Matrices y determinantes

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra de gran utilidad en muchas disciplinas.

Los campos de aplicación de la teoría de las matrices y de los determinantes son muy amplios, abarcando desde las más clásicas aplicaciones en el campo de las Matemáticas y de la Física, como son, entre otras, su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que se verá en el capítulo siguiente, o en el análisis de la dependencia lineal de un conjunto de vectores, hasta su aplicación en disciplinas como las Ciencias Sociales, la Economía o la Biología, donde las matrices aparecen de manera natural, facilitando la ordenación y el manejo de datos.

1. Matrices. Definición

Una **matriz** es una disposición rectangular de números en filas y columnas del modo siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Filas de la matriz } A$$

$\uparrow$

Columnas de la matriz A

Cada elemento de la matriz tiene dos subíndices. El primero indica la fila y el segundo la columna a las que pertenece el elemento. Así, el elemento a_{ij} es el elemento de la matriz A situado en la i-ésima fila y en la j-ésima columna. Por ejemplo, el elemento a_{34} es el elemento situado en la tercera fila y cuarta columna.

La matriz A también se puede expresar de forma abreviada como $A = (a_{ij})$.

Orden, tamaño o dimensión de una matriz.

Si una matriz A tiene m filas y n columnas se dice que es de orden $m \times n$ o que su tamaño o dimensión es $m \times n$ (siempre en primer lugar el número de filas y en segundo lugar el de columnas).

2. Tipo de matrices

• Se llama **matriz nula** a la matriz cuyos elementos son todos cero.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz nula de orden 2×3.

• Se llama **matriz fila** a la matriz que sólo tiene una fila, es decir, a una matriz de orden $1 \times n$.

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz fila de dimensión 1×5.

• Se llama **matriz columna** a la matriz que sólo tiene una columna, es decir, a una matriz de orden $m \times 1$.

Ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

es una matriz columna de tamaño 4×1.

• Se llama **matriz traspuesta** de una matriz A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtienen al intercambiar las filas y las columnas de A. Por tanto, si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$ entonces $A^t = (a_{ji})$ es de orden $n \times m$.

Ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces la matriz traspuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.

• Un matriz se dice que es **escalonada** si cumple que:

1. Todas las filas cero están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento de cada fila diferente de cero está a la derecha del primer elemento diferente de cero de la fila anterior.

Ejemplo:

Matrices escalonadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices no escalonadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

• Se llama **matriz cuadrada** a la matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, a una matriz de orden $n \times n$ o simplemente de orden n.

Ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

En una matriz cuadrada:

- Se llama **diagonal principal** en la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & a_{m2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  a la formada por los elementos que tienen los dos subíndices iguales, es decir, a la formada por $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. En la matriz D del ejemplo anterior, la diagonal principal está formada por los elementos 1, 3, 5.

- Se llama **diagonal secundaria** en la matriz cuadrada A a la formada po los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$. En la matriz D del ejemplo anterior, la diagonal principal está formada por los elementos 6, 3, -1.

- Se define **la traza** de la matriz A, y se denota por $tr(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

  En la matriz D del ejemplo anterior, se tiene que $tr(A) = 1 + 3 + 5 = 9$.

• Se llama **matriz triangular** a la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal.

Si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos, se dice que la matriz es **triangular superior** y **triangular inferior** si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular superior y $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ es triangular inferior.

Si una matriz cuadrada es a la vez triangular superior e inferior se le denomina **matriz diagonal**. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

En particular, la matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son uno, se denomina **matriz unidad o identidad**. Se representa por I_n, donde n es el orden de la matriz.

Ejemplo:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son las matrices identidad de orden 2, 3 y 4, respectivamente.

• Se llama **matriz simétrica** a la matriz cuadrada que coincide con su traspuesta, es decir, aquella para la que se cumple que $A^t = A$.

Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

En una matriz simétrica, los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

• Se llama **matriz antisimétrica o hemisimétrica** a la matriz cuadrada para la que se cumple que $A^t = -A$.

Entonces, se cumple que $a_{ji} = -a_{ij}$ para todo $i, j = 1, 2 \ldots, n$ y, por tanto, $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, 2 \ldots, n$. Así, en una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son siempre nulos, y los restantes son opuestos respecto a dicha diagonal.

Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica.

3. Operaciones con matrices

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden $m \times n$, se define la suma como la matriz de orde $m \times n$ en la que cada elemento es igual a la suma de los elementos correspondientes de A y B. Así,

$$(A + B) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

La suma de matrices no está definida para matrices de distinto orden.

Propiedades de la suma de matrices:

a) Conmutativa: $A + B = B + A$

b) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Elemento neutro: La matriz nula del orden correspondiente.

d) Elemento opuesto de A: La matriz $-A$, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

e) Se verifica: $(A+B)^t = A^t + B^t$

Producto de una matriz por un escalar

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real cualquiera k, el producto kA es la matriz $kA = (ka_{ij})$ del mismo orden que A.

Ejemplo: $-4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Propiedades:

Sean A y B dos matrices y r y s dos números reales cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Distributiva respecto de la suma de matrices: $k(A+B) = kA + kB$

b) Distributiva respecto de la suma de números: $(r+s)A = rA + sA$

c) Asociativa: $r(sA) = (rs)A$

d) Elemento neutro, el número 1: $1A = A$

e) Se verifica: $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

Producto de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de ordenes $m \times p$ y $p \times n$, respectivamente, se define el producto AB, en este orden, como la matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times n$, tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Obsérvese que esta operación sólo está definida cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. Si no es así las matrices no son multiplicables.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota:

- Una matriz cuadrada A tal que $A^p = A$, donde $A^p = A \cdot \overset{p)}{\ldots} \cdot A$ y siendo p un número entero y positivo, se llama **nilpotente**.

- Una matriz cuadrada A tal que $A^2 = A$ se llama **idempotente**.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propiedades del producto de matrices:

Dadas las matrices A, B y C se cumplen las propiedades siguientes, suponiendo que los ordenes de las mismas cumplen las condiciones para poder realizar las correspondientes sumas y productos:

a) Asociativa: $A(BC) = (AB)C$

b) Distributiva respecto de la suma:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (B+C)A &= BA + CA \end{aligned}$$

c) Elemento neutro, la matriz identidad correpondiente, esto es, si A es $m \times n$:

$$\begin{aligned} I_n \text{ es el elemento neutro para la multiplicación por la izquierda: } A\, I_n &= A \\ I_m \text{ es el elemento neutro para la multiplicación por la derecha: } I_m\, A &= A \end{aligned}$$

d) El producto de matrices no es, en general, conmutativo.

e) El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$.

Ejemplo:

Dadas

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

se cumple que $AB = AC = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $B \neq C$.

g) Se verifica: $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

4. Matriz inversa

El producto de matrices cuadradas de cualquier orden tiene un elemento neutro: la matriz identidad de ese orden, es decir, si A es una matriz cuadrada de orden n, se tiene que $AI_n = I_n A = A$.

Por tanto, tiene sentido preguntarse si dada una matriz cuadrada A de orden n, cualquiera, existe su inversa X para el producto de matrices, tal que $AX = XA = I_n$.

Definición

Dada una matriz cuadrada de orden n , A, se dice que A es **invertible o regular o no singular o simplemente que posee inversa**, si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, denominada **matriz inversa de** A, que se denota por A^{-1}, tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es singular o no invertible.

Nota: Una matriz cuadrada A tal que $A^2 = I$, se llama **involutiva**. Por tanto, la inversa de una matriz involutiva es ella misma.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propiedades de la matriz inversa:

a) La inversa de una matriz, si existe, es única.

b) Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} también es invertible y se verifica: $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Si A es una matriz invertible, entonces A^t también es invertible y se verifica: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

d) Si A y B son matrices invertibles del mismo orden, entonces AB también es invertible y se verifica: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

e) Si A es una matriz invertible y k un número real cualquiera, entonces kA también es invertible y se verifica: $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

Matriz ortogonal. Definición. Una matriz cuadrada de orden n se llama ortogonal si

$$A^t A = AA^t = I_n$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Se cumple que:

- Una matriz cuadrada A de orden n es ortogonal si y sólo si es invertible y $A^{-1} = A^t$.

- La matriz identidad de orden n es una matriz ortogonal.

- Si A y B son dos matrices ortogonales de orden n, entonces AB también es una matriz ortogonal de orden n.

- Si A es una matriz ortogona de orden n, entonces A^{-1} también es una matriz ortogonal de orden n.

Cálculo de la matriz inversa

El cálculo de la matriz inversa no es inmediato, en este apartado veremos dos métodos para el cálculo de la matriz inversa de una matriz dada cuando dicha matriz existe. Posteriormente, cuando se defina el determinante de una matriz, se verá otro procedimiento para calcular la matriz inversa, así como la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa.

Método directo

Dada la matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

el método consiste en determinar A^{-1} planteando un sistema de ecuaciones del siguiente modo:

Puesto que se busca otra matriz de igual orden tal que $AA^{-1} = I_n$ y $A^{-1}A = I_n$, entonces, si

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

se tiene que cumplir que:

$$AA^{-1} = I_n \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} & = & 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \ldots + a_{1n}x_{n2} & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1}x_{1n} + a_{n2}x_{2n} + \ldots + a_{nn}x_{nn} & = & 1 \end{array} \right.$$

Si el sistema tiene solución, la matriz tiene inversa y ésta se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones obteniendo los valores x_{ij} con $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Se puede comprobar que también se cumple que $A^{-1}A = I_n$. Si el sistema no tiene solución, la matriz no tiene inversa.

El sistema de ecuaciones anterior consta de n^2 ecuaciones y n^2 incógnitas, por lo que este método sólo se suele utilizar para matrices de orden 2, puesto que para matrices de orden superior se obtienen sistemas con un elevado número de ecuaciones e incognitas que resultan muy dificiles de resolver, por ejemplo, para calcular la matriz inversa de una matriz de orden 3 se obtiene un sistemas de 9 ecuaciones con 9 incógnitas.

Ejemplo: Para determinar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, se tiene que cumplir que $AA^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -3z & -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto, } \left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ y+2t & = & 0 \\ -3z & = & 0 \\ -3t & = & 1 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 0$ y $t = -\frac{1}{3}$, por lo que la matriz inversa es: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Se puede comprobar que también se cumple que $A^{-1}A = I_2$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, se procede del mismo modo, es decir, se tiene que cumplir que $AA^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto, } \left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ y+2t & = & 0 \\ 2x+4z & = & 0 \\ 2y+4t & = & 1 \end{array} \right.$$

y, por ejemplo, de la segunda ecuación se tiene que $y = -2t$, que si se sustituye en la cuarta ecuación se obtiene $-4t + 4t = 1$, es decir, $0 = 1$, por lo que el sistema no tiene solución. Por tanto A no es invertible, es singular.

Método de Gauss-Jordan

Conceptos previos

Transformaciones elementales sobre las filas o las columnas:

1. Intercambiar la fila (columna) i por la fila (columna) j.

2. Multiplicar la fila (columna) i por un número $k \neq 0$.

3. Sumar a la fila (columna) i la fila (columna) j multiplicada por un número k.

Estas tres transformaciones se pueden describir también mediante el producto de matrices de la forma siguiente:

1. Intercambiar las filas i y j en una matriz de orden $m \times n$ es equivalente a multiplicar a la izquierda dicha matriz por la matriz identidad I_m, en la que previamente se han intercambiado las filas i y j.

   Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, si queremos intercambiar la primera y la tercera fila, tendremos que multiplicar a la izquierda a A por la siguiente matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   así, $FA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Multiplicar la fila i de una matriz de orden $m \times n$ por un número k es equivalente a multiplicar a la izquierda dicha matriz por la matriz identidad I_m, en la que se ha sustituido el 1 correspondiente al elemento a_{ii} por k.

   Ejemplo: Dada la matriz del ejemplo anterior $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, si queremos multiplicar la segunda fila por 3, tendremos que multiplicar a la izquierda a A por la siguiente matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así, $FA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número k en una matriz de orden $m \times n$, es equivalente a multiplicar a la izquierda a dicha matriz por la matriz identidad I_m en la que se ha sustituido el elemento correspondiente a la fila i y columna j por k.

   Ejemplo: Consideramos nuevamente la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, si queremos sumar a la segunda fila la tercera multiplicada por 4, tendremos que multiplicar a la izquierda a A por la siguiente matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   así, $FA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Estas matrices, que se suelen denotar por F, representan las transformaciones aplicadas a las filas.

De forma análoga, se pueden describir las transformaciones sobre las columnas mediante el producto por la derecha de determinadas matrices. Estas matrices se suelen denotar por C y representan las transformaciones aplicadas a las columnas.

Definición. Dos matrices A y B de orden $m \times n$ se dicen **equivalentes por filas o equivalentes por la izquierda** cuando se puede obtener una de ellas a partir de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales sobre las filas:

$$A \text{ y } B \text{ son equivalentes por filas} \iff B = F_p \cdot F_{p-1} \cdot \ldots \cdot F_1 \cdot A$$

donde F_i con $i = 1, \ldots, p$ son las matrices que representan las transformaciones aplicadas a las filas.

Ejemplo: Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ son equivalentes por filas.

En efecto, la matriz B se obtiene aplicando las siguientes transformaciones elementales a las filas de la matriz A:

1. Sumar a la segunda fila de A la primera multiplicada por 3.
2. Multiplicar por 2 la primera fila de A.

Por tanto, $B = F_2 {\cdot} F_1 {\cdot} A$ y las matrices A y B son equivalentes, siendo $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $F_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ las matrices que representan, respectivamente, las transformaciones 1 y 2 aplicadas a las filas de A.

Teorema. Si A es una matriz cuadrada regular entonces es equivalente por filas a la matriz identidad.

Corolario. Dos matrices A y B de orden $m \times n$ son equivalentes por filas si y sólo si existe una matriz cuadrada regular P de orden m tal que $B = PA$.

De forma análoga, se define la equivalencia de dos matrices por columnas o por la derecha y se tienen un teorema y un corolario similares a los expuestos anteriormente.

Aplicación: Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

Sea A una matriz cuadrada regular de orde n entonces, aplicando el teorema anterior, A y la matriz identidad de orden n, I_n, son equivalentes por filas, por tanto, aplicando el corolario anterior, existe una matriz cuadrada regular P de orden n tal que $I_n = PA$ y, multiplicando a la derecha a ambos miembros de la igualdad por A^{-1}, se tiene que $I_n A^{-1} = PAA^{-1}$, es decir $A^{-1} = P$.

Por tanto, A^{-1} es la matriz de las transformaciones aplicadas a las filas de A que permite obtener la matriz equivalente por filas I_n. De igual forma se obtendría por columnas.

Utilizando estos resultados se puede hallar la inversa de una matriz cuadrada regular de la siguiente forma:

Se dispone, en una misma matriz, la matriz A y a continuación la matriz identidad del mismo orden que A. En esta nueva matriz realizamos, como se verá más adelante, las transformaciones necesarias sobre las filas hasta conseguir transformar la matriz A en la identidad. El resultado es una matriz con la identidad y a su derecha la matriz inversa de A:

$(A|I) \Longrightarrow$ transformaciones fila $\Longrightarrow (PA|PI) = (I|P)$ y puesto que $P = A^{-1}$, se tiene que: $(A|I) \Longrightarrow$ transformaciones fila $\Longrightarrow (I|A^{-1})$

De forma similar se podría obtener la inversa de una matriz cuadrada regular utilizando transformaciones sobre las columnas.

A continuación se describen las transformaciones sobre las filas para pasar de la matriz A a la identidad:

1. En la matriz formada por A y la matriz identidad correspondiente, se hacen todos los elementos de la diagonal principal de A igual a uno y cero todos los elementos por debajo de ésta, usando las siguientes transformaciones elementales sobre las filas:

   1.1. Se pretende que $a_{11} = 1$.

   - Si no es así y existe $a_{i1} = 1$ para algún $i = 2, \ldots, n$, se cambia la fila 1 por la fila i.

- Si $a_{i1} \neq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se cambia la fila 1 por cualquier fila cuyo primer elemento, a_{i1}, sea distinto de cero. Posteriormente, se dividen todos los elementos de la primera fila por a_{i1}.

Una vez se ha obtenido $a_{11} = 1$ no se volverá a modificar la primera fila en este primer paso.

1.2. Se pretende que $a_{i1} = 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$, es decir, se pretende hacer cero todos los elementos por debajo de a_{11}. Para ello, a cada fila, cuyo primer elemento a_{i1} sea distinto de cero, se le resta la primera fila multiplicada por dicho elemento a_{i1}.

Para hacer $a_{22} = 1, \ldots, a_{nn} = 1$ y ceros por debajo de dichos elementos, se procede como en los pasos 1.1 y 1.2 para cada a_{ii} con $i = 2, \ldots, n$, teniendo en cuenta que cada vez que se consigue un $a_{ii} = 1$ no se volverá a modificar la fila i en este primer paso.

2. Se hacen ceros por encima de la diagonal principal de A. El proceso es similar al utilizado en el paso 1.2:

   Primero se hacen cero los elementos por encima de a_{nn}, restando a cada fila por encima de este elemento y con $a_{in} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, la última fila multiplicada por dicho elemento a_{in}. Después se hacen cero los elementos por encima de a_{n-1n-1}, restando a cada fila por encima de este elemento y con $a_{in-1} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n-2)$, la penúmtima fila multiplicada por dicho elemento a_{in-1}, y así sucesivamente hasta obtener $a_{12} = 0$.

Al final se obtiene una matriz con la identidad en la parte izquierda y la matriz inversa en la parte derecha.

Si en algún momento, al realizar el método de Gauss-Jordan, aparece alguna fila con todos sus elementos cero en la parte correspondiente a la matriz A, entonces la matriz A no tiene inversa puesto que no puede reducirse a la matriz identidad.

Cuanto mayor sea el orden de la matriz, mejor es este método frente al método directo.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, a continuación se obtiene la matriz inversa de A aplicando el método de Gauss-Jordan.

Consideramos la matriz formada por A y la identidad de orden 3:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-(-2)f_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-3f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{f_3}{-2}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-f_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1-(-1)f_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1})$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

También se puede expresar, sacando factor común, de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Seguidamente se aplica también el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Consideramos la matriz formada por A y la identidad de orden 3:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-(-2)f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-3f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Como en la parte correspondiente a la matriz A aparece una fila de ceros, la matriz A no tiene inversa.

5. Rango de una matriz

Dependencia lineal de filas (o columnas). Definición.

Una fila f_i (o columna c_j), de una matriz de orden $m \times n$, depende linealmente de las otras filas $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots f_m$ (o columnas $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n$), si es combinación lineal de ellas, es decir, si existen números reales $k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_m$

tales que:

$$f_i = k_1 f_1 + \ldots + k_{i-1} f_{i-1} + k_{i+1} f_{i+1} + \ldots + k_m f_m$$

(o para las columnas: si existen números reales $k'_1, \ldots, k'_{j-1}, k'_{j+1}, \ldots, k'_n$ tales que: $c_j = k'_1 c_1 + \ldots + k'_{j-1} c_{j-1} + k'_{j+1} c_{j+1} + \ldots + k'_n c_n$).

Si ninguna fila (o columna) depende linealmente de las otras se dice que las filas (o columnas) son **linealmente independientes**.

Nota: En toda matriz el numero de filas linealmente independientes es igual al numero de columnas linealmente independientes.

Rango de una matriz. Definición.

El rango de una matriz es el número máximo de filas (o columnas) que son linealmente independientes.

Puesto que en una matriz el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes, tiene sentido hablar simplemente del rango de una matriz, y para su estudio es indiferente usar las filas o las columnas.

El rango de una matriz A se denota por rango(A) o rg(A).

Propiedades:

1. Sea A una matriz no nula de orden $m \times n$, se cumple que

$$1 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$$

2. rg(A^t) =rg(A).

3. Dada una matriz A y un número real cualquiera k, se cumple que: rg(kA) =rg(A).

4. Dadas dos matrices A y B de órdenes $m\times n$ y $n\times p$, respectivamente, se tiene que $\mathrm{rg}(AB)\leq \min\{\mathrm{rg}(A),\mathrm{rg}(B)\}$.

5. Sea A una matriz de orden $m\times n$ y sean B y C dos matrices cuadradas invertibles de órdenes n y m, respectivamente, entonces

$$\mathrm{rg}(AB)=\mathrm{rg}(A)$$

$$\mathrm{rg}(CA)=\mathrm{rg}(A)$$

6. Una matriz cuadrada A de orden n es invertible si y sólo si $\mathrm{rg}(A)=n$.

7. El rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas.

8. Dos matrices equivalentes por filas (o columnas) tienen el mismo rango.

Teniendo en cuenta las propiedades 7 y 8, para calcular el rango de una matriz A podemos, utilizando el método de Gauss, obtener una matriz escalonada equivalente por filas a ella, así, el rango de la matriz A será igual al rango de la matriz escalonada, es decir, el número de filas no nulas de ésta.

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{pmatrix}$, a continuación se obtiene el rango de A aplicando el método de Gauss.

Puesto que el objetivo es obtener una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz A, aplicaremos las trasformaciones elementales sobre las filas 1.1 y 1.2 expuestas en las páginas 17 y 18.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-2f_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\3&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-3f_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Esta última matriz es escalonada y equivalente por filas a la matriz A, puesto que se ha obtenido aplicando transformaciones elementales sobre las filas de A, por tanto, el $\mathrm{rg}(A)$ = rango de la matriz escalonada = 2 (número de filas no nulas de la matriz escalonada).

6. Ejercicios

1. Hallar los siguientes productos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{pmatrix}$

b) Dadas las matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular AB y BA.

c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar A^3.

2. Obtener la inversa, si existe, por el método de Gauss-Jordan de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix}$

3. Hallar el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

4. Calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$ según los valores de k. ¿Para qué valores de k tiene inversa la matriz A?

7. Determinantes

Conceptos previos

Permutaciones. Definición. Se llaman permutaciones de n elementos a todas las diferentes ordenaciones que se pueden realizar con dichos elementos.

De las $n!$ permutaciones, hay una sola permutación en la que los elementos figuran en un orden previamente acordado (habitualmente el orden natural); a esta permutación se le llama **permutación principal**.

Índice de una permutación. Definición. El índice de una permutación es el mínimo número de modificaciones que se deben realizar a sus elementos para obtener la permutación principal. Se denota por $i(\sigma)$, donde σ es la permutación.

Determinante de una matriz cuadrada. Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n, se define el determinante de A, y se denota por $|A|$ o $\det(A)$, de la forma siguiente:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{i(\sigma_k)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

donde $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es una de las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ e $i(\sigma_k)$ el índice de esa permutación.

Es decir, el determinante de A es la suma de los $n!$ productos de n elementos

a_{ij} que se obtienen fijando los subíndices relativos a las filas en el orden natural y permutando los subíndices correspondientes a las columnas. De este modo, en cada producto figura un elemento y sólo uno de cada fila y de cada columna. Además, cada producto irá precedido del signo + o − según que el índice de la permutación de los subíndices correspondientes a las columnas sea par o impar respecto al orden natural.

Entre otras aplicaciones, los determinantes resultan de gran utilidad en el cálculo del rango o de la matriz inversa, también a la hora de resolver determinados sistemas de ecuaciones lineales o analizar la dependencia lineal de un conjunto de vectores.

Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.
2. Si A tiene matriz inversa, se verifica que: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.
3. Si una matriz tiene una fila (columna) de ceros, su determinante es cero.
4. Si una matriz tiene dos filas (columnas) iguales o proporcionales, su determinante es cero.
5. Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas), su determinante cambia de signo.
6. Si los elementos de la i-ésima fila (columna) de una matriz se pueden descomponer como suma de k filas (columnas), su determinante es igual a la suma de los determinantes de las k matrices que tienen la i-ésima fila (columna) igual a cada una de las filas sumandos y las demás filas (columnas) iguales a las de la primera matriz.
7. Si todos los elementos de una fila (columna) de una matriz se multiplican por un mismo número, el determinante de la nueva matriz es el determinante de

la matriz original multiplicado por dicho número.

8. Si a una fila (columna) de una matriz se le suma otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

9. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

10. Si en una matriz los elementos de una fila (columna) son combinación lineal de las restantes filas (columnas) entonces su determinante es cero.

Cálculo del determinante

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Para calcular el determinante a partir de la definición hay que tener en cuenta que:

- El número de productos es $n! = 2$.
- Las permutaciones correspondientes a los subíndices de las columnas son $(1, 2)$ y $(2, 1)$ que dan lugar a los productos $a_{11}a_{22}$ y $a_{12}a_{21}$, fijados previamente los subíndices de las filas en el orden natural.
- El índice de las permutaciones $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son cero y uno, respectivamente.

Entonces, aplicando la definición de determinante, se tiene que:

$$|A| = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

es decir, el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) = -1$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3:

Consideramos la siguiente matriz cuadrada de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

En este caso el número de productos es $n! = 3! = 6$. A continuación se muestran las permutaciones correspondientes a los subíndices de las columnas, el índice de cada permutación y los productos a los que dan lugar dichas permutaciones (fijados los índices de las filas en el orden natural).

Permutaciones	Índice de la permutación	Productos
(1, 2, 3)	0	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1, 3, 2)	1	$a_{11}a_{23}a_{32}$
(2, 1, 3)	1	$a_{12}a_{21}a_{33}$
(3, 1, 2)	2	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(2, 3, 1)	2	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3, 2, 1)	1	$a_{13}a_{22}a_{31}$

Así, aplicando la definición de determinante, se tiene que:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} \\ &+ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

Un método fácil de recordar para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden 3 es la **la regla de Sarrus** que consiste en lo siguiente:

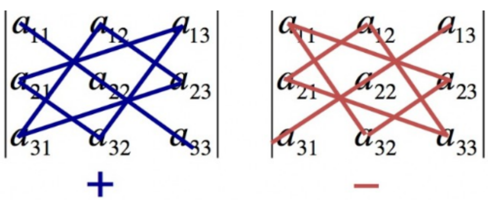
Se consideran sumandos positivos a los obtenidos al multiplicar:

- Los elementos de la diagonal principal: $a_{11}a_{22}a_{33}$.
- Los elementos de la linea paralela superior a la diagonal principal por el elemento aislado de la esquina inferior izquierda: $a_{12}a_{23}a_{31}$.
- Los elementos de la linea paralela inferior a la diagonal principal por el elemento aislado de la esquina superior derecha: $a_{21}a_{32}a_{13}$.

Se consideran sumandos negativos a los obtenidos al multiplicar:

- Los elementos de la diagonal secundaria: $a_{13}a_{22}a_{31}$.
- Los elementos de la linea paralela superior a la diagonal secundaria por el elemento aislado de la esquina inferior derecha: $a_{12}a_{21}a_{33}$.
- Los elementos de la linea paralela inferior a la diagonal secundaria por el elemento aislado de la esquina superior izquierda: $a_{23}a_{32}a_{11}$.

Gráficamente:



Entonces,

$$\begin{aligned} |A| &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}) \\ &= \text{Sumandos positivos} - \text{Sumandos negativos.} \end{aligned}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2\cdot 0\cdot 0+3\cdot 1\cdot 2+1\cdot 1\cdot 5)-(5\cdot 0\cdot 2+1\cdot 1\cdot 2+3\cdot 1\cdot 0) = 9$

Cálculo del determinante por adjuntos.

Calcular el valor del determinante de una matriz cuadrada de orden $n > 3$ aplicando la definición puede ser muy complicado, por ejemplo, para calcular el determinante de una matriz de orden 4 se tienen $4! = 24$ productos y es fácil equivocarse a la hora de realizar las 24 permutaciones, y puesto que el número de permutaciones aumenta considerablemente al aumentar n, se hace necesario considerar un método alternativo a la definición para calcular el determinante.

A continuación se muestra un método general para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden n.

Menor complementario. Definición

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se define el menor complementario de un elemento de A, a_{ij}, como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir en A la fila i y la columna j. Se representa por M_{ij}.

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior, los menores complementarios de cada uno de los elementos de la primera fila son:

Menor complementario de $a_{11} = 2$: $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$

Menor complementario de $a_{12} = 3$: $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

Menor complementario de $a_{13} = 5$: $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

Adjunto. Definición

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se define el adjunto de un elemento a_{ij} de A como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} Mij$$

es decir, es el menor complementario correspondiente precedido del signo + o − dependiendo de la fila y la columna en la que se encuentre dicho elemento.

Ejemplo: En la matriz anterior, los adjuntos de los elementos de la primera fila son:

Adjunto de $a_{11} = 2$: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot (-1) = -1$

Adjunto de $a_{12} = 3$: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \cdot (-2) = 2$

Adjunto de $a_{13} = 5$: $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \cdot 1 = 1$

En general se puede saber si el signo del menor complementario y del adjunto coinciden o no utilizando una regla gráfica, por ejemplo, para matrices de órdenes 3 y 4 se tiene:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

donde el + indica que el adjunto coincide con el menor complementario y el − que tienen signo contrario.

A partir de estos conceptos se puede obtener el **determinante de una matriz cuadrada de orden** n como la suma de los productos de los elementos de una fila (columna) cualquiera de la matriz por sus adjuntos correpondientes.

El valor del determinante no depende de la fila o columna elegida.

Ejemplo: En la matriz del ejemplo anterior, si se elige la primera fila, se tiene que: $|A| = 2(-1) + 3(2) + 5(1) = 9$.

Se se hubiese elegido otra fila o columna, por ejemplo la columna 3, se tiene que:

$$|A| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5(1-0) + 1(-(2-6)) + 0(0-3) = 9.$$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Desarrollando por la primera columna, se tiene que:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \right) + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+2 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2 \cdot (-120) + 1 \cdot (-120) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 120 = -120.$$

Cuando el orden de la matriz n es muy elevado este método puede resultar también muy laborioso, puesto que habría que calcular n determinantes.

Alternativamente, utilizando la propiedad 8 de los determinantes, se puede hacer que una fila o columna tenga todos los elementos menos uno cero. De este modo, al calcular el determinante por los adjuntos de esa fila o columna sólo interviene el adjunto correspondiente al elemento no nulo, debido a que el resto quedarían multiplicados por cero.

Ejemplo: Calculamos el determinante de la matriz A del ejemplo anterior. Haremos ceros todos los elementos de la primera columna excepto el elemento a_{21}, ya que al valer uno facilita los cálculos.

Aplicando la propiedad 8 de los determinantes, se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - 2F_2 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 11 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

y podemos calcular este último determinante por los adjuntos de la primera columna, por tanto,

$$|A| = 1\left(- \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 3 & 7 & 13 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-1)((-1 \cdot 7 \cdot 5 + 11 \cdot 13 \cdot 0 + 3 \cdot 8 \cdot 9) - (9 \cdot 7 \cdot 0 +$$
$13 \cdot 8 \cdot -1 + 11 \cdot 3 \cdot 5)) = -(181 - 61) = -120.$

Determinantes especiales

Determinante de una matriz triangular:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Determinante de una matriz diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Determinante de Vandermonde:

Se llama matriz de Vandermonde a toda matriz de la forma siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

y se cumple que $|A| = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})\ldots(x_2 - x_1)$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}, \text{ entonces } |A| = (z-x)(z-y)(y-x)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \text{ entonces } |A| = (3-1)(3-2)(2-1) = 2$$

Aplicación de los determinantes al cálculo de la matriz inversa

Existe una gran relación entre la inversa de una matriz cuadrada y su determinante. Concretamente, se verifica que:

- Una matriz cuadrada A tiene inversa $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.
- Si la matriz cuadrada A tiene inversa, ésta se puede calcular de la forma siguiente:
  $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t$$
  es decir, la matriz inversa de una matriz cuadrada A se puede obtener como el producto de $\frac{1}{|A|}$ por la traspuesta de la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de A por su adjunto.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. A continuación de obtiene la matriz inversa de A mediante este procedimiento.

En primer lugar, se obtiene el determinante de esta matriz para ver si A tiene inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1+0)-(-3+2+0) = 2 \neq 0,$$ por tanto A tiene inversa.

A continuación, se obtiene la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de A:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Posteriormente, se obtiene la matriz trapuesta de (A_{ij}):

$$(A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Finalmente, sustituyendo en la expresión $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t$, se obtiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Aplicación de los determinantes al cálculo del rango de una matriz

El rango de una matriz cualquiera también se puede obtener de una forma sencilla mediante los determinantes.

Menores de orden k. Definición. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Se llaman menores de orden k de la matriz A, a los determinantes de las submatrices cuadradas de orden k que se pueden obtener al suprimir $m-k$ filas y $n-k$ columnas de la matriz A.

Una **definición** alternativa del **rango de una matriz** es la siguiente:

El Rango de una matriz A es el orden del mayor menor no nulo de dicha matriz.

Es decir, una matriz tiene rango k cuando existe al menos un menor de orden k distinto de cero y todos los menores de orden $k+1$, si los hay, son nulos.

El procedimiento para obtener el rango de una matriz A de orden $m \times n$ es el siguiente:

1. Si algún elemento de la matriz es distinto de cero, entonces su rango es al menos 1. En caso contrario (matriz nula) el rango sería 0 y el proceso habría terminado.

2. Se elige, si existe, un menor de orden 2 distinto de cero, entonces el rango es al menos 2. Si no existiera ningún menor de orden 2 distinto de cero, el rango de la matriz sería 1 y el proceso habría terminado.

3. Al menor de orden 2 distinto de cero, obtenido en el paso anterior, se le añade otra fila y otra columna cualesquiera hasta encontrar, si existe, un menor de orden 3 distinto de cero. De esta forma, el rango de la matriz es al menos 3. Si todos los menores de orden 3 son nulos, el rango de la matriz sería 2 y el proceso habría terminado.

4. Al menor de orden 3 distinto de cero, obtenido en el paso anterior, se le añade otra fila y otra columna cualesquiera hasta encontrar, si existe, un menor de orden 4 distinto de cero. Entonces, el rango de la matriz es al menos 4. Si no existiera ningún menor de orden 4 distinto de cero, el rango de la matriz sería 3 y el proceso habría terminado.

Se repite este proceso hasta encontrar algún menor de orden k ($1 \leq k \leq$ mínimo$\{m, n\}$) distinto de cero y de forma que todos los menores de orden $k+1$ sean nulos. Entonces el rango de la matriz es k.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. A continuación se obtiene el rango de A mediante este procedimiento.

1. Puesto que todos los elementos de esta matriz son distintos de cero (por ejemplo, $a_{11} = 1 \neq 0$) su rango es al menos 1.

2. Se elige un menor de orden 2 añadiendo una fila y una columna cualesquiera al elemento distinto de cero del paso 1, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, entonces el rango es al menos 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$.

3. Se elige un menor de orden 3 añadiendo una fila y una columna cualesquiera al menor de orden 2 distinto de cero del paso 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$, éste es el el único menor de orden 3 que existe y, dado que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (21 + 24 + 30) - (27 + 20 + 28) = 75 - 75 = 0$, el proceso ha terminado y el $\text{rg}(A) = 2$ (el orden del mayor menor no nulo de dicha matriz).

8. Ejercicios

1. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$

2. Obtener los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

   a) Desarrollando por los adjuntos de una fila o columna.

   b) Haciendo todos los elementos menos uno de una fila o columna cero.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular el determinante de las matrices: $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

4. Hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Calcular el rango de las matrices siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ (según el valor de a) c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$