Tema 1
.1. Estructuras Algebraicas

Álgebra. 1º IEC

ción

ras Algebraicas

finición y propiedades

os de estructuras Algebraicas

.2.1. Semigrupo

.2.2. Grupo

.2.3. Anillo

.2.3. Cuerpo

jebraicos

sa :) tal que	$\exists$ *existe* $\nexists$ *no existe*
	$\exists!$ *existe un único*
	$\subset, \subseteq, \not\subset, \nsubseteq$ *Signos de inclusión*
$\notin$ *No pertenece*	$\cup$ *Unión* (O) $\cap$ *Intersección*(Y)
	$\perp$ *Ortogonalidad*
njuntos Numéricos	X_+, X_-, X^* *los positivos, negativos y todos excepto* 0

turas Algebraicas

ción y propiedades

ección de objetos (o elementos) bien definidos. Se denota con letras mayúsculas y sus r letras minúsculas.

nto vacío $\emptyset$: carece de elementos

ementos se pueden denotar: 1) por extensión (ej. $A = \{1,3,5,7\}$); 2) por compresión (ej. $\in N \mid a\ es\ primo < 10\}$)

t aquel formado tomando ciertos elementos de un conjunto.

$$\forall b \in B \Rightarrow b \in A \quad B = \{b \in B\} \subset A$$

njuntos impropios de A: $\emptyset$ y A.

njuntos propios de A: $B \subset A$ y $B \neq \emptyset$ y $B \neq A$

n interna definida en un conjunto $X \neq \emptyset$ es una función binaria $\star$ que a cada par ordenado
X le hace corresponder un único elemento de X.

$$\star : X \times X \to X$$

$$(x, y) \mapsto z = \star\,(x, y) = x \star y$$

r la aplicación $\star$ del par (x, y) se denotará por $\star\,(x, y) = x \star y$ (se lee x *por* y , el resultado de
y).

ción interna de $X \;\Rightarrow\; \forall x, y \in X \;\; \exists!\; x \star y \;\in X$ (o sea, si $\star$ es una operación interna en X
esquiera que sean x e y de X existe $x \star y \;\in X$ y es único).

ón externa (para X): $\star : X \times X' \to X'$ (ej. producto de vector por escalar), o bien $\star : X \times X \to X'$
escalar de dos vectores)

rado (o parte estable de un conjunto): Dada una operación interna $\star$ sobre X y sea $X' \subset X$.
X' es cerrado para la operación $\star$ cuando: $x, y \in X' \;\Rightarrow x \star y \in X' \;\; \forall x, y \in X'$

Ejemplos de operaciones internas

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\perp$	a	b
a	a	a
b	b	b

gebraica: conjunto formado por elementos y donde hay definidas ciertas operaciones satisfacen unas determinadas propiedades. Se llama estructura, y se escribe $(X,\star)$, al nto con la operación $\star$.

unto X con varias operaciones también forma una estructura algebraica $(X,\star,\dagger,\ldots)$.

piedades de una operación interna $\star$

unto no vacío y sea $\star$ una operación interna definida en X.

ativa: $(x\star y)\star z = x\star(y\star z) \equiv x\star y\star z \quad \forall x,y,z\in X$

utativa: $(x\star y) = (y\star x) \quad \forall x,y\in X$

butiva: Si además de $\star$, X posee otra operación interna $\dagger$,o sea $(X,\star,\dagger)$, se dirá que $\star$ es utiva respecto de $\dagger$ si:

$\dagger\, z) = (x\star y)\dagger(x\star z)\ \forall x,y,z\in X \qquad (y\dagger z)\star x = (y\star x)\dagger(z\star x)\ \forall x,y,z\in X$

nto neutro: Un elemento $e\in X$ es neutro si : $\quad x\star e = e\star x = x \qquad \forall x\in X$

El elemento neutro puede existir o no, pero si $(X,\star)$ tiene elemento neutro e respecto de $\star$, es éste es único.

nto simétrico: y es un simétrico de x (y se denota por x') si : $\quad x\star x' = x'\star x = e$

Si un elemento tiene simétrico decimos que es simetrizable. En principio un elemento puede nás de un simétrico.

nto regular o simplificable: $x\in X$ es un elemento regular si $x\star y = x\star z \Rightarrow\ y = z$ o $z\star x \Rightarrow y = z \quad \forall y,z\in X$

Todo elemento regular posee a lo más un simétrico. El cero no es regular.

le estructuras Algebraicas

ırupo

Estructura algebraica $(X,\star)$ en la que $\star$ es asociativa.

: Al ser $\star$ asociativa se cumple:

elemento $x \in X$ es simetrizable, su simétrico $x' \in X$ es único

$= x \quad \forall x \in X$ (x' es el simétrico de $x \Rightarrow x$ es el simétrico de x')

$y \in X$ son elementos simetrizables, $x \star y$ también lo es y su simétrico es $(x \star y)' = y' \star$
$y \in X$

elemento $x \in X$ simetrizable es regular (lo inverso no es necesariamente cierto)

cuaciones $a \star x = b$ y $x \star a = b$ (x incógnita) tienen solución única que es $x = a' \star b$ y
$\star\, a'$

es un grupo si $\star$ es asociativa (o sea, es un semigrupo), existe elemento neutro respecto a $\star$
to de X tiene simétrico, o sea:

$\exists!\, e \in X \mid e \star x = x \star e = x$

$\exists!\, x' \in X \mid x \star x' = x' \star x = e$

os elementos de X son regulares (al ser simetrizables). Si todos los elementos de un conjunto
es, entonces se dice que se cumple la ley de cancelación o simplificación.

adicionales: $(X,\star)$ es un grupo conmutativo o abeliano si además de las propiedades de
la propiedad conmutativa: $\forall x, y \in X \;\; x \star y = y \star x$

llo $(X,+,\cdot)$ es un conjunto $X \neq \emptyset$ dotado de dos operaciones internas denotadas por + y $\cdot$

es un grupo

es un semigrupo

edad distributiva del producto respecto de la suma: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
$\cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x,y,z \in X.$

adicionales:

$\cdot)$ es un anillo conmutativo si la operación $\cdot$ es conmutativa $x \cdot y = y \cdot x \;\; \forall x,y \in X$

$\cdot)$ es un **anillo con identidad o unitario** si posee elemento neutro respecto de $\cdot$, o sea,
$X \mid x \cdot e = e \cdot x = x \;\; \forall x \in X$ (se denomina unidad del anillo y se denota por 1)

njunto formado por los elementos invertibles de X, o sea, $X'^{*} = \{x \neq 0 \in X \mid \exists x^{-1} \in X\}$
grupo respecto de $\cdot$ al que se llama grupo multiplicativo de X.

ores de cero: Dos elementos $x, y \in X$ son divisores de cero si y solo si siendo
y $y \neq 0 \;\Rightarrow x \cdot y = 0$ o $y \cdot x = 0$

es invertible $\Rightarrow x$ no es divisor de cero

$(X,+,\cdot)$ es regular si y solo si no es 0 ni divisor de cero. Análogamente x es divisor de cero si y
i no es regular para el producto.

$,\cdot)$ es un **anillo integro** (o anillo de integridad) cuando no tiene divisores de cero, o sea, si
$\in X \quad x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 0$

$,\cdot)$ es un **dominio de integridad** si es un anillo de integridad, unitario y conmutativo.

o

onjunto X dotado de dos operaciones + y · se dirá que es un cuerpo si $(X,+,\cdot)$ es un anillo y todo elemento distinto de cero tiene inverso respecto al producto, esto es:

) es un grupo (o bien $(X,+,\cdot)$ es un anillo)

es un grupo

edad distributiva del producto: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

$\in X$.

cuerpo tiene al menos dos elementos: $\{0,1\}$

) es un grupo conmutativo el cuerpo se dirá conmutativo.

erpo $(X,+,\cdot)$ es un anillo unitario, y como todo elemento admite inverso, no existen divisores

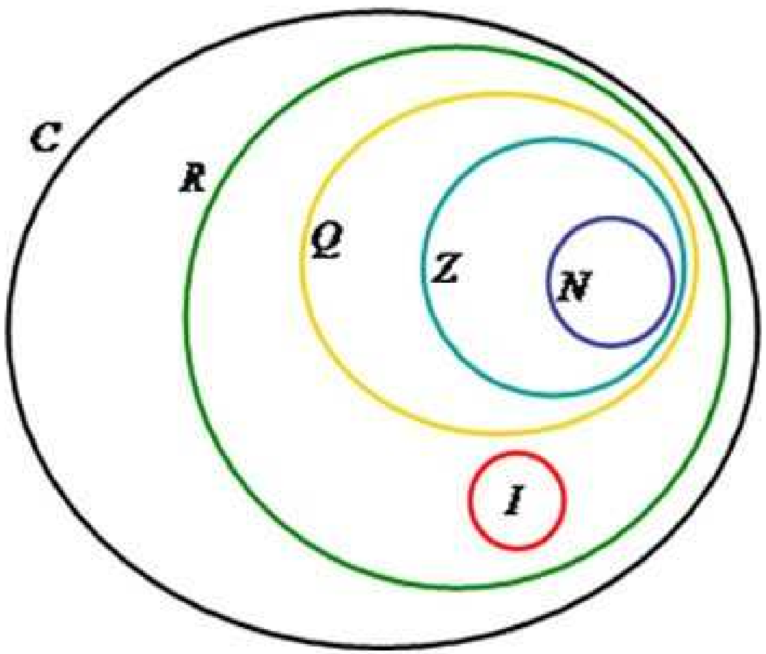
(anillo íntegro). Así, si X es un cuerpo conmutativo, X es un domino de integridad.

: $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N},+)$ es un semigrupo. ¿Cómo extenderlo para convertirlo en grupo? $x+n=m \;\; m,n \in$
tiene solución en $\mathbb{N}$. Para la que sí la tenga, se añaden las raíces $x=m-n$ a $\mathbb{N}$, obteniendo
$n,n \in \mathbb{N}\}$. Siendo así, $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo

: $\mathbb{Z}$: Un procedimiento para construir a partir de un dominio de integridad $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ un nuevo
odos sus elementos poseen inverso es resolver la ecuación $x \cdot q = p \;\; q \neq 0$ y añadir sus
teniendo así $\mathbb{Q} = \{p/q \mid q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\}$. En ese caso se obtiene $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, que es un cuerpo.
racionales son pues las raíces de las ecuaciones polinómicas de grado 1.

: $\mathbb{Q}$: Existen ecuaciones polinómicas de segundo grado que no tienen raíces racionales pero
os (extensiones de $\mathbb{Q}$) donde las anteriores ecuaciones tienen solución. El cuerpo óptimo en
uación polinómica tiene raíz es $\mathbb{C}$, que se construye en dos etapas: 1) no algebraica ($\mathbb{R}$,
2) algebraica ($\mathbb{C}$). $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1}) = \{p + q\sqrt{-1} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$. Así $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es cerrado.

damental del álgebra: $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado



ESTRUCTURAS	PROPIEDADES
Semi-grupo	Asociativa (+): $a + (b + c) = (a + b) + c$
	Elemento neutro (+): $a + e = e + a = a$
Grupo	Elemento simétrico (+): $a + a' = a' + a = e$
	Asociativa (·): $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Anillo	(·) Distributiva (+): $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
Anillo Unitario	Elemento neutro (·): $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Cuerpo	Elemento simétrico (·): $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
Cuerpo conmutati	Conmutativa (·): $a \cdot b = b \cdot a$