

Tema 1

I.4 Determinantes

Álgebra. 1º IEC

I.4. Determinantes

I.4.1. Definición

I.4.2. Cofactores y Matriz Adjunta

I.4.2.1. Desarrollo en cofactores

I.4.2.2. Matriz Adjunta

I.4.2.3. Rango de Menores

Box I.4.1. Rango de una matriz por menores

I.4.2.4. Sistemas de Cramer

I.4.3. Determinantes de matrices elementales

I.4.4. Propiedades de los determinantes

I.4.5. Algoritmo de Gauss-Jordan

Box I.4.2. Algoritmo de Cálculo de Determinante por Gauss-Jordan

Box I.4.3. Algoritmo de Cálculo de Determinante por Reducción de Orden

I.4. Determinantes

I.4.1. Definición

Definición: Se llama determinante a una aplicación que a cada matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$ le asocia un escalar que se llama determinante (de orden n) de la matriz A :

$$\begin{aligned} \det: \mathcal{M}_n(K) &\rightarrow K \\ A &\rightarrow \det(A) \end{aligned}$$

de modo que el determinante de toda matriz existe y es único, y además $\forall i, j \in K$ cumple:

1. $\det[\vec{a}_1^c \cdots \vec{a}_j^c + \vec{a}''^c_j \cdots \vec{a}_n^c] = \det[\vec{a}_1^c \cdots \vec{a}_j^c \cdots \vec{a}_n^c] + \det[\vec{a}_1^c \cdots \vec{a}''^c_j \cdots \vec{a}_n^c]$
2. $\det[\vec{a}_1^c \cdots k\vec{a}_j^c \cdots \vec{a}_n^c] = k \cdot \det[\vec{a}_1^c \cdots \vec{a}_j^c \cdots \vec{a}_n^c]$
3. $\det[\vec{a}_1^c \cdots (i^a = \vec{u}) \cdots (j^a = \vec{u}) \cdots \vec{a}_n^c] = 0$ (o sea $\vec{a}_i^c = \vec{a}_j^c \Rightarrow \det(A) = 0$)
4. $\det(I_n) = 1$

Propiedades:

- $\det[\vec{a}_1^c \cdots (i^a = \vec{u}) \cdots (j^a = \vec{v}) \cdots \vec{a}_n^c] = -\det[\vec{a}_1^c \cdots (i^a = \vec{v}) \cdots (j^a = \vec{u}) \cdots \vec{a}_n^c]$
- $\det[\vec{a}_1^c \cdots (j^a = \vec{0}) \cdots \vec{a}_n^c] = 0$
- $\det[\vec{a}_1^c \cdots (j^a = \sum_{h \neq j} k_h \vec{a}_h^c) \cdots \vec{a}_n^c] = 0, \quad k_h \in K$
- $\det[\vec{a}_1^c \cdots (j^a = \vec{a}_j^c + \sum_{h \neq j} k_h \vec{a}_h^c) \cdots \vec{a}_n^c] = \det[\vec{a}_1^c \cdots \vec{a}_j^c \cdots \vec{a}_n^c]$

Nota: Todas las propiedades de los determinantes que se refieren a sus columnas son también válidas para las filas.

El determinante se denota por $\det(A)$, $|A|$, Δ_A o $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Nota: En la definición anterior se pueden sustituir las columnas ${}^c\vec{a}_j$ por las filas ${}^f\vec{a}_i$

Propiedades:

$$\text{a) } \det[{}^c\vec{a}_1 \cdots (i^a = \vec{u}) \cdots (j^a = \vec{v}) \cdots {}^c\vec{a}_n] = -\det[{}^c\vec{a}_1 \cdots (i^a = \vec{v}) \cdots (j^a = \vec{u}) \cdots {}^c\vec{a}_n]$$

$$\text{b) } \det[{}^c\vec{a}_1 \cdots (j^a = \vec{0}) \cdots {}^c\vec{a}_n] = 0$$

$$\text{c) } \det[{}^c\vec{a}_1 \cdots (j^a = \sum_{h \neq j} \lambda_h {}^c\vec{a}_h) \cdots {}^c\vec{a}_n] = 0, \lambda_h \in K$$

$$\text{d) } \det[{}^c\vec{a}_1 \cdots (j^a = {}^c\vec{a}_j + \sum_{h \neq j} \lambda_h {}^c\vec{a}_h) \cdots {}^c\vec{a}_n] = \det[{}^c\vec{a}_1 \cdots {}^c\vec{a}_j \cdots {}^c\vec{a}_n]$$

Por tanto se cumple:

1. Si a una columna de A se le multiplica por un escalar λ , el $\det(A)$ queda multiplicado por λ
2. Si a una columna de A se le suma una combinación lineal de otras columnas el $\det(A)$ no se altera
3. Si dos columnas de A se permutan, el $\det(A)$ cambia de signo
4. Las condiciones que hacen a un determinante nulo son: i) hay una fila (columna) de 0's; ii) dos filas (columnas) son iguales; iii) una fila (columna) es múltiplo de otra o combinación lineal de otras; iv) si la matriz A es equivalente (por filas, columnas o filas y columnas) a una matriz que cumple cualquier de las condiciones anteriores.

Nota: se verifica lo mismo para las filas de una matriz

I.4.2. Cofactores y Matriz Adjunta

I.4.2.1. Desarrollo en cofactores

• Orden 1: El determinante de una matriz 1×1 , $A_1 = a$ es el propio escalar $|A| = a$ (el valor de su único elemento).

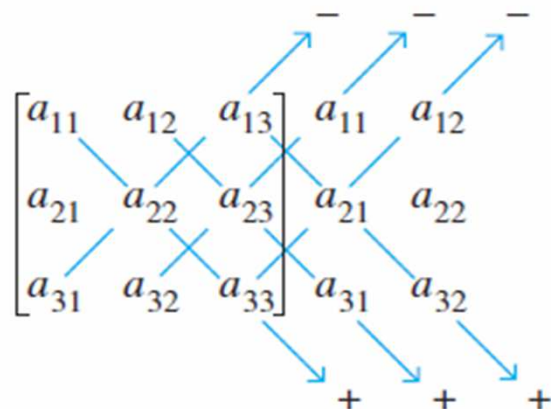
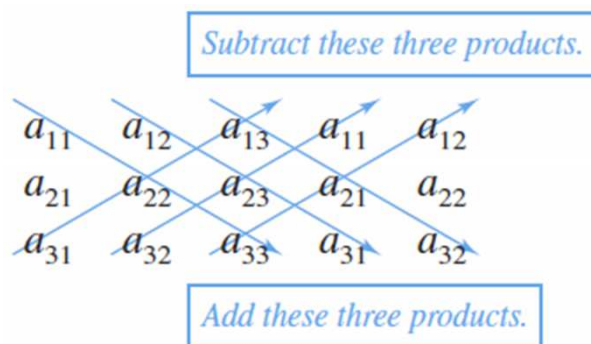
• Orden 2: Regla de Sarrus: el determinante es la diferencia de los productos de las dos diagonales de la matriz:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

• Orden 3: Regla de Sarrus: copiar $\vec{a}_1^c$ y $\vec{a}_2^c$ como nuevas columnas $\vec{a}_4^c$ y $\vec{a}_5^c$ y calcular $|A|$ como la suma de los productos de las tres diagonales directas menos la suma del producto de las diagonales inversas:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Nota: la regla de Sarrus solo es válida para determinantes de orden 2 y 3.



- Orden n : Desarrollo (en cofactores) de Laplace. Si A es una matriz de orden $n \geq 2$, $|A|$ es la suma de los n elementos de la fila i (o la columna j) multiplicados por sus correspondientes cofactores:

Desarrollo por fila i : $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$

Desarrollo por columna j : $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$

El cofactor C_{ij} viene dado por $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} (el menor del elemento a_{ij}) es el determinante de la submatriz de orden $n - 1$ obtenida al eliminar en A la fila i y la columna j , o sea el escalar $M_{ij} = |A_{ij}|$.

Nota: Los menores y cofactores de una matriz difieren a lo sumo en su signo. El signo del cofactor es positivo (negativo) en las posiciones pares (impares), o sea, donde $i + j$ es par (impar), con signo positivo en la diagonal principal. El cofactor es pues el menor con su signo.

Nota: La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) de A por los cofactores de los respectivos elementos de otra fila (columna) es cero, es decir:

Filas: $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0$ ($i \neq j$) Columnas: $a_{1i}C_{1j} + a_{2i}C_{2j} + \dots + a_{ni}C_{nj} = 0$ ($i \neq j$)

Minor of a_{21}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Delete row 2 and column 1.

Cofactor of a_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}$$

Minor of a_{22}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Delete row 2 and column 2.

Cofactor of a_{22}

$$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = M_{22}$$

Sign Pattern for Cofactors

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrix

I.4.2.2. Matriz Adjunta

Definición: Sea $A_n = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada. Se llama matriz adjunta (o de cofactores) de A a la matriz $adj(A) \equiv {}^*A = [C_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ cuyos elementos son los adjuntos de a_{ij} , C_{ij} .

$$adj(A) = {}^*A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Se verifica:

$$\bullet A \cdot {}^*A^t = {}^*A^t \cdot A = |A| \cdot I_n$$

$$\bullet |A| \cdot |{}^*A^t| = |A|^n$$

$$A[adj(A)]^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema. Si A_n es regular, es decir si $|A| \neq 0$, su inversa A^{-1} es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^*A^t = \left(\frac{1}{|A|}\right) {}^*A^t = \left(\frac{{}^*A^t}{|A|}\right) = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Nota: Para calcular la inversa no es aconsejable acudir a la expresión anterior, pues conduce a un procedimiento laborioso.

I.4.2.3. Rango de Menores

Definición. Dada $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ y elegidas las p filas $i_1, i_2, \dots, i_p$ y las p columnas $j_1, j_2, \dots, j_p$ de A ($0 < p \leq m, 0 < p \leq n$) se llama menor de orden p de A al determinante de la submatriz de A de tamaño $p \times p$ que determinan las p filas y las p columnas elegidas.

Nota: Toda matriz $A_{m \times n}$ tiene $\binom{m}{p} \binom{n}{p}$ menores de orden p .

Nota: Un menor es principal si los índices de fila y columna coinciden, o sea, si los elementos diagonales del menor proceden de la diagonal de la matriz.

Teorema. Se dice que p es el rango de menores de $A_{m \times n}$ si A tiene algún menor de orden p que no es nulo, $M_p \neq 0$ y todos los menores de A de orden mayor que p son nulos $M_k = 0, \forall k > p$, o sea, el rango de menores de A es el mayor de los menores no nulos de A . El rango de menores de A es igual al rango de la matriz A : $p = \text{rang}(A)$.

Box I.4.1. Rango de una matriz por menores

Para hallar el rango de $A_{m \times n}$:

Paso 1. Se toma un menor de orden p no nulo M_p y se le añade una fila i y sucesivas columnas j . Si todos los menores M_{p+1} que así se obtienen son nulos entonces se prescinde de la fila i , pues es una combinación lineal de las de M_p , y se repite el proceso con otra fila distinta.

Paso 2. Repetir el paso 1 hasta:

2.a) descubrir que todos los menores de orden $p + 1$ son nulos, en cuyo caso $\text{rang } A = p$.

2.b) encontrar un menor M_{p+1} no nulo. En ese caso, repetir el paso 1, partiendo de M_{p+1} y añadiendo una fila i y sucesivas columnas j hasta encontrar el menor no nulo de mayor tamaño posible.

1.4.2.4. Sistemas de Cramer

Un sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de Cramer si su matriz de coeficientes A_n es cuadrada y regular, esto es, si el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas (n ecuaciones en n variables) y su determinante es no nulo $|A| \neq 0$.

Teorema. Todo sistema de Cramer es compatible determinado. La única solución del sistema es $x_i = \Delta_i / \Delta$, donde $\Delta_i = \Delta_i(\vec{b})$ es el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo en A su columna i -ésima por la columna de términos independientes $\vec{b}$.

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + \cdots + C_{n1}b_n \\ C_{12}b_1 + C_{22}b_2 + \cdots + C_{n2}b_n \\ \vdots \\ C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + \cdots + C_{nn}b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

siendo $\Delta_i = C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \cdots + C_{ni}b_n$ (el desarrollo por cofactores de la columna i -ésima pero usando como coeficientes el vector $\vec{b}$).

Nota: La regla de Cramer proporciona una fórmula para resolver sistemas de Cramer y por tanto solo es aplicable a sistemas con solución única ya que es condición necesaria que $|A| \neq 0$. El teorema tiene más utilidad teórica que práctica y no es práctico para matrices mayores de orden 3.

Nota: Si $|A| = 0$ el teorema no dice si el sistema es o no compatible.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

1.4.3. Determinantes de matrices elementales

El efecto que tienen las operaciones elementales sobre el determinante es:

1. Operación intercambio: Si A' se obtiene de A intercambiando dos filas (o columnas) $\Rightarrow |A'| = -|A|$
2. Operación escalamiento: Si A' se obtiene de A multiplicando una fila (columna) de A por una constante $k \neq 0 \Rightarrow |A'| = k \cdot |A|$
3. Operación reemplazo: Si A' se obtiene de A sumando un múltiplo de una fila (o columna) de A a otra $\Rightarrow |A'| = |A|$

Nota: Una operación fila sobre A^t equivale a una operación columna sobre A , y viceversa. Como $|A| = |A|^t$ las operaciones columna tienen los mismos efectos en los determinantes que las operaciones fila.

Lema. Sea $E(I)$ una matriz elemental. En tal caso, $|E(I)| = \begin{cases} -1 & (\text{intercambio}) \\ k & (\text{escalamiento}) \\ 1 & (\text{reemplazo}) \end{cases}$

Si se aplica la misma operación elemental a A_n : $|A'| \equiv |E^f(A)| = |E^f(I_n) \cdot A| = |E^f(I_n)| \cdot |A|$

En general: $|E^f(A)| = |E_k^f(I_n) \cdot E_{k-1}^f(I_n) \dots E_2^f(I_n) \cdot E_1^f(I_n) \cdot A| = |E_k^f(I_n)| \cdot |E_{k-1}^f(I_n)| \dots |E_2^f(I_n)| \cdot |E_1^f(I_n)| \cdot |A|$

$$|A| = [|E_k^f(I_n)| \cdot |E_{k-1}^f(I_n)| \dots |E_2^f(I_n)| \cdot |E_1^f(I_n)|]^{-1} \cdot |E^f(A)| \equiv \frac{|E^f(A)|}{|E_k^f| \cdot |E_{k-1}^f| \dots |E_2^f| \cdot |E_1^f|}$$

Nota: Lo análogo se aplica a operaciones elementales columna (o filas y columnas).

Nota: Las condiciones que hacen a un determinante nulo son: i) hay una fila (columna) de 0's; ii) dos filas (columnas) son iguales; iii) una fila (columna) es múltiplo de otra o combinación lineal de otras; iv) si la matriz A es equivalente (por filas, columnas o filas y columnas) a una matriz que cumple cualquiera de las condiciones anteriores.

Teorema: Una matriz cuadrada A_n tiene $|A| = 0$ si es equivalente a una matriz que tenga al menos una fila (o columna) de 0's. Así, una matriz A_n es invertible (o regular) si y solo si $|A| \neq 0$ y en ese caso $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. Análogamente, A es singular (o no invertible) si y solo si $|A| = 0$.

Teorema. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. O sea, el determinante del producto es el producto de los determinantes. En general se cumple: $|A_1 \cdot A_2 \dots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k|$

1.4.4. Propiedades de los determinantes

Sean A_n y B_n dos matrices cuadradas del mismo tamaño. Se cumple:

- $|A + B| \neq |A| + |B|$ (en general)
- $|kA| = k^n \cdot |A|$
- $|A| = |A^t|$
- $|A_1 A_2 \dots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k|$
- $|AB| = |A^t B| = |AB^t| = |A^t B^t| = |BA| = |BA^t| = |B^t A| = |B^t A^t|$
- A_n es invertible (o regular) si y solo si $|A| \neq 0$, y en ese caso $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. Análogamente, A es singular (o no invertible) si y solo si $|A| = 0$.
- Si A_n es una matriz triangular su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal: $|A| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$
- Si M es una matriz triangular superior (inferior) por bloques, con bloques diagonales $A_1, A_2, \dots, A_k$ entonces $|M| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k|$
- Si M es una matriz por bloques en general no se cumple la Regla de Sarrus.

I.4.5. Algoritmo de Gauss-Jordan

Box I.4.2. Algoritmo de Cálculo de Determinante por Gauss-Jordan

Sea A_n una matriz cuadrada $n \times n$.

Paso 1. Si A tiene una fila (o columna) de ceros entonces $|A| = 0$. Si $a_{11} \neq 0$, pasar al Paso 2. Si $a_{11} = 0$ permutar las filas (o las columnas) 1 e i con lo que el determinante cambia de signo.

Paso 2. Efectuar operaciones elementales de reemplazo por fila (o por columnas) usando a_{11} como pivote para hacer ceros en el resto de la columna (o fila). Esto es, para $i = 2, 3 \dots n$ realizar la operación por filas $-(a_{i1}/a_{11}) \cdot R_1 + R_i \rightarrow R'_i$ (o la operación por columnas $-(a_{1i}/a_{11}) \cdot C_1 + C_i \rightarrow C'_i$). Con ello, no se altera el valor del determinante.

Paso 3. Repetir los Pasos 1 y 2 para a_{ii} con $i = 2, 3 \dots n$ hasta obtener una forma escalonada por filas M^f (o por columnas M^c) de A , esto es, una matriz triangular superior (inferior). Si durante el proceso se obtiene una fila (o columna) de ceros entonces $|A| = 0$. En caso contrario, $|M^f|$ (o $|M^c|$) viene dado por el producto de los elementos de su diagonal principal.

Nota: Si se desea, en lugar de la forma escalonada por filas M^f (columnas M^c), es posible llevar la matriz A a su matriz canónica de equivalencia por filas C^f (columnas C^c).

Nota: El algoritmo es válido si se aplican operaciones fila y columna en el proceso.

Nota: Aunque la forma escalonada por filas M^f (o columnas M^c) no es única y los valores de los pivotes no son únicos, el producto de pivotes sí lo es.

Nota: La reducción es más efectiva que el desarrollo en cofactores (el número de operaciones con el desarrollo en cofactores en una matriz de tamaño n crece como $n!$)

Alternativamente puede emplearse la siguiente modificación del algoritmo de Gauss-Jordan:

Box I.4.3. Algoritmo de Cálculo de Determinante por Reducción de Orden

Sea A_n una matriz cuadrada $n \times n$.

Paso 1'. Elegir un elemento $a_{ij} \neq 0$ cualquiera (preferiblemente en una fila o columna con muchos ceros).

Paso 2'. Realizar operaciones elementales por filas (columnas) usando a_{ij} como pivote para hacer ceros en el resto de posiciones de la columna (o fila) que contiene a a_{ij} . En cada operación, el determinante Δ_n cambia de la siguiente forma:

i) $[i \leftrightarrow j] \rightarrow \Delta'_n = -\Delta_n$

ii) $[k \cdot i \rightarrow i'] \rightarrow \Delta'_n = k \cdot \Delta_n$

iii) $[k \cdot j + i \rightarrow i'] \rightarrow \Delta'_n = \Delta_n$

Paso 3'. Desarrollar el determinante por la columna (o la fila) que contiene a a_{ij} . El determinante se puede escribir como $\Delta_n = a_{ij} \cdot \Delta_{n-1}$ donde $\Delta_{n-1} = C_{ij}$ es el cofactor de orden $n - 1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j .

Paso 4'. Con Δ_{n-1} se repiten los pasos anteriores hasta que se llegue a un determinante de orden 2 o 3 que se calcula trivialmente. Si durante el proceso se obtiene una fila (o columna) de ceros entonces $\Delta_n = 0$.

Order n	Cofactor Expansion		Row Reduction	
	Additions	Multiplications	Additions	Multiplications
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3,628,799	6,235,300	285	339