Matemática Discreta: relaciones

Grado en Ingeniería

Asignatura de Matemática Discreta

UDIMA

os

arias

es de equivalencia [Aritmética modular]

es de equivalencia

unto cociente

es de orden [Organización de tareas en un proyecto]

untos parcial y totalmente ordenados

ramas de Hasse

entos extremales

s binarias

dos objetos están relacionados si satisfacen un cierto criterio (y no lo sfacen dicha regla).

ıs dos personas podemos establecer la relación *“ser hijo/a de”*.

diar relaciones *binarias* entre los elementos de un conjunto V y los e tro W (que puede ser el mismo V).

binarias se usan para estudiar objetos:

ıcias en aritmética modular (Tema 5).

lenguajes y máquinas de estados finitos.
encontrar máquinas con el mínimo número de estados internos que ına cierta tarea.

ción de tareas en un proyecto complejo: tenemos muchas tareas que unas de otras. ¿Cómo realizarlas de manera secuencial?

ones son un tipo particular de relaciones binarias.

s binarias entre dos conjuntos

inaria $\mathcal{R}$ *del conjunto* V *al conjunto* W *es un subconjunto del producto carte-*
:

$$V \times W \;=\; \{(v,w) \mid (v \in V) \wedge (w \in W)\}\,.$$

$\times W$. *El* **dominio** *de* $\mathcal{R}$ *es:*

$$\textit{Dom}\,\mathcal{R} \;=\; \{v \in V \mid (v,w) \in \mathcal{R} \quad \textit{para algún } w \in W\}\,.$$

e $\mathcal{R}$ *es:*

$$\textit{Imag}\,\mathcal{R} \;=\; \{w \in W \mid (v,w) \in \mathcal{R} \quad \textit{para algún } v \in V\}\,.$$

$v, w) \in \mathcal{R}$, lo escribiremos $v\mathcal{R}w$.

$A = \{2,4,6\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la relación “*menor que*” ($<$)

e ntonces

$$\mathcal{R} \;=\; \text{“}<\text{”} \;=\; \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(4,5),(4,6)\}$$

y

$$\mathcal{R} = \text{“}<\text{”} \;\Rightarrow\; 2\mathcal{R}4 \;=\; 2 < 4.$$

s binarias en un conjunto

binaria $\mathcal{R}$ *sobre un conjunto* V *es un subconjunto del producto cartesiano* $\mathcal{R} \subseteq V \times V$. *El* **dominio** *de* $\mathcal{R}$ *es:*

$$\textit{Dom}\,\mathcal{R} \;=\; \{v \in V \mid (v,w) \in \mathcal{R} \quad \textit{para algún } w \in V\}$$

e $\mathcal{R}$ *es:*

$$\textit{Imag}\,\mathcal{R} \;=\; \{w \in V \mid (v,w) \in \mathcal{R} \quad \textit{para algún } v \in V\}\,.$$

$A = \{2,4,6\}$ y la relación *“menor que”* ($<$) sobre A. Entonces

$$\mathcal{R} \;=\; \text{“}<\text{”} \;=\; \{(2,4),(2,6),(4,6)\}\,.$$

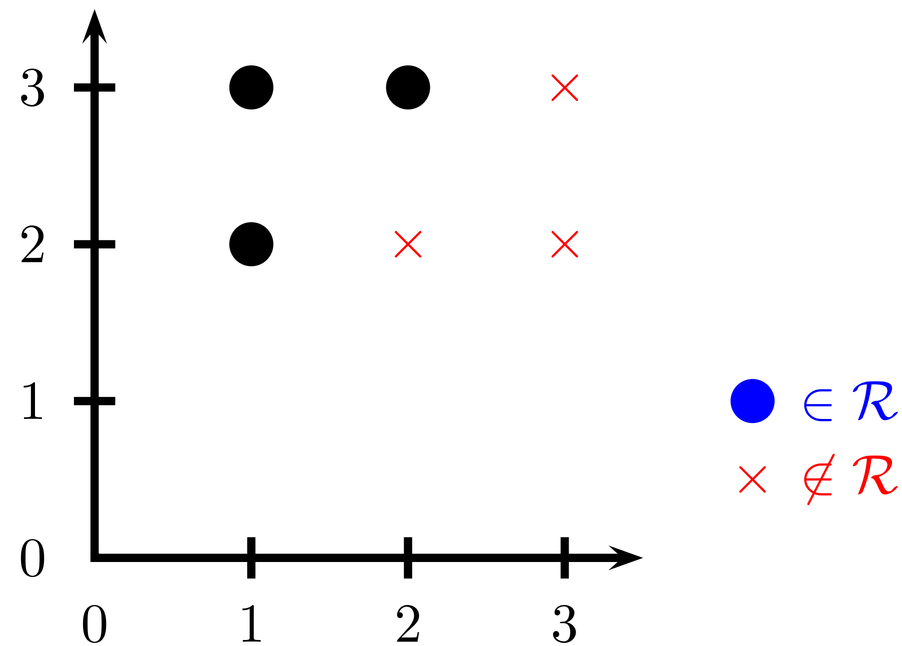
mportante: una función $f\colon A \to B$ es una relación entre los conjuntos A y ada elemento $x \in \mathrm{Dom}(f)$ le corresponde un <u>único</u> elemento de B (i.e.,

ación gráfica de una relación

ntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,3\}$ y la relación “*menor que*” ($<$).

$$\mathcal{R} \;=\; \{(1,2),(1,3),(2,3)\}\,.$$

n cartesiana:

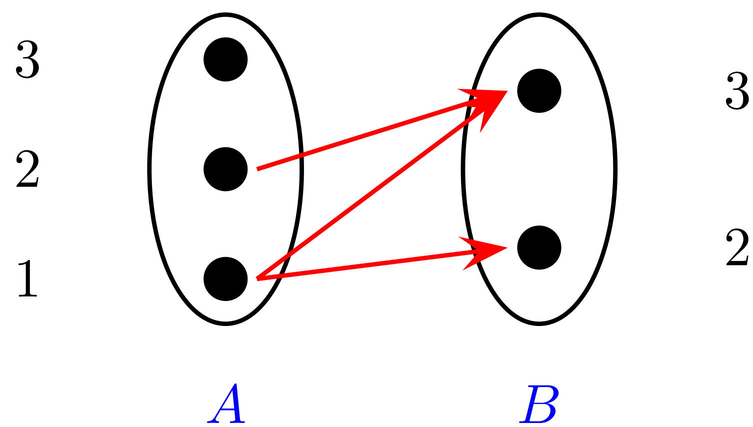


…ación gráfica de una relación

… $B = \{2, 3\}$ y $\mathcal{R} =$ "$<$". Entonces,

$$\mathcal{R} \;=\; \{(1,2),(1,3),(2,3)\}\,.$$

…n con diagramas de Venn:



…cencia de $\mathcal{R}$:

… $, v_2, \ldots, v_{|V|}\}$ y $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{|W|}\}$. La entrada (i,j) de $A_{\mathcal{R}}$ es 1 … 0 en caso contrario.

$$V = \{1,2,3\}\,,\quad W = \{2,3\}\,,\quad A_{<} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ación gráfica de una relación sobre V

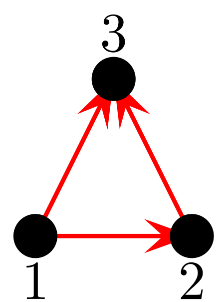
y $\mathcal{R} =$ "$<$". Entonces,

$$\mathcal{R} \;=\; \{(1,2),(1,3),(2,3)\}\,.$$

o $G_{\mathcal{R}}$ asociado a $\mathcal{R}$:

$G_{\mathcal{R}} = (V, E)$ son los elementos del conjunto V sobre el que está ción $\mathcal{R}$. El conjunto de aristas (dirigidas) está dado por

$$E \;=\; \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid v_i \mathcal{R} v_j\}\,.$$



$= \{$ciudades de España$\}$, $W = \{$comunidades autónomas$\}$ y definimos
nte la siguiente regla: $v\mathcal{R}w$ si la ciudad v está ubicada en la comunidad

, Lérida $\mathcal{R}$ Cataluña, La Coruña $\mathcal{R}$ Galicia, Fuenlabrada $\mathcal{R}$ Madrid, etc.

$\{1, 2, 3, 4\}$ y sea la relación $\mathcal{R}$ definida por $v\mathcal{R}w$ si v divide a w.
tar $\mathcal{R}$ mediante la matriz de adyacencia y el grafo orientado asociado.

$x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ y $x\mathcal{R}y$ si $x^2 + y^2 = 1$, representar $\mathcal{R}$.

el dominio, la imagen y la representación matricial de las siguientes
s:

$\{1, 2, 3, 4, 8\}$, $W = \{1, 4, 6, 9\}$ y $v\mathcal{R}w$ si v divide a w.

$W = \{1, 2, 3, 4\}$ y $v\mathcal{R}w$ si $v \leq w + 1$.

$W = \mathbb{R}$ y $v\mathcal{R}w$ si $w = |v|$.

$W = \{1, 2, 3, 4\}$ y $v\mathcal{R}w$ si $v \leq w$.

ón $\mathcal{R}$ sobre V, se define su **relación inversa** $\mathcal{R}^{-1}$ *como la relación en* V
$(v_1, v_2) \in \mathcal{R}^{-1} \;\Leftrightarrow\; (v_2, v_1) \in \mathcal{R}$ *ó bien como* $v_1 \mathcal{R}^{-1} v_2 \;\Leftrightarrow\; v_2 \mathcal{R} v_1$.

orientado $G_{\mathcal{R}^{-1}}$ asociado a la relación inversa $\mathcal{R}^{-1}$ se obtiene del grafo $G_{\mathcal{R}}$ asociado a $\mathcal{R}$ cambiando el sentido de todas las aristas.

de adyacencia $A_{\mathcal{R}^{-1}}$ asociada a la relación inversa $\mathcal{R}^{-1}$ es la ta de la matriz $A_{\mathcal{R}}$ asociada a $\mathcal{R}$:

$$A_{\mathcal{R}^{-1}} \;=\; A_{\mathcal{R}}^{T}\,.$$

ón $\mathcal{R}$ sobre V, se define su **relación complementaria** $\overline{\mathcal{R}}$ *como la relación en*
mo $(v_1, v_2) \in \overline{\mathcal{R}} \;\Leftrightarrow\; (v_1, v_2) \notin \mathcal{R}$.

de adyacencia $A_{\overline{\mathcal{R}}}$ asociada a la relación complementaria $\overline{\mathcal{R}}$ se obtiene riz $A_{\mathcal{R}}$ asociada a $\mathcal{R}$ intercambiando $1 \leftrightarrow 0$.

…nes con relaciones

… son subconjuntos del conjunto $V \times W$, luego podemos efectuar las …ciones que con un conjunto cualquiera

… $_1 = \{(1,2),(1,3),(2,2)\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(1,2),(1,3),(2,4)\}$, entonces:

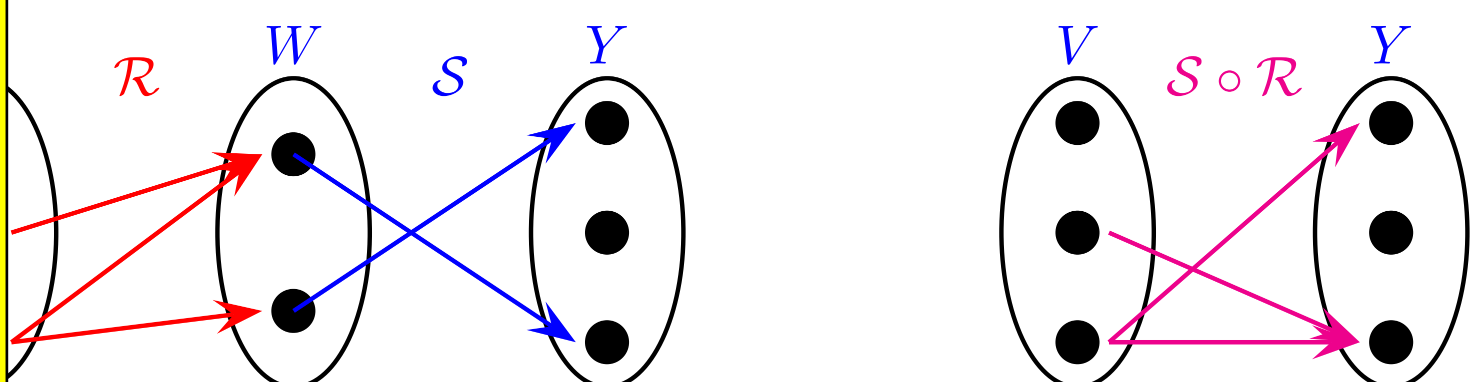
… $= \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,4)\}$

… $= \{(1,2),(1,3)\}$

… $= \{(2,2)\}$

… $= \{(2,2),(2,4)\}$

…ación de V en W y sea $\mathcal{S}$ una relación de W en Y. La **relación compuesta** *…n Y es un subconjunto del producto cartesiano $V \times Y$ tal que $v(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y$ con …Y si existe algún $w \in W$ tal que $v\mathcal{R}w$ y $w\mathcal{S}y$.*



ión de relaciones

Si $A_{\mathcal{R}}$ es la matriz de adyacencia de la relación $\mathcal{R}$ de V en W y $A_{\mathcal{S}}$ es
dyacencia de la relación $\mathcal{S}$ de W en Y, la matriz de adyacencia $A_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}}$ de la
uesta $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ viene dada por:

$$A_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} \;=\; A_{\mathcal{R}} \odot A_{\mathcal{S}}\,,$$

ucto $\odot$ es el **producto booleano** *de matrices.*

das de las matrices a multiplicar son variables binarias 0 y 1.

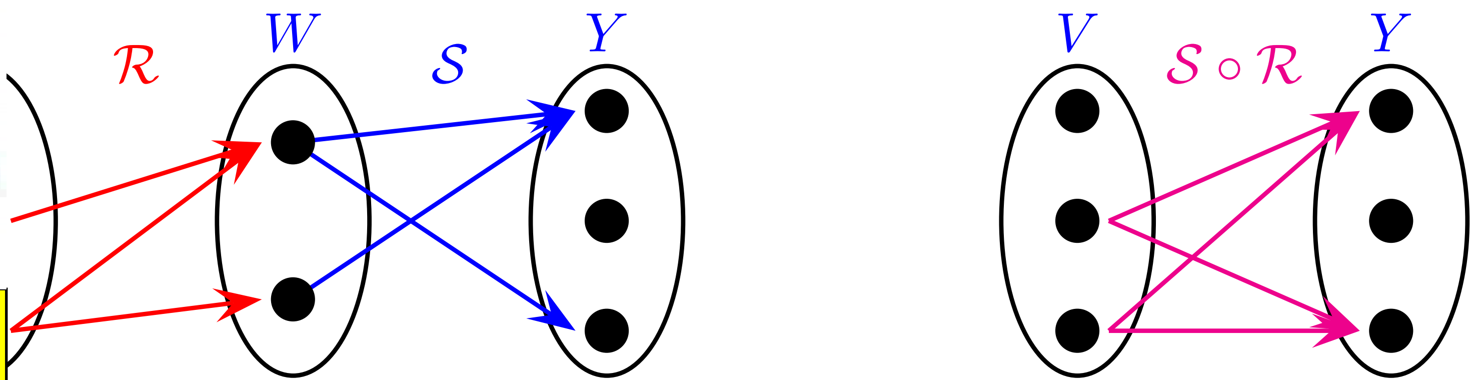
licar las matrices la suma y la multiplicación de dichas variables binarias
reglas de las operaciones booleanas.

booleana de dos variables binarias es siempre 1 a menos que ambas sean
gico $\vee$).

to booleano de dos variables binarias es siempre 0 a menos que ambas
ND lógico $\wedge$).

producto tiene las entradas binarias.

y si y sólo si $(A_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}})_{v,y} = 1$. Esta condición se cumple si y sólo si existe
$\in W$ tal que $(A_{\mathcal{R}})_{v,w} = 1$ y $(A_{\mathcal{S}})_{w,y} = 1$.



$$A_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}} \odot A_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les de las relaciones sobre V

$\mathcal{R}$ es **reflexiva** *si para todo* $v \in V$ *se cumple que* $v\mathcal{R}v$.

o $G_{\mathcal{R}}$ de una relación reflexiva debe tener un bucle en cada vértice.

de adyacencia $A_{\mathcal{R}}$ de una relación reflexiva debe tener todos sus s diagonales iguales a 1.

$\mathcal{R}$ es **anti-reflexiva** *si para todo* $v \in V$ *se cumple que* $v\overline{\mathcal{R}}v$.

o $G_{\mathcal{R}}$ de una relación anti-reflexiva no debe tener ningún bucle.

de adyacencia $A_{\mathcal{R}}$ de una relación anti-reflexiva debe tener todos sus s diagonales iguales a 0.

te: Una relación no reflexiva no tiene por qué ser anti-reflexiva.

les de las relaciones sobre V

$\mathcal{R}$ es **simétrica** si $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$, es decir, si $v\mathcal{R}w \;\Rightarrow\; w\mathcal{R}v$.

ción es simétrica si y sólo si su matriz de adyacencia $A_{\mathcal{R}}$ es simétrica

$\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ es **anti-simétrica** si $(v_1\mathcal{R}v_2) \wedge (v_2\mathcal{R}v_1) \;\Rightarrow\; v_1 = v_2$.

de adyacencia $A_{\mathcal{R}}$ de una relación anti-simétrica debe ser tal que si $= 1$ para algún $i \neq j$, entonces $(A_{\mathcal{R}})_{j,i} = 0$.

ondición alguna sobre los elementos diagonales.

...les de las relaciones sobre V

...$\mathcal{R}$ es **transitiva** si $(v_1 \mathcal{R} v_2) \wedge (v_2 \mathcal{R} v_3) \;\Rightarrow\; v_1 \mathcal{R} v_3$.

...2 *Una relación $\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R}$ para $n \in \mathbb{N}$. La* **potencia** ...**ón** *$\mathcal{R}^n$ se define recursivamente como sigue:*

$$\mathcal{R}^1 = \mathcal{R} \,, \qquad \mathcal{R}^n = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{n-1} \,.$$

... *Una relación $\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si para toda entrada no nula $(A_{\mathcal{R}^2})_{i,j} =$ ... de adyacencia de $\mathcal{R}^2$, la correspondiente entrada de la matriz de adyacencia ...én no nula $(A_{\mathcal{R}})_{i,j} = 1$.*

s de equivalencia

ℛ sobre el conjunto V es una **relación de equivalencia** *si es reflexiva, simétrica*

ℛ es una relación de equivalencia, $a\mathcal{R}b$ se suele denotar por

$$a \equiv b \pmod{\mathcal{R}}.$$

lación de equivalencia sobre V. El conjunto de todos los elementos relaciona-
rto $v \in V$ se denomina **clase de equivalencia de v** *y se denota por $[v]_{\mathcal{R}}$ ó*
or $[v]$. Luego

$$[v]_{\mathcal{R}} \;=\; \{w \in V \mid v\mathcal{R}w\}\ .$$

nento $w \in [v]_{\mathcal{R}}$ (en particular, v) se denomina **representante** *de la clase de*
$v]_{\mathcal{R}}$.

$\mathbb{Z}$ y tal que $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a+b$ es par. Demostrar que es una relación de
alcular sus clases de equivalencia.

cociente

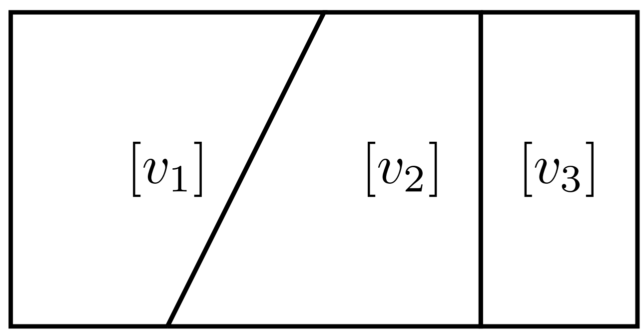
Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre V. Entonces dos clases de equiva-
bien son iguales o bien son disjuntas. Es decir:

$$] \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$

$$] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$$

es de equivalencia $[v]$ no son vacías. ¿Por qué?

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre V. Entonces dicha relación deter-
ción del conjunto V.



cociente

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre V. Entonces las clases de le $\mathcal{R}$ constituyen una partición de V. Recíprocamente, dada una partición de V, existe una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ tal que sus clases de equivalen- njuntos V_i.

ación de equivalencia sobre V. El conjunto de todas las clases de equivalencia mina **conjunto cociente de A por $\mathcal{R}$** y de denota por $V/\mathcal{R}$:

$$V/\mathcal{R} \; = \; \{[v]_{\mathcal{R}} \mid v \in V\} \; .$$

as siguientes relaciones son de equivalencia. Encontrar las correspondientes
alencia y el conjunto cociente $V/\mathcal{R}$:

$v\mathcal{R}w$ si $|v-w|$ es múltiplo de 2.

$v\mathcal{R}w$ si $v^2 - w^2 = v - w$. Describir la clase de equivalencia de 2005.

$(x,y)\mathcal{R}(u,w)$ si $xy = uw$.

$(x,y)\mathcal{R}(u,w)$ si $(x-y)(x+y) = (u-w)(u+w)$.

$(x,y)\mathcal{R}(u,w)$ si $x^2+y^2 = u^2+w^2$.

$\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de manera que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si y sólo si
Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y que existe una biyección
cociente $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\mathcal{R}$ y $\mathbb{N}$.

$(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ se define la relación $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si y sólo si $ad = bc$. Demostrar
elación de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto

definida en V es circular si verifica

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; c\mathcal{R}a\,.$$

una relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia si y sólo si es circular y reflexiva.

definida en V es débilmente transitiva si para todo $a, b, c, d \in V$ se verifica que

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \wedge (c\mathcal{R}d) \;\Rightarrow\; a\mathcal{R}d\,.$$

idad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

ión simétrica y débilmente transitiva es transitiva.

ión reflexiva, simétrica y débilmente transitiva es de equivalencia.

de orden parcial

sobre un conjunto V se denomina **orden parcial** *(o* **relación de orden***) si es*
imétrica y transitiva.

relaciones de orden se suelen denotar por el símbolo $\preceq$.

equipado con una relación de orden $\preceq$ se denomina **conjunto parcialmente**
$\preceq)$ (o poset).

lación $\leq$ es una relación de orden en el conjunto $\mathbb{N}$.

elación de orden parcial $\preceq$ nada garantiza que dos elementos cualquiera
les (al contrario de lo que ocurre con e.g. $\leq$ en $\mathbb{N}$).

de orden total

n conjunto parcialmente ordenado. Dos elementos $a, b \in V$ son **comparables** b ó bien $b \preceq a$. Si no se verifican ninguna de estas condiciones, dichos denominan **no comparables**.

arcialmente ordenado $(V, \preceq)$ está **totalmente ordenado** *cuando cualquier par* $a, b \in V$ *son comparables. Se dice entonces que* $(V, \preceq)$ *es un conjunto* **denado** *(o* **cadena***).*

lación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{N}$ definida como $a\mathcal{R}b$ si y sólo si a divide a b es una relación de s relaciones representadas por las siguientes matrices de adyacencia son den parcial o total. Para aquellos casos que representen relaciones de orden, asociado y discutir cómo se podría simplificar la representación.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

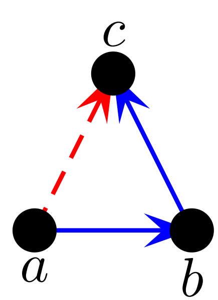
s de Hasse, 1926

ciado a una relación de orden $\preceq$ se puede simplificar eliminando las lerivadas de las propiedades de orden

a obtener el diagrama de Hasse del orden parcial $\preceq$:

es reflexiva, hay un bucle en cada vértice. Eliminar todos los bucles.

ividad de $\preceq$ se refleja en la posible existencia de subgrafos del tipo:



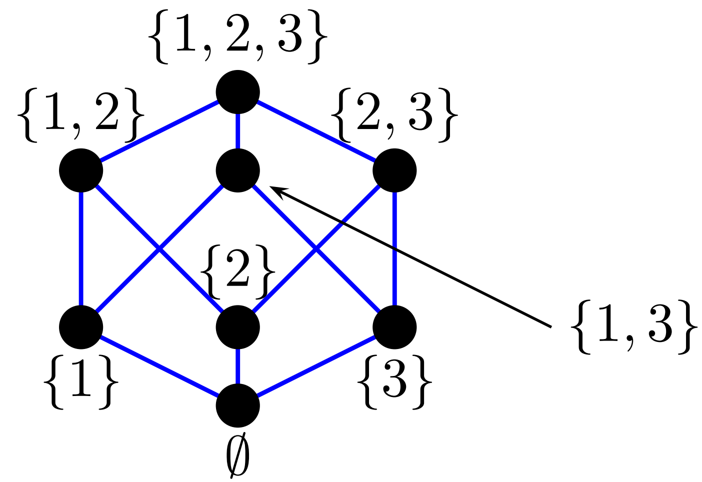
y $b \preceq c$, eliminar la arista superflua asociada a $a \preceq c$.

que todas las aristas apunten hacia arriba. Eliminar el sentido de las

ama de Hasse de la relación $\subseteq$ sobre el conjunto $\mathcal{P}(A)$ con $A = \{1, 2, 3\}$.

s extremales

e Hasse asociado a $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$ es



n conjunto parcialmente ordenado. $M \in V$ es un **elemento maximal** *si para $M \preceq v$ implica que $M = v$. Es decir, no hay ningún elemento por encima de s un* **elemento minimal** *si para todo $v \in V$, $v \preceq m$ implica que $m = v$. Es ingún elemento por debajo de m.*

práctico: los elementos maximales y minimales ocupan respectivamente os “valles” del diagrama.

anterior, $\emptyset$ es el elemento minimal y A, el maximal.

s extremales

*n conjunto parcialmente ordenado. $M^\star \in V$ es un **elemento máximo** si*
ra todo $v \in V$. Es decir, $M^\star$ está encima de todos los elementos de V.
*un **elemento mínimo** si $m^\star \preceq v$ para todo $v \in V$. Es decir, $m^\star$ está por*
os los elementos de V.

nentos extremales pueden no existir.

anterior, $\emptyset$ es el elemento mínimo ya que $\emptyset \subseteq X$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$ y
to máximo ya que para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \subseteq A$.

El elemento máximo $M^\star$ de un conjunto ordenado A, si existe, es único.
elemento máximo es maximal.

s extremales

n conjunto parcialmente ordenado y $B \subset V$. $u \in V$ es una **cota superior** *o*
B si $b \preceq u$ para todo $b \in B$. El conjunto de las cotas superiores de B se
(B).
supremo *de B si es la menor de las cotas superiores: $u^\star = min(mayor(B))$.*

cota inferior *o* **minorante** *de B si $d \preceq b$ para todo $b \in B$. El conjunto de las*
s de B se denota minor(B).
ínfimo *de B si es la mayor de las cotas inferiores: $d^\star = max(minor(B))$.*

nentos extremales pueden no existir.

$$\text{maximal}(V) = 1\,, \qquad \max(V) = 1$$

$$\text{minimal}(V) = \{7, 8\}\,, \qquad \text{no existe } \min(V)$$

3

Sea $B = \{4, 5, 6\}$

$$\text{mayor}(B) = \{1, 2, 3\}\,, \qquad \text{no existe } \sup(B)$$

$$\text{minor}(B) = \{6, 7, 8\}\,, \qquad \inf(B) = 6$$

al compatible con un orden parcial

ue un proyecto consta de distintas tareas y que algunas de ellas sólo
etarse una vez que otras tareas han concluido. ¿Cómo se puede
jecución secuencial de dichas tareas?
e desarrolló y usó por la marina de EE.UU. en la construcción del
aris en los años 50].

s un orden parcial $\preceq_P$ (dependencia de las tareas) de tal modo que:

$$v_i \preceq_P v_j \;\Leftrightarrow\; v_j \text{ necesita que } v_i \text{ haya acabado}\,.$$

mos un orden total $\preceq_T$ compatible con $\preceq_P$.

$\preceq_T$ *es* **compatible** *con el orden parcial* $\preceq_P$ *si para todo* $v, w \in V$, $v \preceq_P w$
$\preceq_T w$.

al compatible con un orden parcial

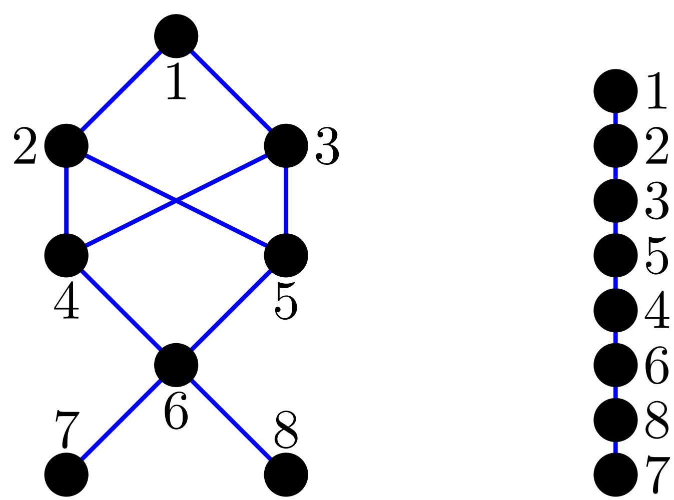
rdenación topológica)

Order($(V, \preceq_P)$: conjunto finito parcialmente ordenado)

ento minimal de $(V, \preceq_P)$

$_k\}$

$\ldots \preceq_T v_n$ es un orden total compatible con $\preceq_P$



bien ordenado

conjunto bien ordenado *si $\preceq$ es un orden total y cualquier subconjunto no*
ne siempre un mínimo.

un conjunto bien ordenado.

$(\mathbb{Q}_+, \leq)$ no son conjuntos bien ordenados.

ıntos bien ordenados satisfacen el Principio de inducción.

31 (Principio de inducción para conjuntos bien ordenados) *Sea $(V, \preceq)$*
en ordenado. Entonces, la propiedad P se cumple para todos los elementos
si se satisfacen las condiciones:

se: $P(v_0)$ es verdadera para el mínimo de V.

inducción: si $P(w)$ es verdadera para todo $w \prec v$, entonces $P(v)$ es ver-

Tipos de relaciones

Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva	
SI	SI	NO	SI	
SI	NO	SI	SI	
SI	NO	SI	SI	Todo par es comparable
SI	NO	SI	SI	Todo subconjunto no vacío tiene mínimo