

Tema 0

1. Sistemas de coordenadas ortogonales: cartesianas, cilíndricas, esféricas
2. Algebra vectorial: suma, resta y multiplicación de vectores. (no está)
3. Cálculo vectorial: diferenciación e integración de vectores.

– Operaciones:

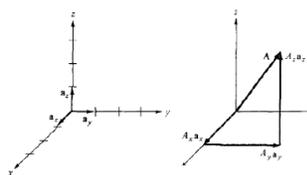
Gradiente (escalar-vector)

Divergencia (vector-escalar)

Rotacional (vector-vector)

Sistemas de Referencia

Cartesiano



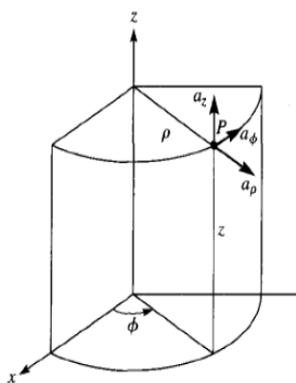
$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{or} \quad A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

Cilíndrico

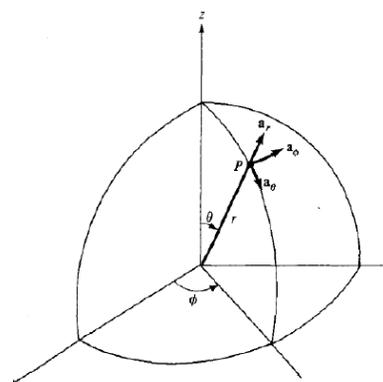


$$0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$-\infty < z < \infty$$

Esférico



$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

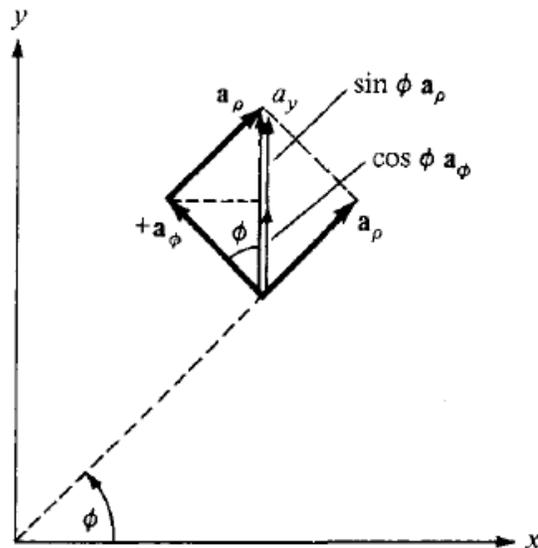
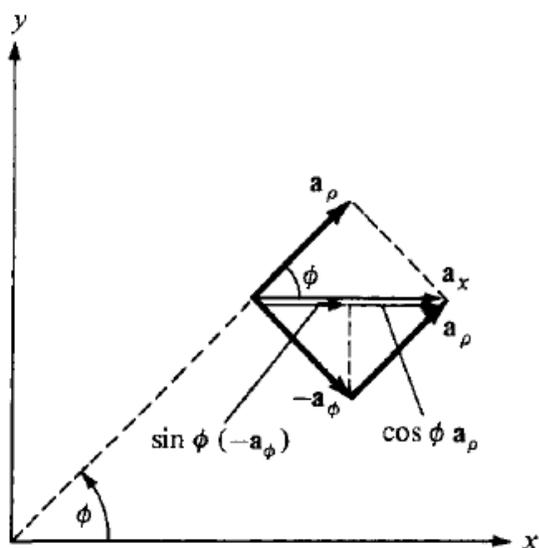
$$(A_r, A_\theta, A_\phi) \quad \text{or} \quad A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cambio de vectores unitarios y coordenadas de cilíndricas a cartesianas y viceversa



$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \cos \phi \mathbf{a}_\rho - \sin \phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= \sin \phi \mathbf{a}_\rho + \cos \phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\rho &= \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

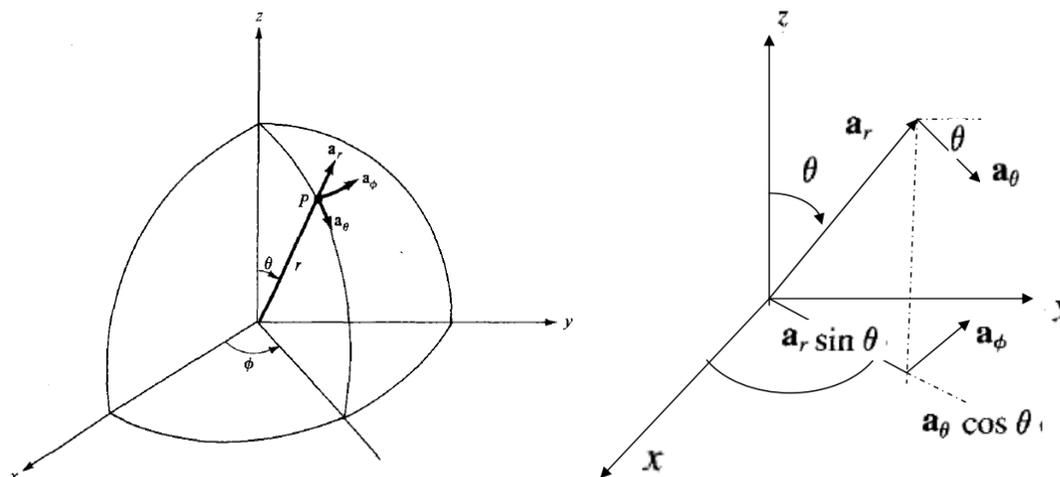
$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relación entre vectores unitarios de los sistemas cartesiano y esférico



$$\mathbf{a}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y$$

Cambio de coordenadas de esféricas a cartesianas y viceversa

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ -\cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ -\cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Cambio de coordenadas de esféricas a cilíndricas

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Resumen

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
x	$= \rho \cos \phi$	$= r \text{sen } \theta \cos \phi$
y	$= \rho \text{sen } \phi$	$= r \text{sen } \theta \text{sen } \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
\hat{x}	$= \cos \phi \hat{\rho} - \text{sen } \phi \hat{\phi}$	$= \text{sen } \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \text{sen } \phi \hat{\phi}$
\hat{y}	$= \text{sen } \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}$	$= \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{r} + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$
\hat{z}	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$
CILINDRICAS	CARTESIANAS	ESFERICAS
ρ	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r \text{sen } \theta$
ϕ	$= \tan^{-1}(y/x)$	$= \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{\rho}$	$= \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \phi \hat{y}$	$= \text{sen } \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$
$\hat{\phi}$	$= -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$
\hat{z}	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$
ESFERICAS	CARTESIANAS	CILINDRICAS
r	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
θ	$= \cos^{-1}(z/r)$	$= \cos^{-1}(z/r)$
ϕ	$= \cotan^{-1}(x/y)$	$= \phi$
\hat{r}	$= \text{sen } \theta \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$	$= \text{sen } \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}$
$\hat{\theta}$	$= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{y} - \text{sen } \theta \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{\rho} - \text{sen } \theta \hat{z}$
$\hat{\phi}$	$= -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$

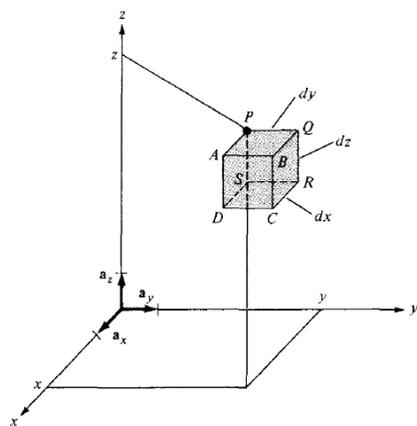


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

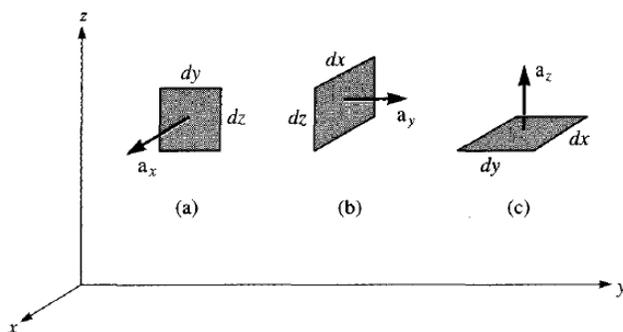
Diferenciales de longitud, área y volumen

Cartesianas



Longitud

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$$



Superficie ($d\vec{S} = dS\vec{a}_n$)

$$d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{a}_x$$

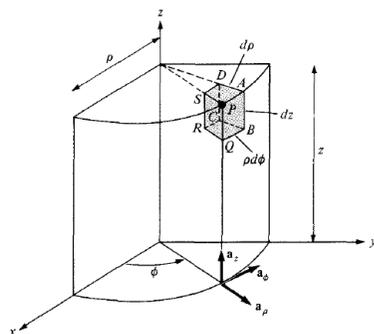
$$dx dz \mathbf{a}_y$$

$$dz dy \mathbf{a}_z$$

Volumen

$$dv = dx dy dz$$

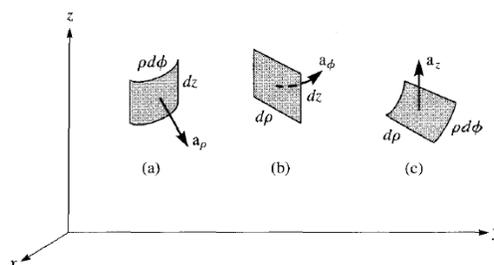
Cilíndricas



Longitud

Superficie ($d\vec{S} = dS\vec{a}_n$)

$$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$$



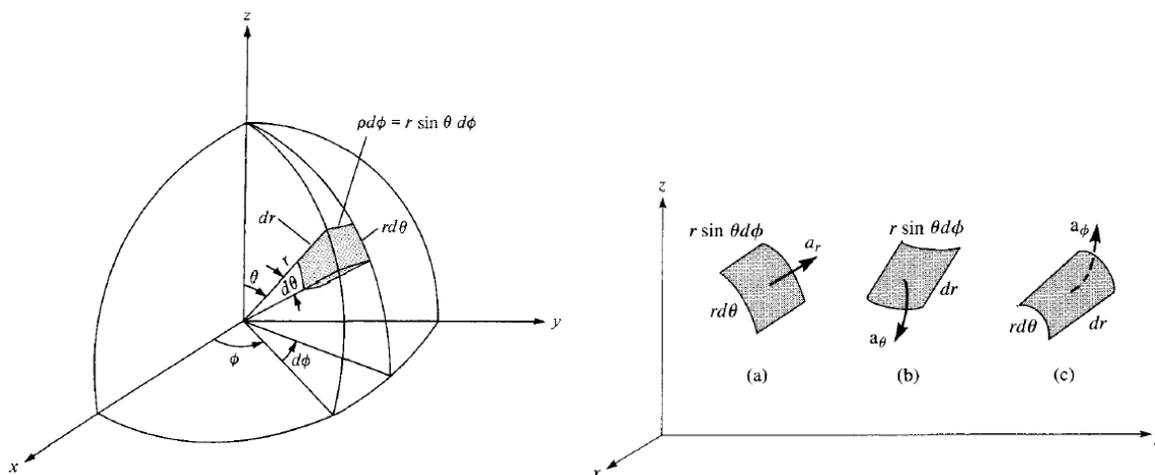
Volumen

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Esféricas



Longitud

$$dl = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

Superficie ($d\vec{S} = dS\vec{a}_n$)

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r + r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta + r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$$

Volumen

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Resumen

CARTESIANAS

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$dS_x = dy dz$$

$$dS_y = dx dz$$

$$dS_z = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

CILINDRICAS

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$dS_\rho = \rho d\phi dz$$

$$dS_\phi = d\rho dz$$

$$dS_z = \rho d\rho d\phi$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

ESFERICAS

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi$$

$$dS_\phi = r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Factores de escala

Las líneas coordenadas de un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional son aquellas que se obtienen partiendo de un punto dado, de coordenadas y se mantienen fijas las otras dos. Un sistema de coordenadas se dice *ortogonal* si las líneas coordenadas son ortogonales en cada punto. Las coordenadas cartesianas, las cilíndricas y las esféricas, son ejemplos de coordenadas ortogonales.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Coordenadas esféricas y cilíndricas [\[editar \]](#)

Aplicando el cálculo de los factores de escala a las [coordenadas cartesianas](#) se obtiene:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1$$

En [coordenadas cilíndricas](#):

$$h_1 = 1 \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1$$

y en [coordenadas esféricas](#):

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \operatorname{sen}\theta$$

Debe recordarse que el espacio tridimensional, en el que existe una función para medir distancias y longitudes de curvas, Existen los factores de escala que relacionan como pueden calcularse, por ejemplo un "desplazamiento infinitesimal" en los tres sistemas de referencia mencionados.

En el sistema cilíndrico

Disponiendo de la base de coordenadas cilíndricas se obtiene que la expresión del vector de posición en estas coordenadas es:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

Nótese que no aparece un término $\varphi \hat{\varphi}$. La dependencia en esta coordenada está *oculta* en los vectores de la base.

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ &= \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z\vec{k} \\ &= \rho(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + z\vec{k} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Un desplazamiento infinitesimal, expresado en coordenadas cilíndricas, viene dado por

$$d\vec{r} = h_\rho d\rho \hat{\rho} + h_\varphi d\varphi \hat{\varphi} + h_z dz \hat{z} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$$

Diferenciales de superficie

La expresión general de un diferencial de superficie en coordenadas curvilíneas es complicada.

Sin embargo, para el caso de que se trate de una superficie coordenada, $q_3 = \text{cte}$, el resultado es

$$d\vec{S}_{q_3 = \text{cte}} = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{q}_3$$

En el caso particular de las coordenadas cilíndricas, los diferenciales de superficie son

- $\rho = \text{cte}$: $d\vec{S}_{\rho = \text{cte}} = \rho d\varphi dz \hat{\rho}$
- $\varphi = \text{cte}$: $d\vec{S}_{\varphi = \text{cte}} = d\rho dz \hat{\varphi}$
- $z = \text{cte}$: $d\vec{S}_{z = \text{cte}} = \rho d\rho d\varphi \hat{z}$

Diferencial de volumen

El volumen de un elemento en coordenadas cilíndricas

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

En el sistema Esférico

En el cálculo de esta base se obtienen los [factores de escala](#)

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\varphi = r \sin\theta$$

Disponiendo de la base de coordenadas esféricas se obtiene que la expresión del vector de posición en

estas coordenadas es $\vec{r} = r \hat{r}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Diferencial de línea

Un desplazamiento infinitesimal, expresado en coordenadas esféricas, viene dado por

$$d\vec{r} = h_r dr \hat{r} + h_\theta d\theta \hat{\theta} + h_\varphi d\varphi \hat{\varphi} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$$

Diferenciales de superficie

La expresión general de un diferencial de superficie en coordenadas curvilíneas es complicada. Sin embargo, para el caso de que se trate de una superficie coordenada, $q_3 = \text{cte}$, el resultado es

$$d\vec{S}_{q_3 = \text{cte}} = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{q}_3$$

En el caso particular de las coordenadas esféricas, los diferenciales de superficie son

- $r = \text{cte}$: $d\vec{S}_{r = \text{cte}} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$
- $\theta = \text{cte}$: $d\vec{S}_{\theta = \text{cte}} = r \sin \theta dr d\varphi \hat{\theta}$
- $\varphi = \text{cte}$: $d\vec{S}_{\varphi = \text{cte}} = r dr d\theta \hat{\varphi}$

Diferencial de volumen

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

que para coordenadas esféricas en las que el ángulo vertical empieza en el eje z da

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

y en las que el ángulo vertical empieza en el plano XY da

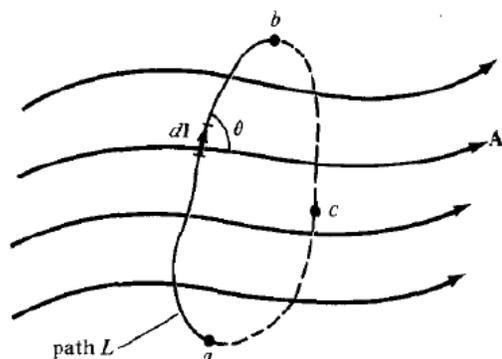
$$dV = r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b |\mathbf{A}| \cos \theta dl$$

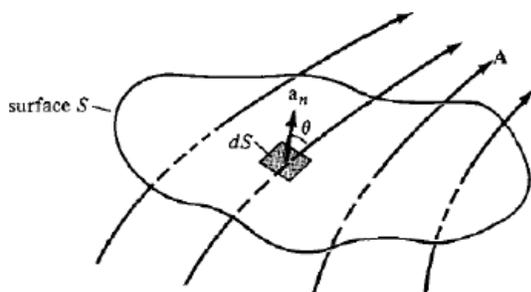
$$\int_{a(C)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

En general la integral va a depender del recorrido que haga para ir de a a b, si no depende del recorrido, el vector se dice que es conservativo y la integral a lo largo de un recorrido cerrado será 0.

Flujo

Si tenemos un vector que atraviesa una superficie, \vec{da} , se define flujo, Φ



$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \vec{da} = \int_S |\vec{F}| \cdot da \cos \theta$$

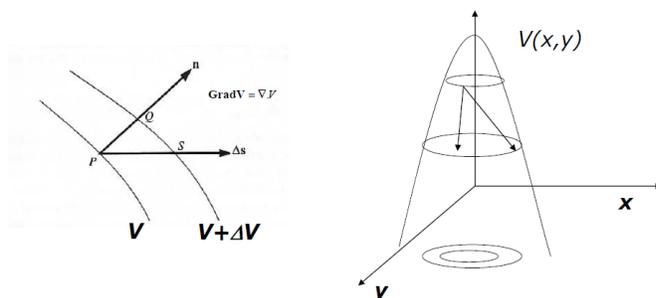
Gradiente

• Para analizar cómo cambia un campo escalar, si tenemos un función escalar en un punto P, ejemplo la temperatura T, puede variar su valor en otro punto, P₁, para estudiar sus variaciones en el espacio se utiliza las derivadas parciales en tres direcciones.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



- **dV es el diferencial total de V como resultado de un cambio de posición de P a S**

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l_1} .dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} .dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} .dl_3 = \nabla V .d\mathbf{l}$$

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial l_1} .dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} .dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} .dl_3 = \nabla V_1 .dl_1 h_1 + \nabla V_2 .dl_2 h_2 + \nabla V_3 .dl_3 h_3$$

$$\nabla V_i .dl_i h_i = \frac{\partial V}{\partial l_i} .dl_i$$

$$\nabla V_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial l_i}$$

$$\nabla = \left(\mathbf{a}u_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial l_1} + \mathbf{a}u_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial l_2} + \mathbf{a}u_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial l_3} \right) \quad \text{Operador gradiente}$$

La derivada es más grande a lo largo de la normal (PQ), porque es la distancia más corta entre ambas curvas (superficies) de nivel

- El gradiente es perpendicular a la curva de nivel
- Las derivadas en otras direcciones puede escribirse como el gradiente proyectado en esta dirección

El diferencial de V se puede expresar con el producto escalar de

$$dV = (\nabla V) .d\mathbf{l}$$

Que representa cuando cambia el valor de la función cuando se varía la posición de P a S, dV. **Recordar**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} dl_3 = \nabla V \cdot d\mathbf{l}$$

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} dl_3 = \nabla V_1 \cdot dl_1 h_1 + \nabla V_2 \cdot dl_2 h_2 + \nabla V_3 \cdot dl_3 h_3$$

$$\nabla V_i \cdot dl_i h_i = \frac{\partial V}{\partial l_i} dl_i$$

$$\nabla V_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial l_i}$$

$$\nabla = \left(\mathbf{a}_{u_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial l_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial l_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial l_3} \right) \quad \text{Operador gradiente}$$

Fórmulas de cálculo, fácilmente comprobables

- (a) $\nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U$
- (b) $\nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V$
- (c) $\nabla \left[\frac{V}{U} \right] = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2}$
- (d) $\nabla V^n = nV^{n-1} \nabla V$

Divergencia

El flujo saliente de un vector a través de una superficie cerrada se puede calcular o bien con:

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \vec{da}$$

O a través del cálculo de

$$\int [\partial F_x \quad \partial F_y \quad \partial F_z]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

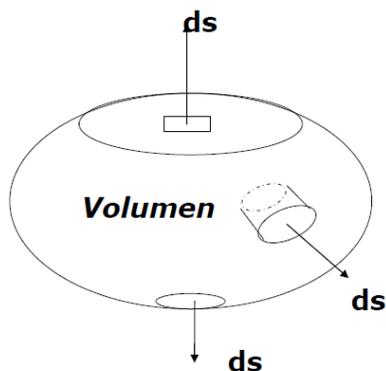
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Al término $\left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]$, flujo saliente por unidad de volumen recibe el nombre de **divergencia** y se representa por $\nabla \vec{F}$. **La divergencia de un vector es un escalar**

Teorema de la Divergencia

El flujo hacia fuera de un campo vectorial **A**, a través de una superficie cerrada, **S**, equivale a la integral de volumen (encerrado por la S) de la divergencia de **A**



$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \vec{da} = \int_V \nabla \vec{F} \cdot dv$$

En el primer término se utilizan los valores de **F** sobre la superficie, mientras en el segundo se utilizando en todo el volumen que encierra **S**.

Por tanto, las derivadas espaciales de un vector se pueden representar con líneas de flujo

–Curvas que indican en cada punto su dirección

–La magnitud se puede indicar con la densidad o la longitud de las líneas

Resumiendo

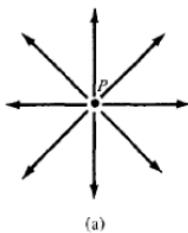
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

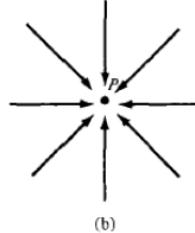
Cartagena99

Divergencia de un Campo vectorial:

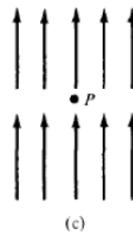
$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$



(a)
**Fuente,
diverge,
+**



(b)
**Sumidero,
converge,
-**



(c)
**Divergencia nula,
0**

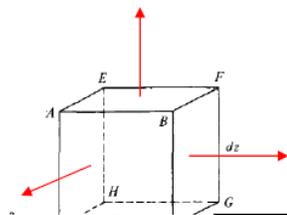
Opcional, demostración de la ecuación anterior

Encontremos la expresión en coordenadas cartesianas

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

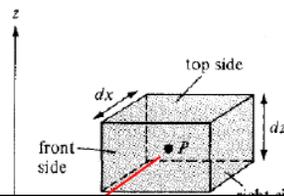
Desarrollo de A_x alrededor de P con series de Taylor

$$A_x(x, y, z) = A_x(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_P + (y - y_0) \left. \frac{\partial A_x}{\partial y} \right|_P + (z - z_0) \left. \frac{\partial A_x}{\partial z} \right|_P + \text{higher-order terms}$$



front side.

$$x = x_0 + dx/2$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

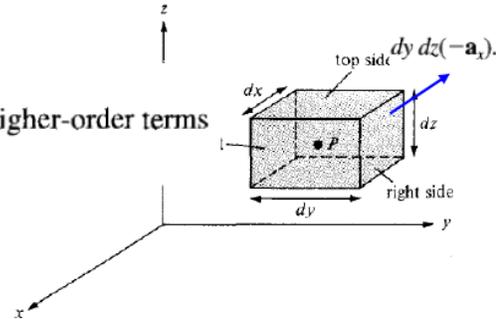
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dy dz \left[A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P \right] + \text{higher-order terms}$$

back side, $x = x_0 - dx/2$, $d\mathbf{S} = dy dz(-\mathbf{a}_x)$

$$\int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -dy dz \left[A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P \right] + \text{higher-order terms}$$



$$\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P + \text{higher-order terms}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\int_{\text{left}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{right}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \left. \frac{\partial A_y}{\partial y} \right|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \left. \frac{\partial A_z}{\partial z} \right|_P + \text{higher-order terms}$$

$$\Delta v = dx dy dz$$

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{\text{at } P}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Propiedades

3. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

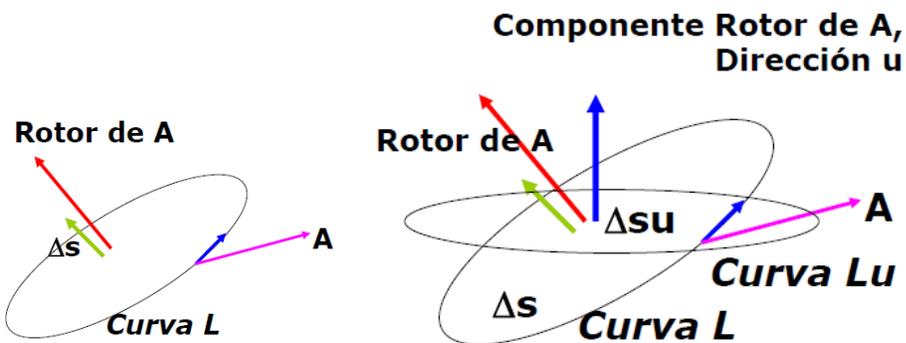
Rotacional

El rotacional es un vector cuya magnitud es la circulación máxima de A por unidad de área conforme el

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



El rotacional es una función vectorial puntual, su componente en cualquier otra dirección es la proyección del rotacional sobre estas.

- Se puede obtener como la circulación por unidad de área normal a esta y tendiendo a cero
- Componente en otra dirección puede determinarse:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta S_u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_u} \left(\oint_{Lu} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z$$

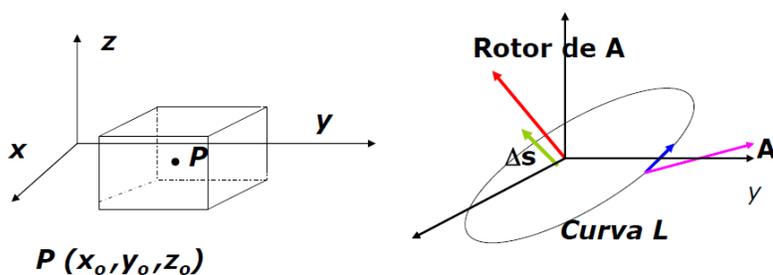
Demostración del valor del rotacional, optativo en cartesianas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• Expresión del rotacional en coordenadas x, y, z



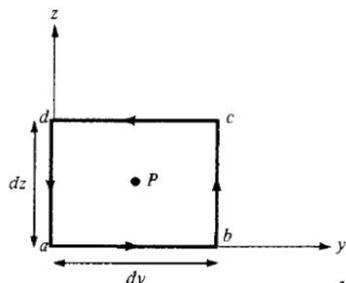
Desarrollo en series de Taylor

$$Ax = Ax(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial Ax}{\partial z} + (y - y_0) \frac{\partial Ax}{\partial y} + (x - x_0) \frac{\partial Ax}{\partial x}$$

$$Ay = Ay(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial Ay}{\partial z} + (y - y_0) \frac{\partial Ay}{\partial y} + (x - x_0) \frac{\partial Ay}{\partial x}$$

$$Az = Az(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial Az}{\partial z} + (y - y_0) \frac{\partial Az}{\partial y} + (x - x_0) \frac{\partial Az}{\partial x}$$

$$Ay = Ay(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial Ay}{\partial z} + (y - y_0) \frac{\partial Ay}{\partial y} + (x - x_0) \frac{\partial Ay}{\partial x}$$



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$ab, d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y \quad z = z_0 - dz/2,$$

$$\int_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dy \left[A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_P \right]$$

$$cd, d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y \text{ and } z = z_0 + dz/2, \text{ so}$$

$$\int_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy \left[A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_P \right]$$

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z} dz \cdot dy$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

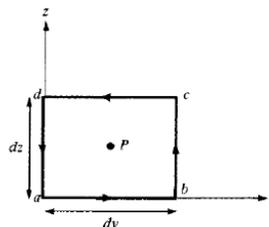
• Para los lados bc y da

bc, $d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$ and $y = y_0 + dy/2$, so

$$\int_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dz \left[A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_P \right]$$

da, $d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$ and $y = y_0 - dy/2$, so

$$\int_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dz \left[A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_P \right]$$



$$\frac{\partial A_z}{\partial y} dz \cdot dy$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\frac{\partial A_z}{\partial y} dz \cdot dy - \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \cdot dy}{dz \cdot dy} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

Utilizando los factores de escala

El rotacional expresado para las variables u_1, u_2, u_3

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{u1} h_1 & \mathbf{a}_{u2} h_2 & \mathbf{a}_{u3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 \cdot A_1 & h_2 \cdot A_2 & h_3 \cdot A_3 \end{pmatrix}$$

Cilíndricas (ρ, ϕ, z):
 $h_1=1, h_2=\rho, h_3=1$

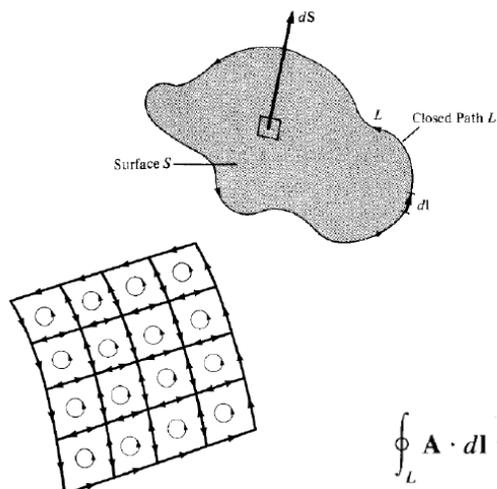
Esféricas (r, θ, ϕ):
 $h_1=1, h_2=r; h_3=r \cdot \sin \theta$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- **Teorema de Stoke:** la circulación de un campo **A** alrededor de una trayectoria cerrada **L** es igual a la integral de superficie del rotacional de **A** sobre la superficie **S** circunscrita por **L**, siempre que **A** y **rotA** sean continuos en **S**



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

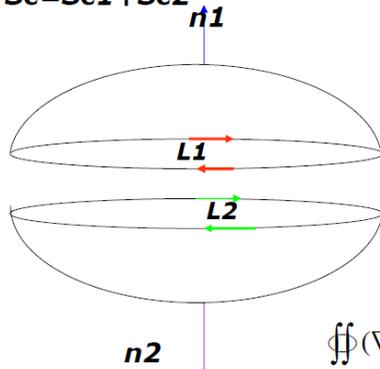
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right) \mathbf{a}_n$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \frac{\oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_k} \Delta S_k$$

- **Identidad Nula. Divergencia de un rotor**

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$S_c = S_{c1} + S_{c2}$$



Gauss

$$\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \iint_{S_c} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

• **La integral de superficie se Divide en dos, conectadas por una frontera comun L1 y L2.**

• **Se aplica Stoke**

$$\iint_{S_c} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_{c1}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}_1 + \iint_{S_{c2}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}_2$$

$$\iint_{S_c} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{L1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{L2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Si la divergencia de un campo vectorial es nula , el campo es solenoidal y se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- **Identidad Nula. Rotor de un gradiente**

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\nabla V) = 0$$

- **Aplicamos Stoke en cualquier superficie**

$$\iint_s \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla V) \cdot d\mathbf{s} = \oint \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \int_P^P dV = V(P) - V(P) = 0$$

• **Si el rotacional de un campo es nulo este campo se puede expresar como el gradiente de una función escalar.**

• **Un campo vectorial irrotacional es conservativo, y se puede expresar como el gradiente de un campo escalar**

- **Divergencia (Gradiente)-->Laplaciano de un Escalar**

$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{ax} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{ay} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{az} \quad \longrightarrow \quad \text{Operador nabra en rectangulares}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{ax} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{ay} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{az} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{ax} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{ay} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{az} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \quad \longrightarrow \quad \text{Laplaciano en rectangulares}$$

- **Rotor de Un Rotor= Gradiente(divergencia)-Laplaciano del vector**

$$\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

- **Clasificación de Campos Vectoriales según sus fuentes de rotor y divergencia**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teorema de Helmholtz

- Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todo punto
 - En el infinito debe anularse
 - O bien si está limitado a una región, se debe conocer la componente normal en la superficie límite

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \quad \nabla \times \mathbf{A} = \rho_s$$

- Un campo vectorial puede expresarse como la suma de dos vectores uno irrotacional y otro solenoidal de divergencia nula.

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_i = -\nabla V \quad \mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_i = 0 \quad \text{Irrotacional}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_s = 0 \quad \text{Solenoidal}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \quad \nabla \times \mathbf{A} = \rho_s$$

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B}$$

Laplaciano del vector A se define como

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Ecuación diferencial de A en función de sus fuentes

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\rho_v) - \nabla \times (\rho_s)$$

Vector: densidad de circulación

Densidad de origen o 'carga'

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas

El [gradiente](#), la [divergencia](#), el [rotacional](#) y el [laplaciano](#) poseen expresiones particulares en coordenadas cilíndricas:

- Gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

- Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- Rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

- Laplaciano

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Operadores diferenciales en coordenadas esféricas

- Gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

- Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(F_\varphi)}{\partial\varphi}$$

- Rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

- Laplaciano

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Anexo:Tabla en coordenadas cilíndricas y esféricas

Esta es una lista de algunas fórmulas de cálculo vectorial de empleo corriente trabajando con varios sistemas de coordenadas.

Operación	coordenadas cartesianas (x,y,z)	coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z)	coordenadas esféricas (r,θ,φ)
Definición de las coordenadas		$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
		$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{cases}$
A	$A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$	$A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$	$A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{matrix} +$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{matrix} +$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{matrix} +$
$\Delta f = \nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$	$\hat{x} \Delta A_x + \hat{y} \Delta A_y + \hat{z} \Delta A_z$	$\begin{matrix} \hat{\rho} \left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \\ \hat{\phi} \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) + \\ \hat{z} \Delta A_z \end{matrix}$	$\begin{matrix} \hat{r} \left(\Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \\ \hat{\theta} \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \\ \hat{\phi} \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \end{matrix}$
Reglas de cálculo no triviales:			
<ol style="list-style-type: none"> 1. $\text{div grad } f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$ (laplaciano) 2. $\text{rot grad } f = \nabla \times (\nabla f) = 0$ 3. $\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ 4. $\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 5. $\Delta fg = f \Delta g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + g \Delta f$ 6. Fórmula de Lagrange para el producto vectorial: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ 			

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99