

*Control e Instrumentación de Procesos Químicos*

## **Tema 2 – Dinámica de procesos**

Tipos de procesos dinámicos

Funciones de transferencia

Respuesta a variaciones en la variable de entrada

Estabilidad



**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

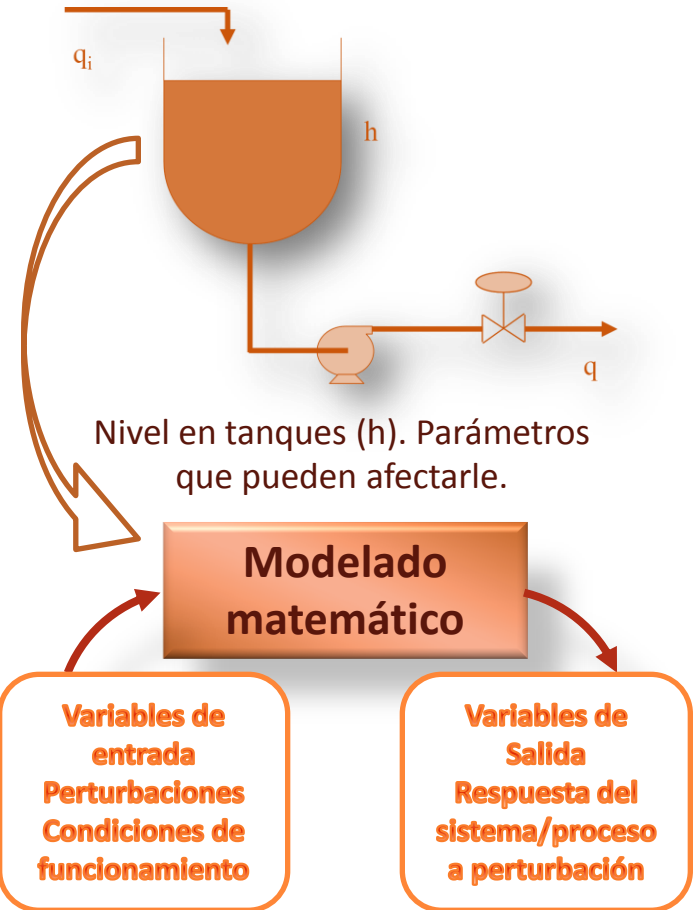
## Introducción

Un sistema de control de un proceso tiene por objeto mantener las variables del proceso en el valor requerido por el diseño de la instalación. Así pues el sistema de control habrá de variar un input del proceso para corregir una desviación con respecto a un punto de consigna provocada por una perturbación que afecte a la variable controlada.

Si varía el caudal de entrada, entonces hay una perturbación de la variable (en todo proceso puede haber un elevado número de perturbaciones por causas ajenas al proceso). Para prevenir las perturbaciones y sus consecuencias hay que dotar al sistema de un sistema de control. En el ejemplo del nivel para mantener el nivel constante, el operario puede abrir o cerrar la válvula de salida por lo que existen una serie de variables que han de conocerse:

Altura de líquido en el proceso. Para ello es necesario tener un sistema de medida de nivel.

Altura deseada de líquido. Es lo que se conoce como el punto de consigna. Si el valor deseado está en el mismo nivel que el valor real entonces no se lleva a cabo ninguna acción, pero si no es así debe manipularse la válvula para corregir la desviación.



# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...medición en el sistema de control, lo que se conoce como dinámica de procesos.

...de control de procesos

### Modelado matemático y dinámica de procesos

**Modelo matemático.** Conjunto de ecuaciones que relacionan las variables manipuladas y controladas que representan adecuadamente el comportamiento de un proceso. El modelo matemático de un proceso siempre es una aproximación de la realidad y en función del objetivo y/o del tipo de proceso va a ser distinto. La obtención de estos modelos se lleva a cabo mediante dos formas diferentes:

Mediante razonamientos científicos empleando leyes físicas y químicas tales como balances de materia y energía en estado no estacionario, modelos termodinámicos,... Tienen validez general y requieren un conocimiento profundo del proceso y de las leyes físico químicas.

Mediante la experimentación y análisis de datos. Para ello se emplean modelos estadísticos. Tienen validez limitada al rango de valores experimentados pero no requieren conocimientos del proceso.

El resultado es una función matemática, de forma genérica diferencial, lineal o no lineal en función de su complejidad, cuya utilidad recae en la posibilidad de conocer, a través de ellos y ante una variación en un input:

La variación del output y en qué dirección

El tiempo que se tarda en alcanzar el nuevo valor

La trayectoria de la variación del output en el tiempo

**Función de transferencia.** Es el cociente entre la variable de salida del proceso (respuesta del modelo matemático) entre la variable de entrada del proceso (entrada del modelo matemático, perturbación,...). Generalmente, por simplicidad, se opera con funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia que se denotan como  $G(s)$ , dominio que se alcanza al aplicar la

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Modelado matemático y dinámica de procesos

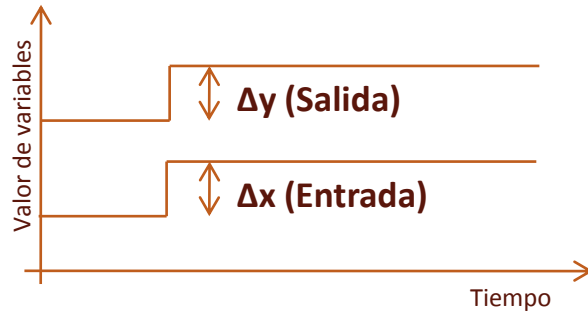
**Tipos de procesos.** Surgen de la diferente celeridad con que un proceso responde frente a una perturbación. Sin embargo, la celeridad es consecuencia de la presencia de factores de retardo. Se distinguen tres factores principales causantes de retardo:

**Capacitancia:** Se trata de la cantidad de materia o energía necesarias para realizar un cambio unitario en una variable de referencia.

**Resistencia:** Oposición al flujo de materia o energía. Se mide en unidades de cambio de potencial necesarias para producir la unidad de cambio de flujo. Este parámetro está presente en todos los sistemas pero es especialmente importante en las operaciones de cambio de calor.

**Tiempo muerto** o tiempo de transporte: Es el tiempo que ante una perturbación determinada, el sistema tarda en reaccionar. Da una idea de la inercia del proceso, es decir de la tendencia del proceso a permanecer en un estado estacionario.

**Modelos Instantáneos.** No muestran dinámica. La salida es inmediata y proporcional a la entrada.



$$Y(t) = K \cdot X(t)$$

Ejemplo: Válvula de líquido (grifo)

$$L\{Y(t)\} = K \cdot L\{X(t)\}$$

$$G(s) = \frac{L\{Y(t)\}}{L\{X(t)\}} = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$$

$$K = \frac{\Delta \text{Caudal}}{\Delta \% \text{ de apertura}}$$

Modelos de primer orden de retardo. Dinámica causada por un elemento de retardo.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

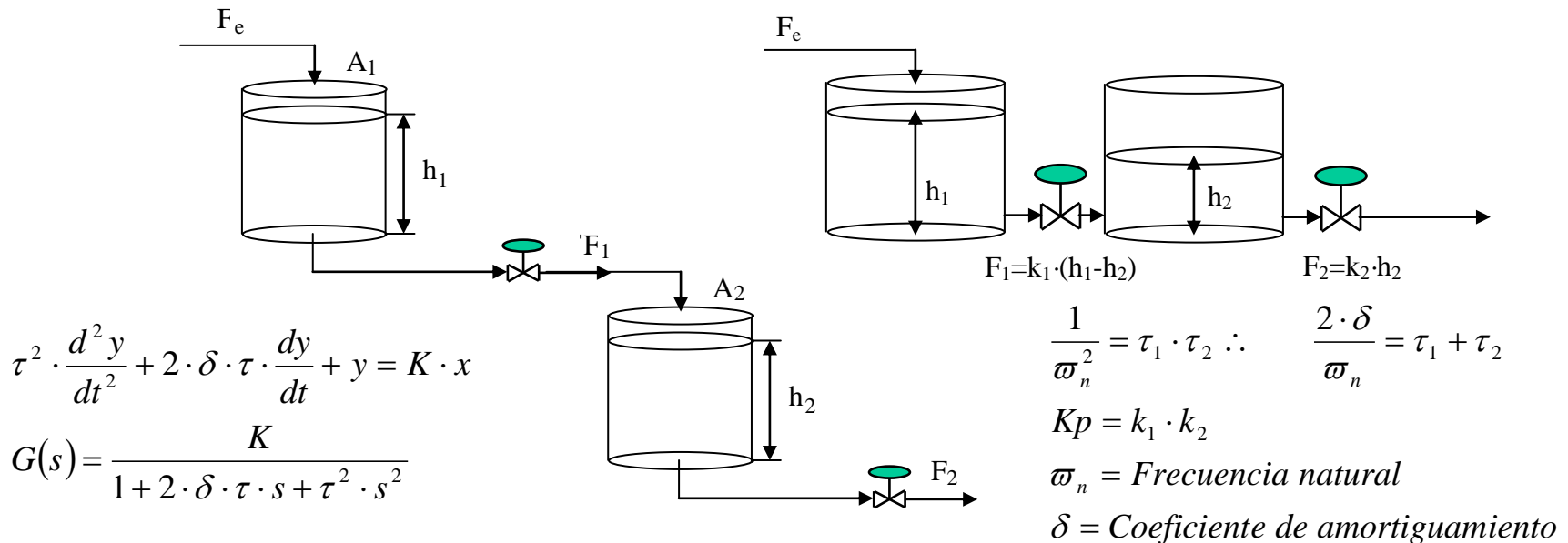
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

K u K

## Modelado matemático y dinámica de procesos

**Sistemas de segundo orden de retardo.** Surgen de la presencia de dos factores de retardo en serie, o bien interactuando cada uno de ellos (intrínsecos).



**Tiempo muerto.** Se define el tiempo muerto como el tiempo durante el cual no se observa variación en un proceso o respuesta ante un cambio en la variable de entrada. El tiempo muerto está relacionado con el transporte de materia o de energía. La mayoría de los procesos pueden ser modelados dinámicamente mediante diferentes combinaciones de capacidades (sistemas de primer orden) y tiempo muerto.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Modelado matemático y dinámica de procesos

**Sistemas multicapacitivos.** Sistemas de una o varias capacidades en serie. Los sistemas son tanto o más sobreamortiguados cuanto mayor sea el número de capacidades.

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + y = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \dots + b_n \cdot u_n$$

**Funciones de transferencia.** Relación entre las variables de entrada y salida de un determinado proceso (aplicable a modelos matemáticos). Suelen emplearse en el dominio de la frecuencia.

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + y = b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

**Definiciones.** Algunos parámetros importantes de las funciones de transferencia son:

Polos: Son los puntos de solución del denominador (ceros del denominador).

Ceros: Son los puntos de solución del numerador (ceros del numerador).



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Respuesta a variaciones en la variable de entrada

**Diagrama de bloques.** Permiten representar gráficamente el flujo de información en un modelo matemático y su integración con otros procesos y/o variables, tanto en la entrada como en la salida.



Para alimentar la función de variable de entrada a la función de transferencia, es necesaria su transformación previa con Laplace.

**Respuesta a perturbación en escalón.** Función de Heaviside (H).

Particularización en modelos de primer orden:

$$x(t) = \begin{cases} \bar{x} & t < 0 \\ \bar{x} + \Delta\bar{x} & t > 0 \end{cases}$$

$$x(s) = L\{x(t)\} = \frac{\Delta x}{s} \quad \Rightarrow \quad L\{y(t)\} = \frac{\Delta x}{s} \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot s} = \frac{\Delta x \cdot K}{(1 + \tau \cdot s) \cdot s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = K \cdot \Delta x \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

**Respuesta a perturbación en pulso.** Función delta de Dirac ( $\delta$ ).

Particularización en modelos de primer orden:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; t > 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

--

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Respuesta a variaciones en la variable de entrada

**Respuesta frecuencial.** Una respuesta será, de forma habitual frecuencial, cuando se ve perturbado por una entrada sinusoidal. Independiente del tipo de proceso del que se trate, siempre se tiene:

$$x(t) = x_0 \cdot \text{Sen}(\omega \cdot t) \quad \rightarrow \quad y(t) = y_0 \cdot \text{Sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

Donde  $y_0$  y  $\varphi$  varían con el tipo de proceso. Para su cálculo se sustituye  $G(s)$  por  $G(\omega \cdot i)$ , obteniéndose un número complejo de donde se extrae el módulo y el argumento, que se relacionan con entrada y salida de la siguiente forma:

$$A \cdot \exp(-\varphi \cdot i) = a + b \cdot i$$

$$\text{módulo} = A = \sqrt{a^2 + b^2} = \left( \frac{y_0}{u_0} \right)$$

$$\text{Argumento} = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \text{desfase}$$

$$M = \frac{A}{K} = \frac{y_0}{u_0} \cdot \frac{1}{K}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## Respuesta a variaciones en la variable de entrada

Tipo de proceso	Ecuación diferencial que lo describe	Función de transferencia	Respuesta a perturbación en escalón	Respuesta frecuencial
<b>Instantáneo</b>	$y(t) = K \cdot x(t)$	$G(s) = K$	$\Delta y(t) = K \cdot \Delta \bar{x}$	$M = 1 \varphi = 0$
<b>Primer orden de retardo</b>	$\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t)$	$G(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s}$	$\Delta y(t) = K \cdot \Delta \bar{x} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$	$M = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}}$ $\varphi = \arctan(\omega \cdot \tau)$
<b>Segundo orden de retardo (intrínseco)</b>	$\tau^2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t)$	$G(s) = \frac{K}{1 + 2 \cdot \delta \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2}$	<p>Para <math>\delta=1</math> (críticamente amortiguado)</p> $\Delta y(t) = K \cdot \Delta \bar{x} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\right)$ <p>Para <math>\delta &lt; 1</math> (subamortiguado)</p> $\Delta y(t) = K \cdot \Delta \bar{x} \cdot \left(1 + \frac{\exp\left(-\delta \cdot \frac{t}{\tau}\right)}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cdot \text{Sen}\left(\frac{t}{\tau} \cdot \sqrt{1 - \delta^2} - \varphi\right)\right)$ $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{-\delta}\right)$	$M = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$
<b>Tiempo muerto</b>	$y(t) = u(t - \theta)$	$G(s) = \exp(-\theta \cdot s)$	$y(t) = u(t - \theta)$	$M = 1$ $\varphi = -\theta \cdot \omega$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

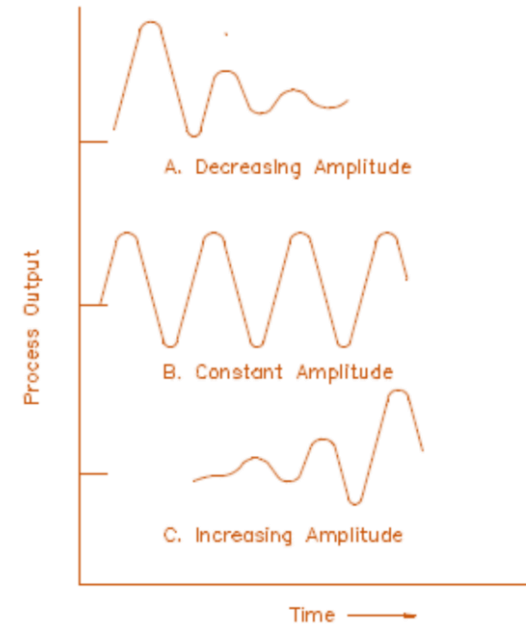
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Estabilidad

**Criterios de estabilidad.** La estabilidad de un sistema se demuestra matemáticamente mediante la descomposición en fracciones de la función de transferencia  $G(s)$  y hallando la transformada inversa de Laplace. En realidad un sistema es estable cuando, ante una entrada limitada (no infinitamente creciente) la respuesta del sistema es limitada. Para ello todos los polos de la función de transferencia de dicho sistema (raíces del denominador) han de tener una parte real negativa. El problema principal es que la resolución de los polinomios de alto grado suele ser laborioso. Por ello, Routh desarrolló un método o criterio que permite determinar si un sistema es estable o no. El criterio de Routh es un método numérico que permite determinar el número de polos inestables en un polinomio dado. En este método se genera una tabla en la que los cambios de signo en la primera columna revelan el número de polos inestables. Este método también es usado en función de parámetros por lo que permite determinar rangos de estabilidad para un parámetro  $K$ .

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} \cdots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	.....
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	.....



$$A_1 = \frac{[a_{n-1} \cdot a_{n-2}] - [a_n \cdot a_{n-3}]}{a_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{[a_{n-1} \cdot a_{n-4}] - [a_n \cdot a_{n-5}]}{a_{n-1}} \dots etc$$

$$B_1 = \frac{[A_1 \cdot a_{n-3}] - [a_{n-1} \cdot A_2]}{A_1}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$[B_1 \cdot A_3] - [A_1 \cdot B_3] \dots etc$$

Bibliografía

- Título      Process dynamics and control  
Autor        D.E. Seborg, T.F. Edgar, D.A. Mellichamp  
Editorial    Wiley, ISBN: 978-0-471-00077-8. 2003.
- Título      A real time approach to process control  
Autor        William Y. Svrcek  
Editorial    Wiley, ISBN: 978-0-470-02534-4. 2006

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70