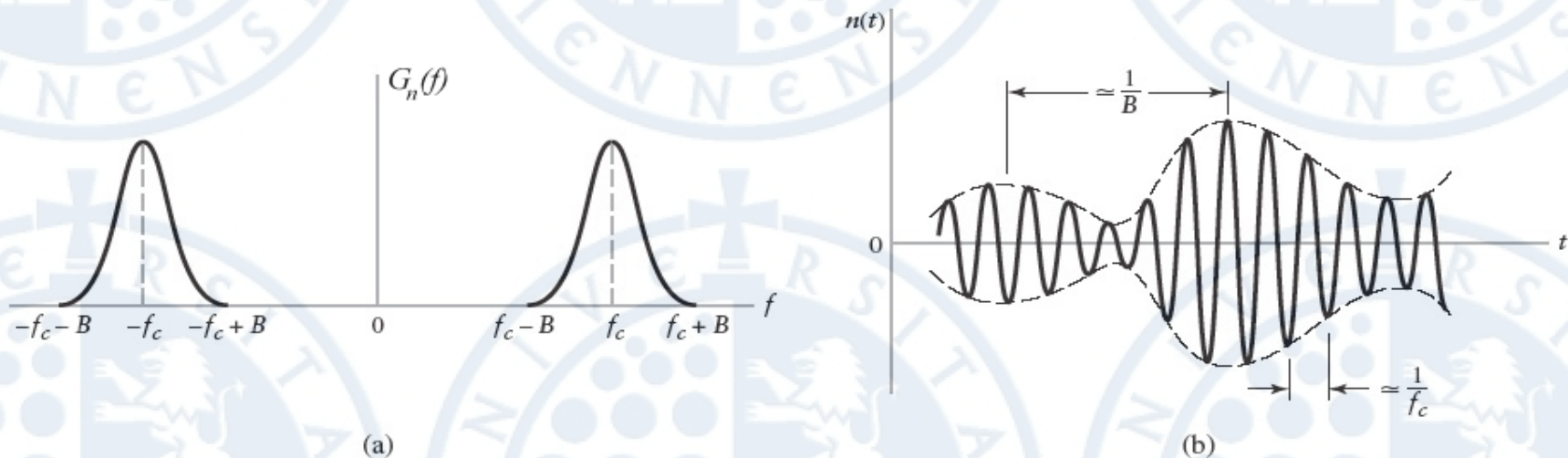
$$G_x(f) = \frac{1}{4} G_{v_x}(f - f_c) + \frac{1}{4} G_{v_x}(-f - f_c)$$

$$P_x = \frac{1}{2} P_{v_x} = \frac{1}{2} P_{x_+} = \frac{1}{2} P_{x_-} \Rightarrow P_x = \frac{1}{2} P_{x_F} + \frac{1}{2} P_{x_C}$$



Ruido paso-banda (I)

- En múltiples receptores de comunicaciones es frecuente encontrar etapas donde se hace un filtrado paso-banda de ruido blanco (filtros de pre-detección).
- La señal aleatoria que se tiene, se conoce como **ruido paso-banda** o ruido de banda estrecha (ya que el ancho de banda del filtro es en general pequeño comparado con la frecuencia central de la banda de paso)



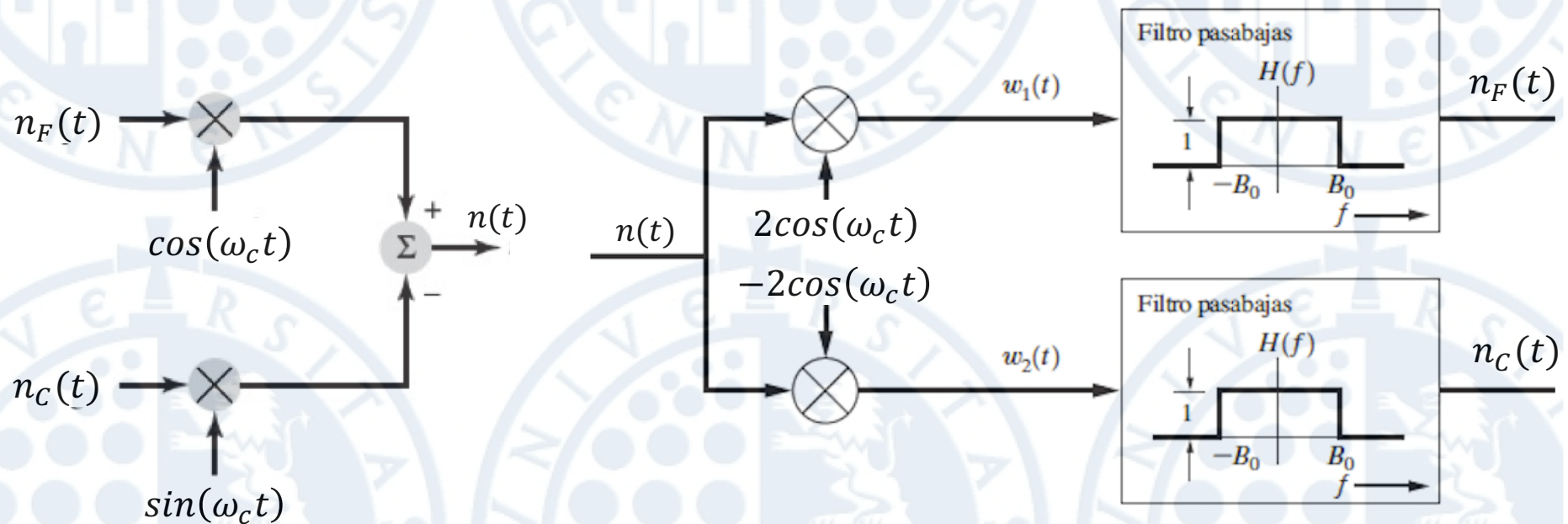
a) Densidad espectral del ruido de banda estrecha. b) Realización típica de ruido de banda estrecha.

- Como podemos ver una realización típica del ruido $n(t)$ de banda estrecha se asemeja a una señal sinusoidal donde la fase y la amplitud de la senoide varia lentamente de forma aleatoria.

Ruido paso-banda (II)

- El **ruido $n(t)$ paso-banda** se puede expresar como cualquier señal paso banda en función de sus componentes en **fase** y **cuadratura**:

$$n(t) = n_F(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t) - n_C(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t)$$



Generación de ruido paso-banda $n(t)$ a partir de sus componentes en fase $n_F(t)$ y cuadratura $n_C(t)$

Recuperación de las componentes en fase $n_F(t)$ y cuadratura $n_C(t)$ a partir del ruido paso-banda $n(t)$. Nota: B_0 deja pasar solamente la componente de la señal de ruido paso bajo eliminando la componente localizada en $f=2f_c$

Ruido paso-banda (III)

• Las componentes en fase $n_F(t)$ y cuadratura $n_C(t)$ del ruido paso-banda tienen las siguientes propiedades:

1. La componente en fase y en cuadratura tienen media nula.
2. Si el ruido paso-banda era gaussiano, sus componentes en fase y cuadratura también son gaussianas.
3. Si el **ruido** paso-banda es **estacionario** también lo son sus componentes en **fase y cuadratura**.
4. La densidades espectral de las componentes en fase y cuadratura coinciden, es decir, $G_{n_F}(f) = G_{n_C}(f)$.

$$G_{n_F}(f) = G_{n_C}(f) = \begin{cases} \eta & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

5. La densidad espectral $G_n(f)$ de potencia del ruido $n(t)$ paso-banda se relacionan con las de sus componentes en fase y cuadratura,

$$G_n(f) = G_{n_C}(f) = \begin{cases} G_n(f - f_c) + G_n(f + f_c) & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

6. La potencia de la componente de ruido en fase y cuadratura coincide con la potencia P_n del ruido paso-banda $n(t)$

$$P_n = P_{n_F} = P_{n_C} = 2B\eta$$

Ruido paso-banda (IV)

