COMBINACIONES CON REPETICIÓN

- Tenemos k objetos idénticos para distribuir en n cajas distintas

¿de cuántas formas distintas se pueden introducir los k objetos en las n cajas, teniendo en cuenta que cada caja puede contener los k objetos?

Elegimos k de las n cajas para colocar en ellas los objetos, pudiendo elegir la misma caja más de una vez.

- La alineación de las n cajas da lugar a $n - 1$ tabiques de separación entre las cajas.

000		00	0000	000	0		0	

Hay que elegir la posición de k objetos (ceros) ó de $(n - 1)$ tabiques (unos) de entre un total de $(n - 1) + k$ elementos.

$$CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

(Jacob Bernouilli, 1700)

- Combinación con repetición es una Selección no ordenada de k elementos escogidos entre n tipos diferentes de elementos, donde el mismo elemento se puede elegir hasta k veces.

  El número de selecciones no ordenadas es

$$\boxed{CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}}$$

Ejemplo

En una pastelería hay 12 clases de pasteles.

Un cliente desea comprar 24 pasteles, ¿de cuántas formas puede hacer su elección?

000		00	0000	000	0		0	

Hay que elegir $k = 24$ pasteles de un conjunto con

$n = 12$ clases distintas de pasteles.

La alineación de las $n = 12$ cajas da lugar a $n - 1 = 11$ tabiques de separación entre las cajas.

Hay que elegir la posición de $k = 24$ pasteles

ó la posición de $n - 1 = 11$ tabiques

de entre un total de $(n-1) + k = 35$ elementos.

$$CR_{n=12,k=24} = \binom{35}{24} = \binom{35}{11}$$

Ejemplo

¿Cuántos resultados distintos saldrán al lanzar tres dados iguales a la vez?

Solución

Hay que elegir tres resultados ($k = 3$) del conjunto

A = { 1, 2, ... , 6 } con $n = 6$ cajas.

Si x_i = nº de veces que sale i en los dados, entonces

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 3 \\ 0 \leq x_i \leq 3 \end{cases} \qquad CR_{n=6,\, k=3} = \binom{8}{3} = 56$$

- Si tenemos k objetos idénticos para distribuir en n cajas distintas, teniendo en cuenta que cada caja puede contener k objetos, se puede considerar que elegimos x_i objetos de tipo i para alguna n–upla

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ con } x_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} x_i = k$$

- Combinación con repetición de k objetos elegidos entre n es una solución entera no negativa de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = k \\ 0 \leq x_i \leq k \end{cases} \qquad CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

Ejemplos

1) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 0 \le x_i \end{cases} \quad \text{es} \quad CR_{n=5,k=30} = \binom{34}{30}$$

2) ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 8 piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas, naranjas y peras si el orden en que se seleccionan las piezas no se tiene en cuenta?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 0 \le x_i \le 8 \end{cases} \quad \text{tiene} \quad CR_{n=3,k=8} = \binom{10}{8} = 45 \quad \text{soluciones}$$

- Una solución entera positiva de la ecuación $x_1 + \ldots + x_n = k$ es una combinación con repetición de k objetos elegidos entre n tipos de objetos de modo que se elige, al menos, un objeto de cada tipo

  1º $\rightarrow$ se elige un objeto de cada tipo n, de una única manera.

  2º $\rightarrow$ se eligen $k - n$ objetos de los n tipos, de

$$\boxed{CR_{n,k-n} = \binom{n-1+k-n}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}}$$

maneras distintas.

Ejemplos

1) El número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \quad \text{es} \quad CR_{n=5,k=30-5} = \binom{29}{25}$$

2) ¿De cuántas formas se pueden repartir 15 caramelos idénticos entre 4 niños, si cada niño recibe al menos un caramelo?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \qquad CR_{n=4,k=15-4} = \binom{14}{11}$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

- Tenemos n objetos de m tipos distintos,

con k_i objetos idénticos de cada tipo i, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$k_1 + \cdots + k_m = n$$

para distribuir en n cajas distintas,

¿de cuántas formas distintas se pueden introducir los n objetos en las n cajas, teniendo en cuenta que cada caja contiene un único objeto?

- Permutación con repetición es una selección ordenada de n objetos de m tipos distintos, con k_i objetos idénticos de tipo i, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$ y con $k_1 + \cdots + k_m = n$

El nº de selecciones ordenadas distintas es

$$PR_n^{k_1 \cdots k_m} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}{k_m}$$

$$\boxed{PR_n^{k_1 \cdots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} \equiv \binom{n}{k_1 \cdots k_m}}$$

llamamos a esta expresión número multinómico.

Ejemplos

1) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con todas las letras de ABRACADABRA?

2) ¿Cuántas sucesiones de longitud 15 con las letras $\{ a, b, c, d, e \}$ se pueden formar, de modo que haya 7 a, 3 b, 2 c, 2 d y 1 e?

3) Un niño reparte 45 cromos entre 3 amigos, regalando 10 cromos a cada amigo, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

4) ¿De cuántas formas se pueden distribuir a cuatro jugadores manos de 5 cartas utilizando una baraja de 52 cartas?

Soluciones

1) $$PR_{11}^{5,2,2,1,1} = \binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{11!}{5!\,2!\,2!\,1!\,1!}$$

2) $$PR_{15}^{7,3,2,2,1} = \binom{15}{7}\binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{15!}{7!\,3!\,2!\,2!\,1!}$$

3) $$PR_{45}^{10,10,10,15} = \binom{45}{10}\binom{35}{10}\binom{25}{10} = \frac{45!}{10!\,10!\,10!\,15!}$$

4) $$PR_{52}^{5,5,5,5,32} = \binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5} = \frac{52!}{5!\,5!\,5!\,5!\,32!}$$

PRINCIPIO DE LA CRIBA (ó de inclusión-exclusión)

- Si A y B son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Ejemplos

1) Hallar las permutaciones de $\{1, 2, ..., 9\}$ que empiezan por 1 ó que terminan en 9.

2) En una encuesta realizada a un conjunto de 100 personas se obtienen los siguientes resultados:

- 25 personas van al cine y al teatro
- 20 personas no van al cine ni al teatro y
- van al cine el doble de personas que al teatro.

Averiguar el número de personas que van sólo al cine y el número de personas que van sólo al teatro.

Soluciones

1) $U = \{$ permutaciones de $\{1, 2, ..., 9\}$ $\}$

$A = \{$ permutaciones de U que empiezan por 1 $\}$

$B = \{$ permutaciones de U que terminan por 9 $\}$

$$\text{card } A = 8\,! \qquad \text{card } B = 8\,!$$

$A \cap B = \{$ permutaciones empiezan por 1 y terminan por 9 $\}$

$$\text{card } (A \cap B) = 7\,!$$

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B) = 15.7\,!$$

2) Sean $U = \{ \text{personas} \}$

$A = \{\text{personas van al teatro}\}$ $B = \{\text{personas van al cine}\}$

$A \cap B = \{\text{personas que van al cine y al teatro}\}$

entonces card $U = 100$ y se verifica

card $B = 2$ card A card $(A \cap B) = 25$

card $(A \cup B)$ = card U – card $(A \cup B)'$

= card U – card $(A' \cap B') = 80$

card A + card B = card $(A \cup B)$ + card $(A \cap B) = 105$.

Por tanto, card $A = 35$, card $B = 70$

PRINCIPIO DE LA CRIBA (ó de inclusión-exclusión)

- Si A , B y C son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$\text{card}(A \cup B \cup C) =$$

$$= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) -$$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) +$$

$$+ \text{card}(A \cap B \cap C)$$

Ejemplos

1) En el conjunto de los números naturales menores o iguales que 500, hallar cuántos números no son múltiplos de 2, ni de 3, ni de 5.

2) Hallar las permutaciones de $\{1, 2, ..., 9\}$ que contengan a una de las sucesiones 123, 456, 789.

Soluciones

1) Sean $N_{500} = \{ n \in N , n \leq 500 \}$

$A = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de $2 \} \Rightarrow$ card $A = 250$

$B = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de $3 \} \Rightarrow$ card $B = 166$

$C = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de $5 \} \Rightarrow$ card $C = 100$

$A \cap B = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de 2 y de $3 \}$

$A \cap C = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de 2 y de $5 \}$

$B \cap C = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de 3 y de $5 \}$

$A \cap B \cap C = \{ n \in N_{500} \,/\, n$ es múltiplo de 2 , de 3 y de $5 \}$

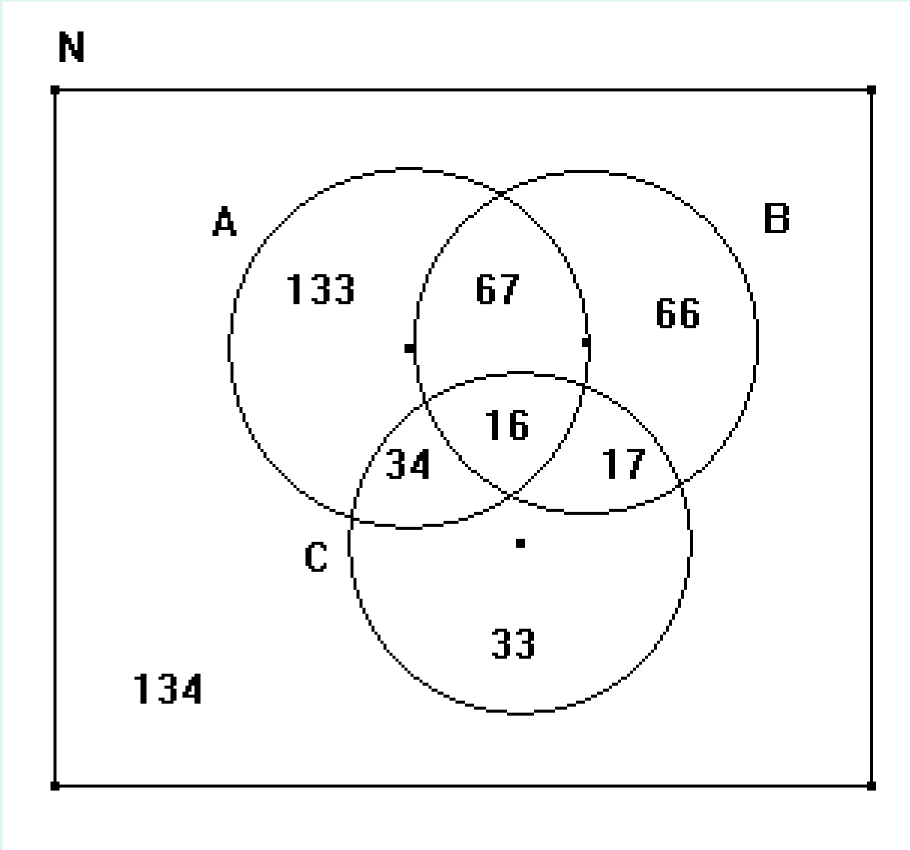
card $(A \cap B) = 83$, card $(A \cap C) = 50$, card $(B \cap C) = 33$

card $(A \cap B \cap C) = 16$ card $(A \cup B \cup C) = 366$

Por tanto,

card $(A' \cap B' \cap C') =$ card $(A \cup B \cup C)'$

$=$ card N_{500} – card $(A \cup B \cup C) = 134$


N
A
B
C
133
67
66
16
34
17
33
134

2) $A = \{$ permutaciones que contienen 123 $\}$
$B = \{$ permutaciones que contienen 456 $\}$
$C = \{$ permutaciones que contienen 789 $\}$
$\text{card } A = \text{card } B = \text{card } C = 7 .\, 6\,! = 7\,!$

$A \cap B = \{$ permutaciones que contienen 123 y 456 $\}$
$A \cap C = \{$ permutaciones que contienen 123 y 789 $\}$
$B \cap C = \{$ permutaciones que contienen 456 y 789 $\}$
$\text{card } (A \cap B) = \text{card } (A \cap C) = \text{card } (B \cap C) = 5\,!$

$A \cap B \cap C = \{$ permutaciones que contienen 123, 456 y 789 $\}$
$\text{card } (A \cap B \cap C) = 3\,!$

Entonces, $\text{card } (A \cup B \cup C) = 3 .\, 7\,! - 3 .\, 5\,! + 3\,! = 14766$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN LIMITADA

Ejemplos

1) ¿Cuántos $n \in$ N, $n < 10^4$, cumplen que la suma de sus cifras es 25?

$$1 \leq n = x_1 x_2 x_3 x_4 \leq 9999$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

$$0 \leq x_i \leq 9$$

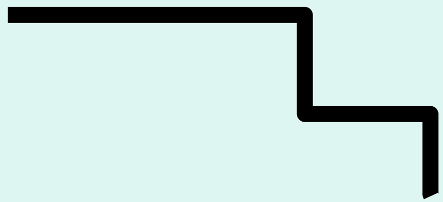
2) ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17$$

$$2 \leq x_1 \leq 5, \qquad 3 \leq x_2 \leq 6, \qquad 4 \leq x_3 \leq 7 \ ?$$

3) Al lanzar tres dados distintos a la vez, ¿en cuántos resultados posibles la suma es 10?

4) Un niño dispone de un juego de 30 palitos y los dispone en forma de escalera con 4 tramos, según indica la figura.



a) ¿Cuántas escaleras diferentes puede construir?

b) ¿Y si en cada uno de los tres primeros tramos debe haber a lo sumo 7 palitos?

Soluciones

1) Sean $X = \{\text{soluciones no negativas de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25\}$

$A_i = \{\text{soluciones de } X \text{ con } x_i \geq 10\}$. Entonces

$$\operatorname{card}\left(X - \bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \operatorname{card} X - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) =$$

$$= CR_{n=4,k=25} - 4CR_{n=4,k=15} + \binom{4}{2} CR_{n=4,k=5} = \binom{28}{3} - 4\binom{18}{3} + \binom{4}{2}\binom{8}{3}$$

$\operatorname{card} X = CR_{n=4,k=25}$

$\alpha_1 = 4 \operatorname{card} A_i = 4\, CR_{n=4,k=15}$

$\alpha_2 = \binom{4}{2} \operatorname{card} (A_i \cap A_j) = \binom{4}{2} CR_{n=4,k=5}$

$\alpha_3 = \alpha_4 = 0$

2) Se definen las variables $y_1 = x_1 - 2, \quad y_2 = x_2 - 3, \quad y_3 = x_3 - 4,$ entonces la ecuación se transforma en
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 8 \\ 0 \le y_i \le 3 \end{cases}$$

Sean $X = \{$soluciones no negativas de $y_1 + y_2 + y_3 = 8\}$
$A_i = \{$soluciones de X con $y_i \ge 4\}$.

$$\text{card}\left(X - \bigcup_{i=1}^{3} A_i \right) = \text{card } X - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) =$$
$$= \text{CR}_{n=3,k=8} - 3\text{CR}_{n=3,k=4} + \binom{3}{2}\text{CR}_{n=3,k=0} = \binom{10}{2} - 3\binom{6}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{2}$$

$\text{card } X = \text{CR}_{n=3,k=8}$

$\alpha_1 = 3 \text{ card } A_i = 3 \text{ CR}_{n=3,k=4}$

$\alpha_2 = \binom{3}{2} \text{ card } (A_i \cap A_j) = \binom{3}{2} \text{ CR}_{n=3,k=0}$

$\alpha_3 = 0$

3) Hay que elegir tres resultados, cuya suma sea $k = 10$ del conjunto A = { 1, 2, 3 } con $n = 3$ cajas, al menos un elemento de cada caja.

Sean $x_i \rightarrow$ número que aparece en el dado i,

entonces hay que resolver la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 1 \leq x_i \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 0 \leq x_i \leq 5 \end{cases}$$

Sean $X = \{$ soluciones no negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 7 \}$

$A_i = \{$ soluciones de X con $x_i \geq 6 \}$.

$$\text{card}\left(X - \bigcup_{i=1}^{3} A_i \right) = \text{card } X - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) =$$

$$= CR_{n=3,k=7} - 3CR_{n=3,k=1} = \binom{9}{2} - 3\binom{3}{2}$$

card $X = \text{CR}_{n=3,k=7}$

$\alpha_1 = 3$ card $A_i = 3\ \text{CR}_{n=3,k=1}$

$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$

4)

a) Sea x_i = nº de palitos que coloca en el tramo de escalera i-ésimo, entonces el nº de escaleras diferentes que puede construir es el nº de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \\ 0 \leq x_i \end{cases}$$

esto es, $CR_{n=4,k=26} = \binom{29}{26}$

b) Si en cada uno de los tres primeros tramos debe haber a lo sumo 7 palitos, entonces el nº de escaleras diferentes es el nº de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ 1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 7, \quad 1 \leq x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \\ 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6, \quad 0 \leq x_4 \end{cases}$$

Si A_i = {soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$ / $x_i \geq 7$}, i=1, 2, 3 entonces la solución es

$$CR_{4,26} - 3CR_{4,19} + \binom{3}{2} CR_{4,12} - CR_{4,5} = \binom{29}{3} - 3\binom{22}{3} + \binom{3}{2}\binom{15}{3} - \binom{8}{3}$$