

Bloque I: Dinámica de Fluidos

Tema 2. Ecuaciones de Conservación

1. Introducción

1.1. Enfoques de Lagrange y Euler

1.2. Caudal a través de una Superficie Elemental

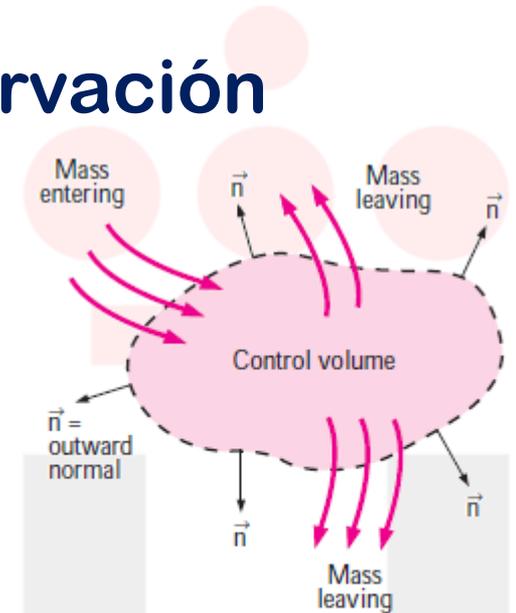
2. Leyes de Conservación

2.1. Ecuación General de Transporte de Reynolds

2.2. Conservación de la Masa: Ecuación de Continuidad

2.3. Conservación de la Cantidad de Movimiento (Momentum)

2.4. Conservación de la Energía: Ecuación de Bernoulli



$$B_{\text{net}} = B_{\text{out}} - B_{\text{in}} = \int_{\text{CS}} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Grado de Ingeniería de la Energía

Alicia García Sánchez

Universidad
Rey Juan Carlos
I

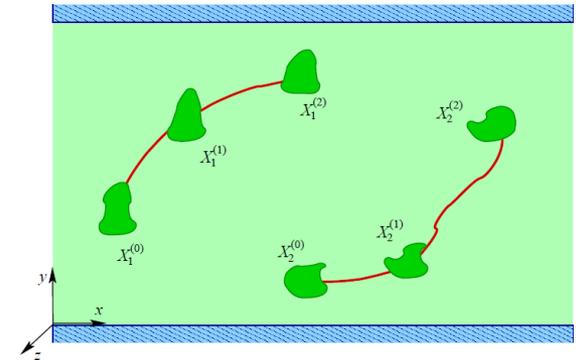
1. Introducción

Análisis LAGRANGIANO

Descripción detallada del flujo en cada punto (x,y,z) del campo fluido.

Se sigue la **huella** de la **posición** y la **velocidad** de cada partícula.

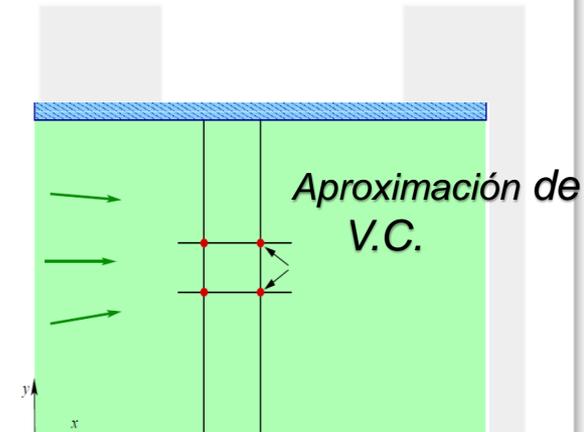
Fluido formado por *miles de millones de moléculas* (punto de vista microscópico).



Análisis EULERIANO

Se trabaja con una **región finita del espacio**, realizando un **balance** entre el **fluido que entra y que sale** de ella, y determinando los efectos netos, como la fuerza o el momento sobre un cuerpo o el cambio de energía total.

Descripción del flujo del fluido a través de un volumen finito, **volumen**



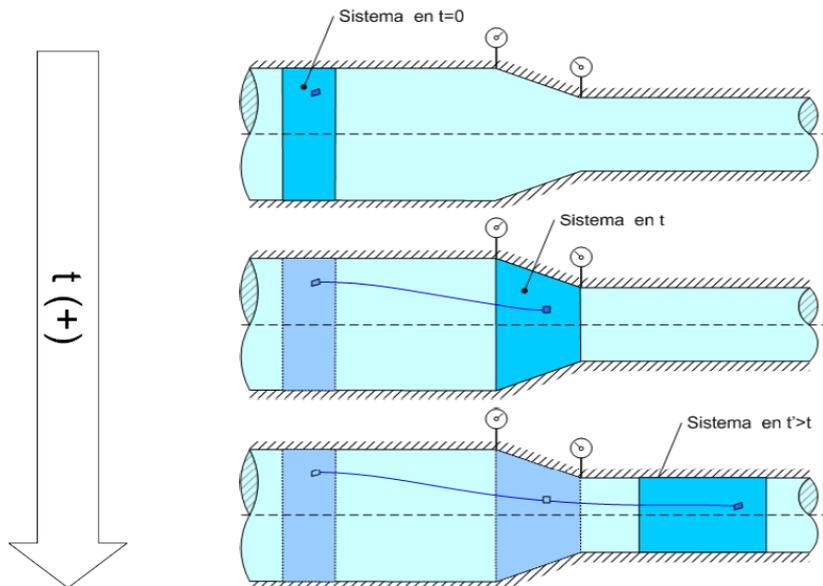
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

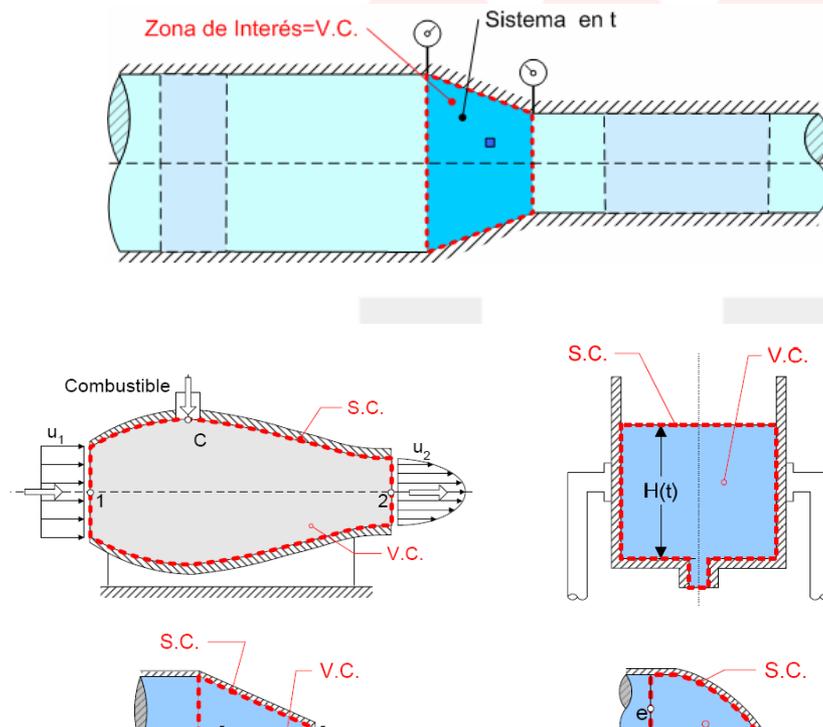
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. Introducción

Análisis LAGRANGIANO



Análisis EULERIANO



¡El Enfoque de Euler será el adoptado

Cartagena99

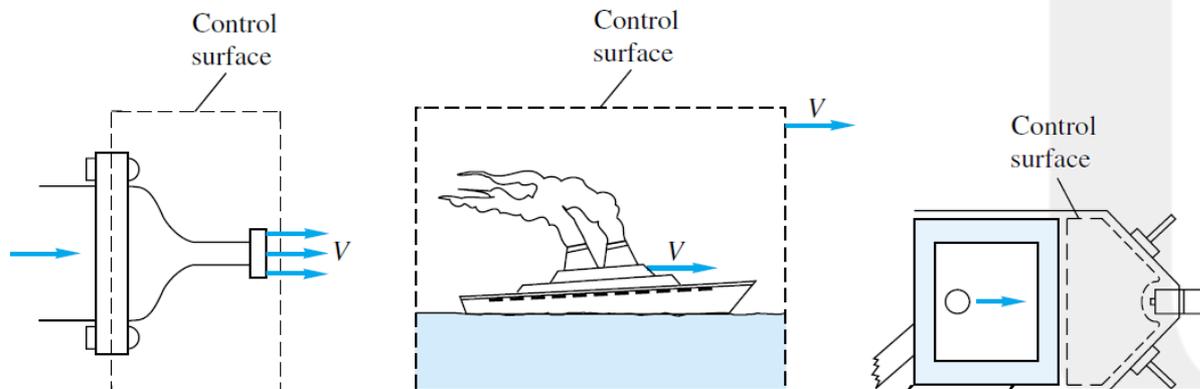
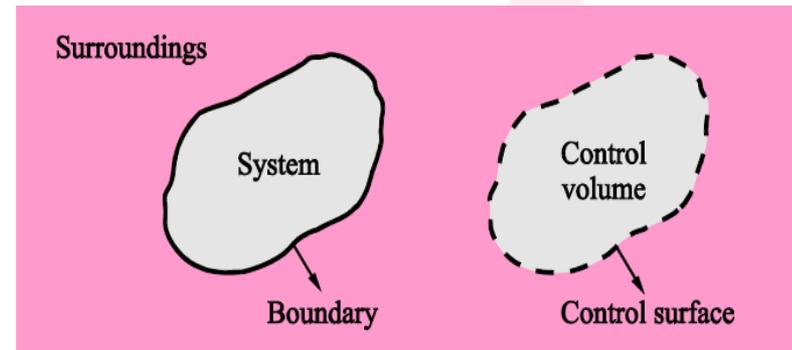
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. Introducción

Concepto de Volumen de Control

- Región del espacio, rodeada de un entorno, separados por una frontera.
- Su frontera (superficie de control) permite el paso de materia.
- Tiempo $t \Rightarrow$ cantidad de masa.
- FIJO, MÓVIL o DEFORMABLE.



Cartagena99

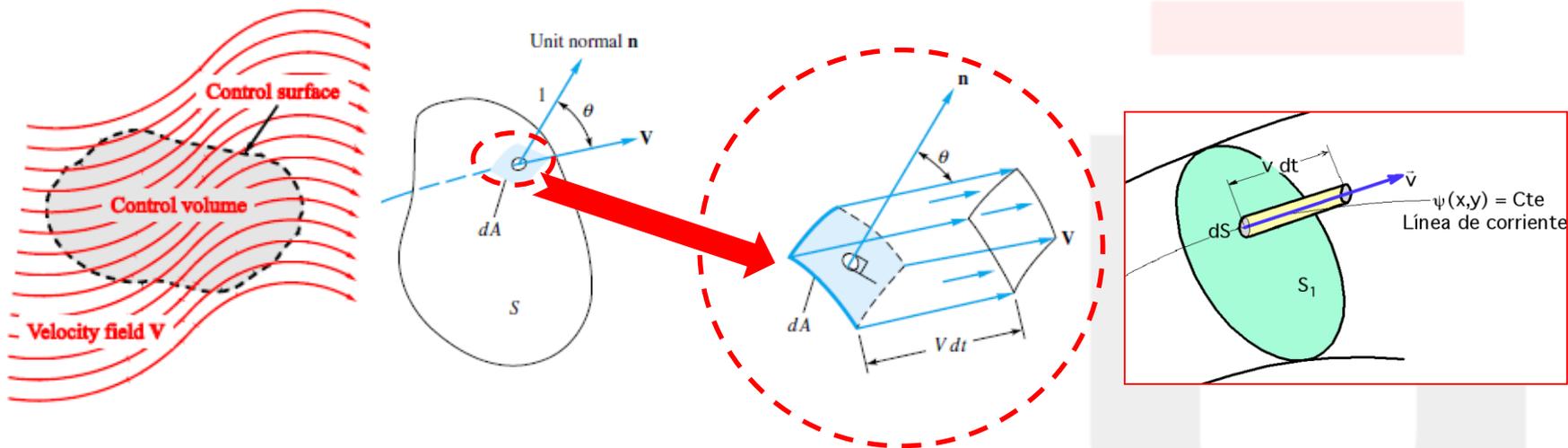
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. Introducción

Caudal a través de una Superficie Elemental

PREGUNTA: ¿Qué cantidad de **volumen o materia** pasa a través de la superficie de control por **unidad de tiempo**?



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

1. Introducción

Caudal a través de una Superficie Elemental

Velocidad del fluido que atraviesa la S.C.:

$$\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = v \cdot \cos \theta$$

Volumen de fluido que atraviesa la S.C.:

$$dV = L \cdot dS = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dt \cdot dS$$

$$dV = L \cdot dS = v \cdot \cos \theta \cdot dt \cdot dS$$

Caudal de fluido que atraviesa la S.C.:

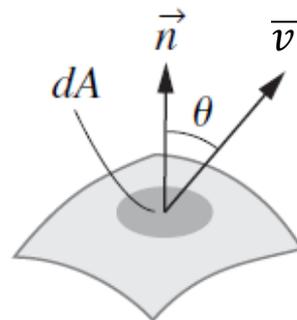
$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{v} \cdot dS = \int_S v \cdot \cos \theta \cdot dS$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos \theta = v \cos \theta$$

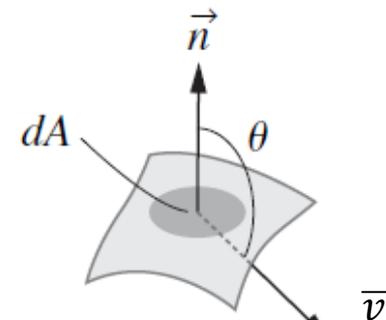
Si $\theta < 90^\circ$, entonces $\cos \theta > 0$ (flujo de salida).

Si $\theta > 90^\circ$, entonces $\cos \theta < 0$ (flujo de entrada).

Si $\theta = 90^\circ$, entonces $\cos \theta = 0$ (ningún flujo)



Flujo de salida:
 $\theta < 90^\circ$



Flujo de entrada:
 $\theta > 90^\circ$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. Introducción

Caudal a través de una Superficie Elemental

Caudal de fluido que atraviesa la S.C.:

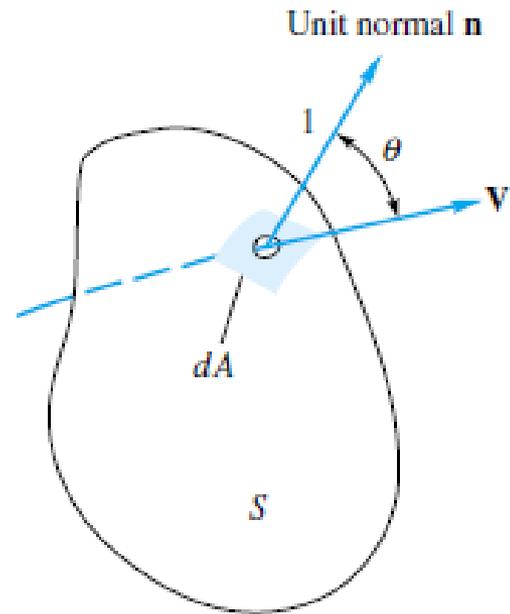
$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{v} \cdot dS = \int_S v \cdot \cos \theta \cdot dS$$

Velocidad media correspondiente a la sección S:

$$v_{media} = \frac{\int_S \vec{v} \cdot dS}{S} = \frac{Q}{S}$$

Caudal másico, m que atraviesa la S.C.:

$$m = \rho \cdot Q = \int_S \rho \cdot v \cdot dS = \int_S \rho \cdot v \cdot \cos \theta \cdot dS$$



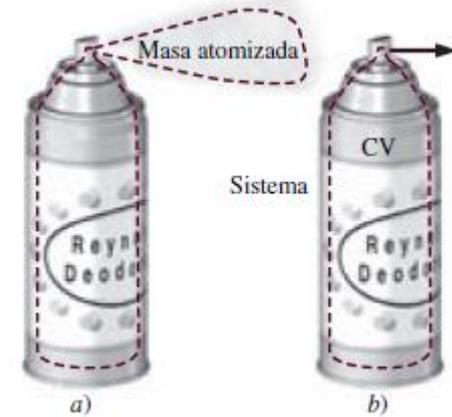
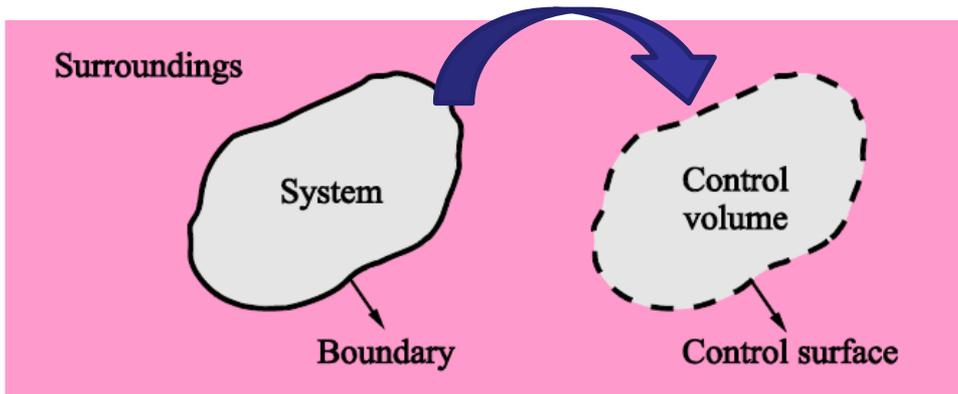
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

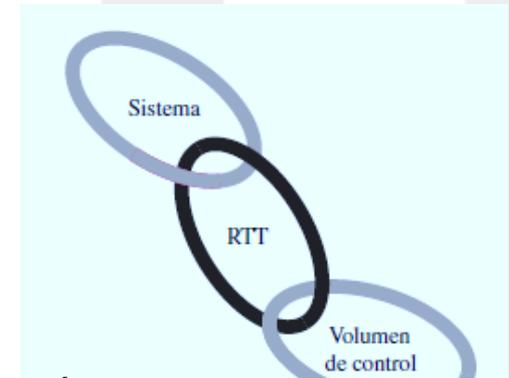
Ecuación de Transporte de Reynolds



Sistema: Cantidad de materia de masa fija
→ Termodinámica y mecánica de sólidos
Tamaño y forma pueden cambiar,
no intercambia nada de materia.

Volumen control: Región del espacio elegida para su estudio
→ Dinámica de fluidos.

Se permite entrar y salir de materia.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds

VC fijo

Zonas de entrada y salida variables en la S.C.

N: cantidad total de una propiedad cualquiera del sistema (masa, energía, cantidad de mov. lineal, etc).

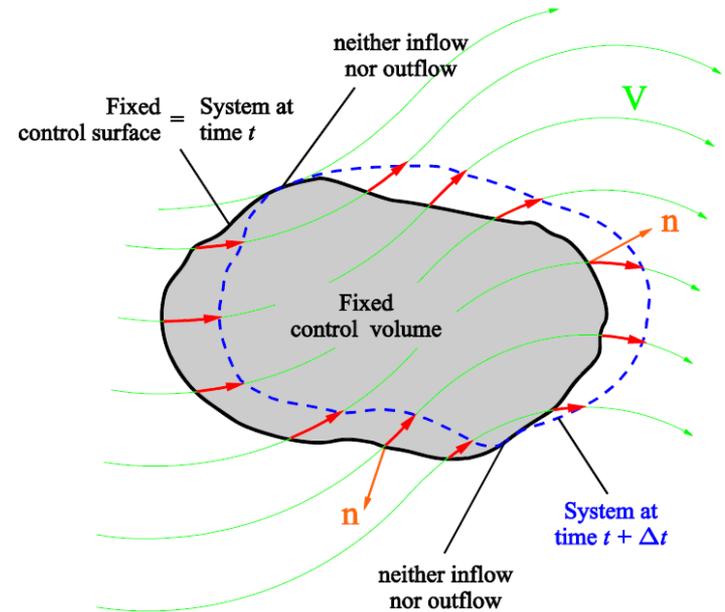
Cantidad específica: $\eta = \frac{N}{m} \rightarrow d\eta = \frac{dN}{dm}$

[cantidad por unidad de masa]

Cantidad total de **N** en el volumen de control a un tiempo t:

$$N_{VC} = \int_{VC} \frac{dN}{dm} \cdot dm = \int_{VC} \eta \cdot dm$$

$$N_{VC} = \int \eta \cdot \rho \cdot dV$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds VC fijo

$$N_{VC} = \int_{VC} \eta \rho dV$$

¿Cómo puede cambiar **N** en el volumen de control?

1. Cambios con el tiempo dentro del volumen de control



$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \eta \rho dV \right)$$

2. Salida de N a través de la superficie de control

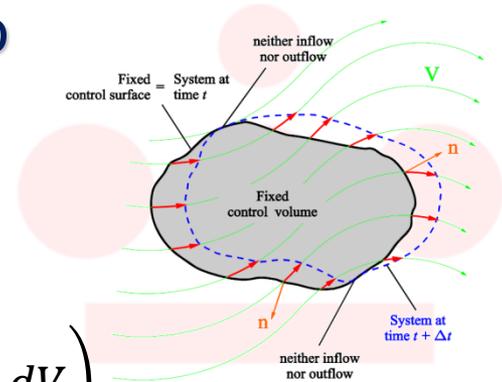


$$\int_{VC} \eta \rho \vec{v} dS_{salida}$$

3. Entrada de N a través de la superficie de control



$$\int_{VC} \eta \rho \vec{v} dS_{entrada}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds VC fijo

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \eta \rho dV \right) + \int_{VC} \eta \rho \vec{v} dS_{salida} - \int_{VC} \eta \rho \vec{v} dS_{entrada}$$

Término de flujo neto de **N**: $\int_{VC} \eta dm_{salida} - \int_{VC} \eta dm_{entrada}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = v \cdot \cos \theta \\ + \text{flujo de salida} \\ - \text{flujo de entrada} \end{array} \right\} \oint_{SC} \eta \rho \vec{v} dS$$

“La **tasa temporal de incremento de una propiedad** del sistema es igual a la tasa temporal del incremento de dicha propiedad,

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \int \frac{\partial}{\partial t} \eta \rho dV + \oint \eta \rho \vec{v} dS$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds VC fijo

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \eta \rho dV + \oint_{SC} \eta \rho \vec{v} dS$$

1. Para un **VC fijo** $d\mathbf{V} = 0$. Si N y ρ no varían con el tiempo (flujo estacionario de un fluido)

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \int_{VC} \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \eta \rho} dV + \oint_{SC} \eta \rho \vec{v} dS = \int_{VC} \eta \rho \vec{v} dS_{salida} - \int_{VC} \eta \rho \vec{v} dS_{entrada}$$

2. Si $N = \text{masa (m)}$ $\rightarrow \eta = \frac{dN}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$

3. Densidad media:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

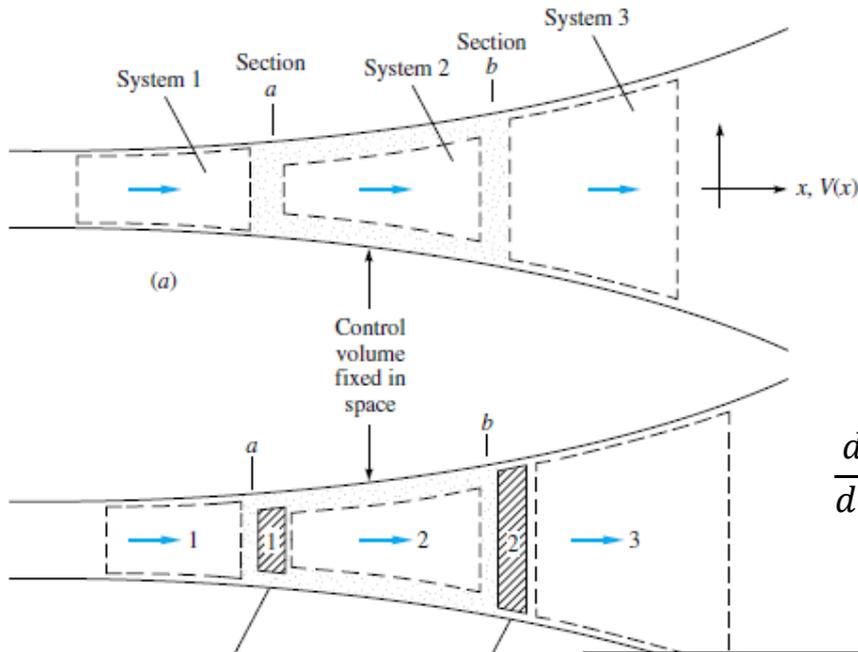
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

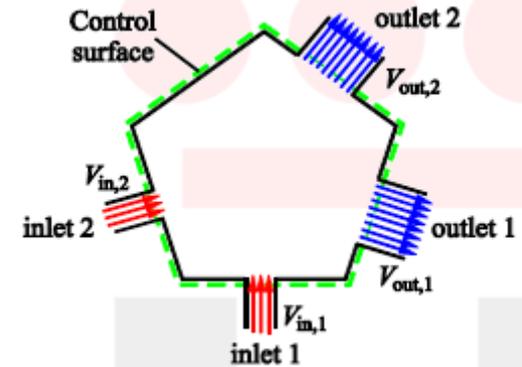
2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \eta \rho dV + \oint_{SC} \eta \rho \vec{v} dS$$



Flujo Unidimensional



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_{VC} &= \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \eta \rho dV \right) + \sum_{salidas} \eta_i \rho_i v_i S_i - \sum_{entradas} \eta_i \rho_i v_i S_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int \eta dm \right) + \sum \eta_i m_i - \sum \eta_i m_i \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds

V.C. en movimiento

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \left(\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \eta \rho dV \right) + \oint_{SC} \eta \rho \vec{v}_{relat} dS$$

- Movimiento velocidad constante:

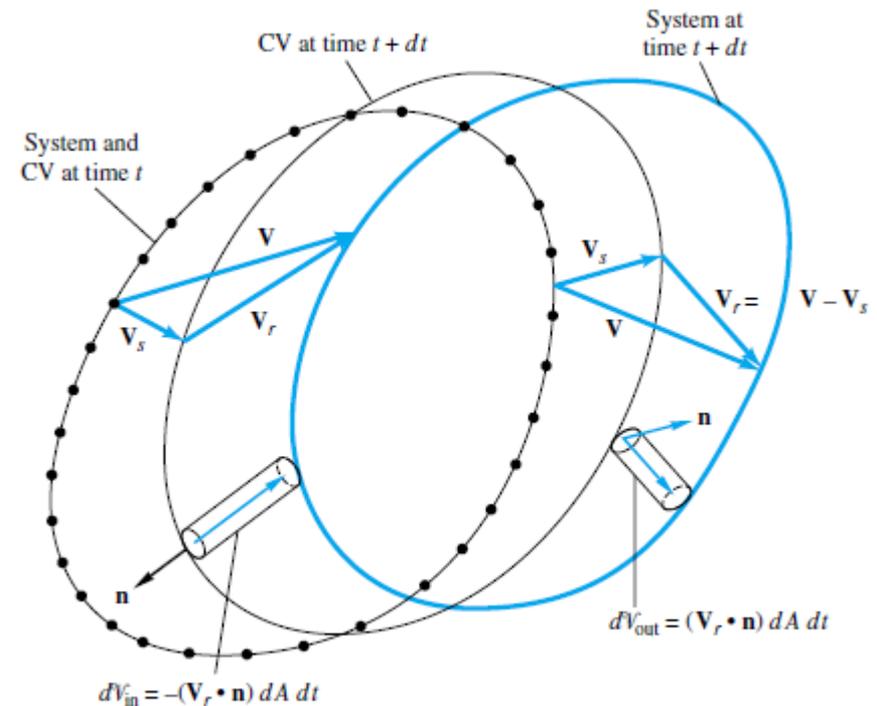
$$\vec{v}_{relat} = \vec{v}$$

- Movimiento con velocidad dependiente del tiempo:

$$\vec{v}_{relat} = \vec{v}(r, t) - \vec{v}_s(t)$$

- Movimiento con velocidad dependiente del tiempo y VC deformable:

$$\vec{v}_{relat} = \vec{v}(r, t) - \vec{v}_s(r, t)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Masa

$$[N = m] \quad \eta = \frac{m}{m} \text{ o } \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\frac{dN}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \eta \rho dV + \oint_{SC} \eta \rho \vec{v} dS \quad \rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} dS$$

“La masa dentro de un sistema permanece constante en el tiempo”.

$$\rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = \frac{dm}{dt} = 0$$

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} dS$$

• Flujo estacionario: $\frac{\partial}{\partial t} \rho dV = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_{SC} \rho \vec{v} dS = 0$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

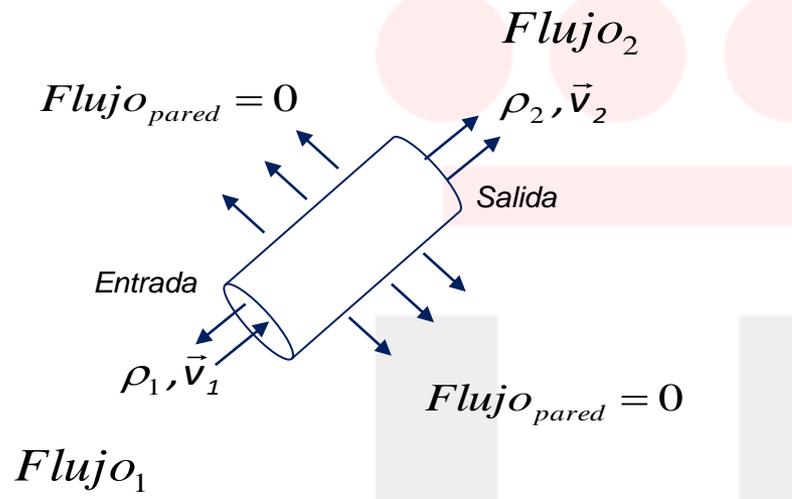
2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Masa

$$[N = m] \quad \eta = \frac{m}{m} \circ \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\oint_{SC} \rho \vec{v} dS = 0$$

- Flujo es constante, unidimensional:



$$\oint_{SC} \rho \vec{v} dS = \int_{S1} \rho_1 \vec{v}_1 dS + \int_{S2} \rho_2 \vec{v}_2 dS = \int_{S2} \rho_2 v_2 dS - \int_{S1} \rho_1 v_1 dS = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Masa

$$\oint_{SC} \rho \vec{v} dS = \int_{S_1} \rho_1 \vec{v}_1 dS + \int_{S_2} \rho_2 \vec{v}_2 dS = 0$$

$$-\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

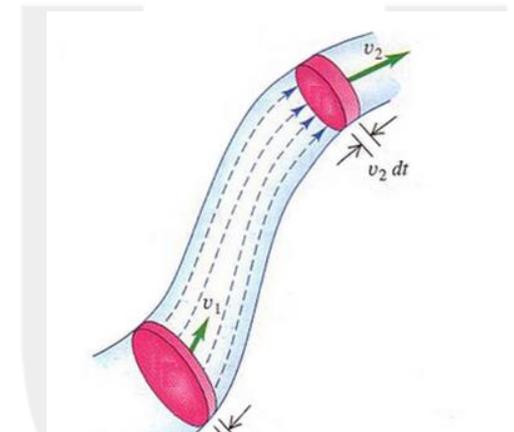
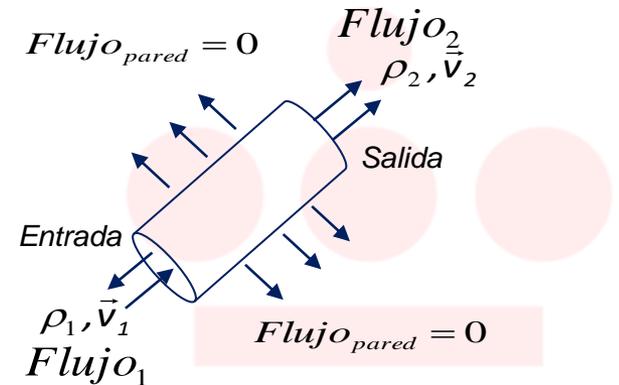
Tasa temporal de masa (caudal másico): \dot{m}

$$\dot{m} = \rho v S \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \rho Q \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_1 = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \dot{m}_2$$

Fluido **incompresible** ($\rho = \text{cte}$) y flujo estacionario $F_1 = F_2$:

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Ecuación de Continuidad



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 1

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}$$

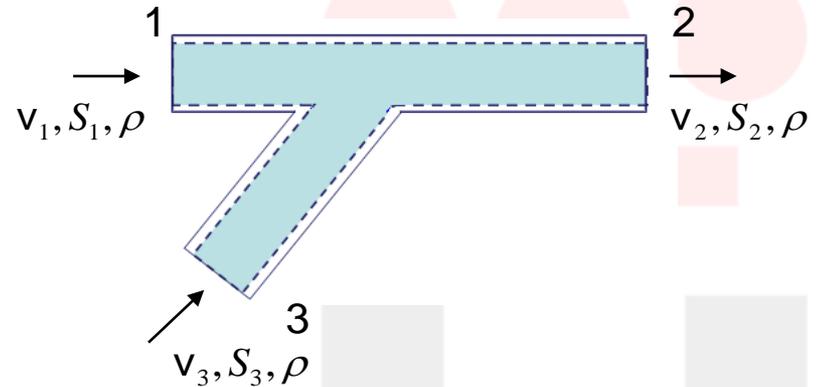
Fluido **incompresible** $\rho = \text{cte}$: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$0 = \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}$$

$$0 = \dot{m}_2 - (\dot{m}_1 + \dot{m}_3) \quad \rightarrow \quad \dot{m}_1 + \dot{m}_3 = \dot{m}_2$$

$$\rho_1 Q_1 + \rho_3 Q_3 = \rho_2 Q_2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 v_1 S_1 + \rho_3 v_3 S_3 = \rho_2 v_2 S_2$$

Como $\rho = \text{cte}$:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

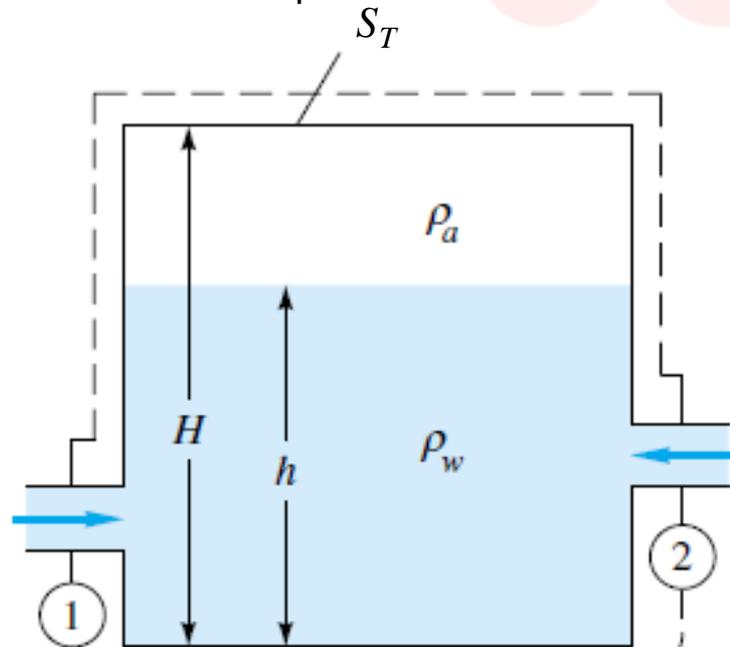
Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 2

El tanque de la figura está se está llenado con agua a 20°C a través de dos entradas unidimensionales. En la parte superior del tanque va quedando hay aire atrapado. La altura de la columna líquida es h . Obtenga una expresión para la variación temporal de la altura de la columna líquida:

$$\frac{dh}{dt} = ?$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

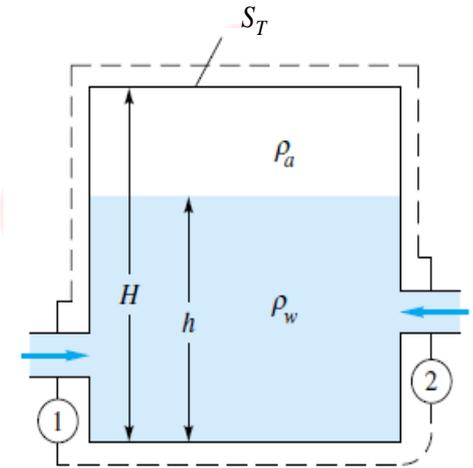
Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 2

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV - \sum_i (\dot{m})_{entrada} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV - \rho_1 v_1 S_1 - \rho_2 v_2 S_2$$

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = \rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 \quad (1)$$

$S_T \rightarrow$ área del tanque: $\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = \frac{d}{dt} [\rho_w S_T h] + \frac{d}{dt} [\rho_a S_T (H - h)]$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

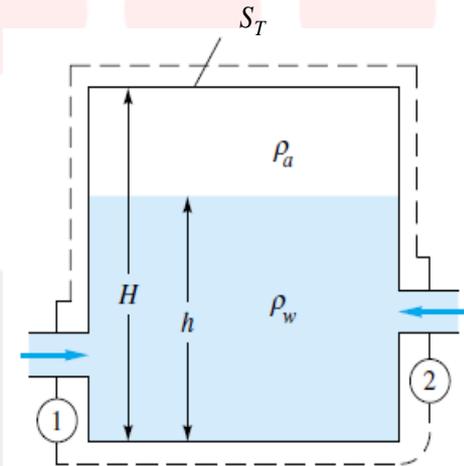
Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 2

Igualamos ecuaciones (1) y (2) :

$$\frac{d}{dt} [\rho_w S_T h] = \rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2}{\rho_w S_T}$$

Dado que: $\rho_w = \rho_1 = \rho_2$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{v_1 S_1 + v_2 S_2}{S_T} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 + Q_2}{S_T}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

SEGUNDA LEY DE NEWTON: $F = m \cdot a \rightarrow F = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Ecuación general de Reynolds:

$$[N = m\vec{v}] \quad \left[\eta = \frac{m\vec{v}}{m} \right]$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV + \oint_{SC} \eta \rho \vec{v} dS \rightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} dS$$

Segunda ley de Newton: $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Cartagena99

~~$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} dV + \oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} dS$~~
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

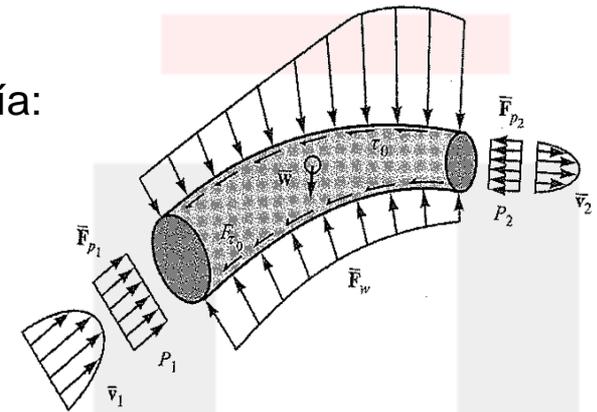
2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} dS$$

Conjunto de fuerzas que actúan sobre VC fijo para una tubería:

- Fuerza gravitatoria, \vec{W}
- Fuerzas de presión normales, \vec{F}_p
- Fuerzas de presión tangenciales, \vec{F}_t
- Fuerzas viscosas, \vec{F}_η
- Fuerzas de corte o presión en las paredes, \vec{F}_w



$$\nabla \cdot \vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{F}_\eta$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

Intercambio de momentum a la entrada y salida del VC (integral cerrada de superficie), **UNIDIMENSIONAL**

$$\oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} dS = \int_{S_1} \vec{v}_1 \rho_1 \vec{v}_1 dS + \int_{S_2} \vec{v}_2 \rho_2 \vec{v}_2 dS$$

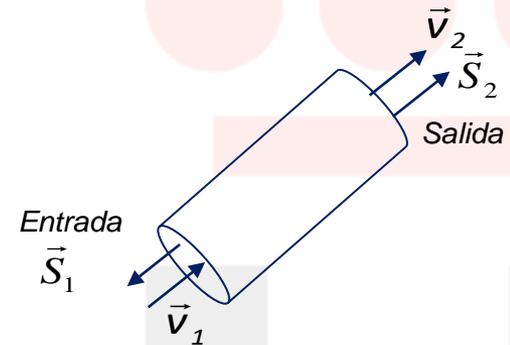
Integrando: $\oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} d\vec{S} = -\vec{v}_1(\rho_1 v_1 S_1) + \vec{v}_2(\rho_2 v_2 S_2)$

Como: $[\dot{m} = \rho v S]$

$$\oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} d\vec{S} = -\dot{m}_1 \vec{v}_1 + \dot{m}_2 \vec{v}_2$$

Definimos: $\vec{M}_i = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)$

$$\vec{M}_1 = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{entrada}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} dS$$

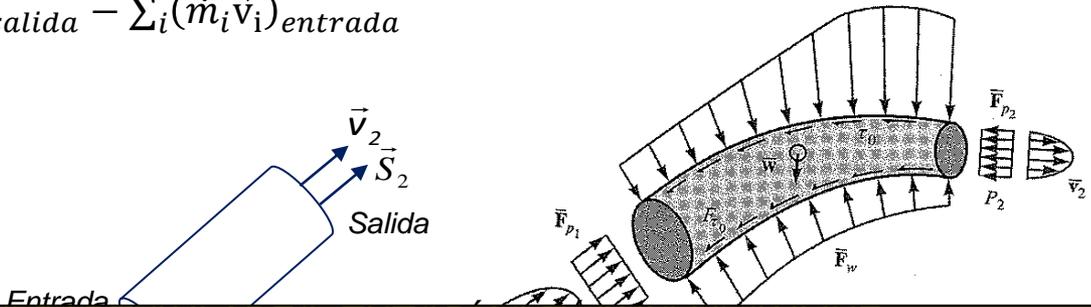
$$\oint_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} dS = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{entrada}$$

Fluido incompresible:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_r = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{entrada}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

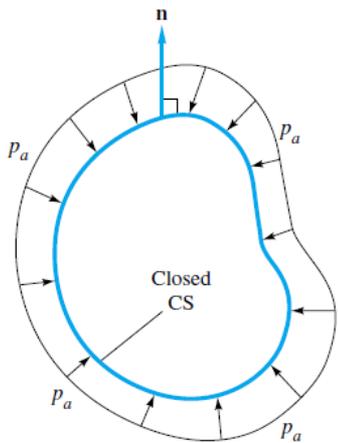
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

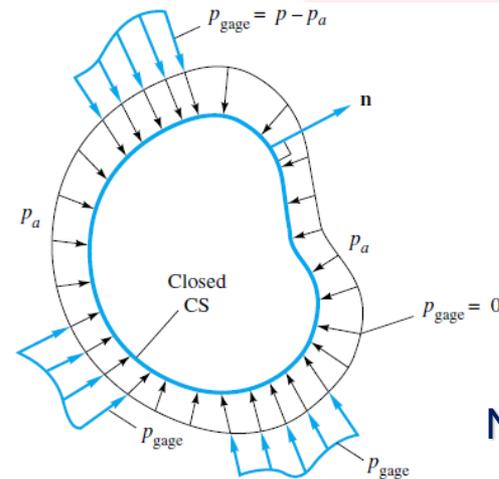
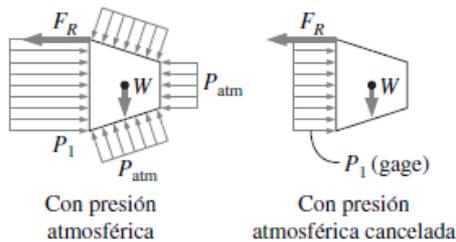
Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

Fuerzas superficiales que actúan sobre un V.C

- (1) Fuerzas debido a las presiones y tensiones de viscosidad del fluido circundante.
- (2) Fuerzas cortantes (tangenciales) sobre los cuerpos sólidos que sobresalen a través de la superficie de control.



Uniforme



No Uniforme

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal: Ejemplo 1

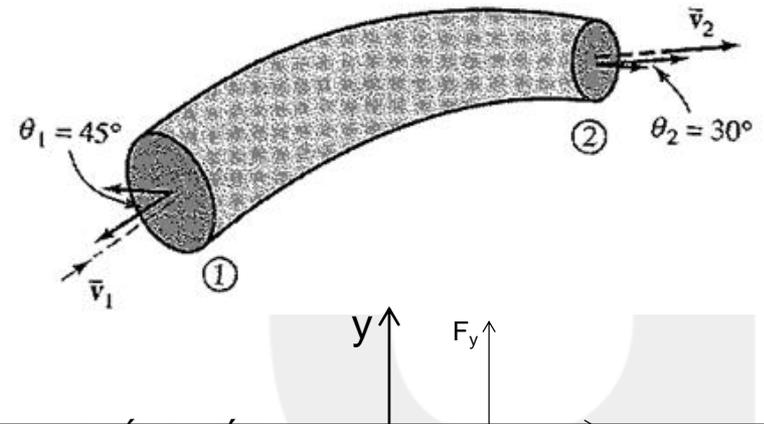
Suponga las condiciones de tubería que aparecen en la figura a través de la cual circula agua. Los radios de entrada y salida de flujo son 25 y 15 cm, respectivamente; los ángulos se señalan en la figura y el caudal es de 50 L s^{-1} . Si las presiones medias (promediadas) en las áreas de entrada y salida son 8,5 y 5,8 kPa, respectivamente; y el peso total de la tubería es 2 N. Encontrar la fuerza resultante requerida para mantener la tubería en reposo.

Consideramos al fluido como incompresible, estacionario y sin fricción: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV = 0$

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{\text{salida}} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{\text{entrada}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{\text{salida}} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{\text{entrada}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_R = \sum \vec{F}_x + \sum \vec{F}_y$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal: Ejemplo 1

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

$$x: F_x + F_{p1} \cos 45^\circ - F_{p2} \cos 30^\circ = -M_1 \cos 45^\circ + M_2 \cos 30^\circ$$

$$y: -W + F_y + F_{p1} \sin 45^\circ - F_{p2} \sin 30^\circ = -M_1 \sin 45^\circ + M_2 \sin 30^\circ$$

$$\begin{cases} F_{p1} = p_1 S_1 = 1669 \text{ N} \\ F_{p2} = p_2 S_2 = 412 \text{ N} \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 = \dot{m}_1 v_1 = \rho Q v_1 = \frac{\rho Q^2}{S_1} = 12,8 \text{ N} \\ M_2 = \dot{m}_2 v_2 = \rho Q v_2 = \frac{\rho Q^2}{S_2} = 13,48 \text{ N} \end{cases}$$

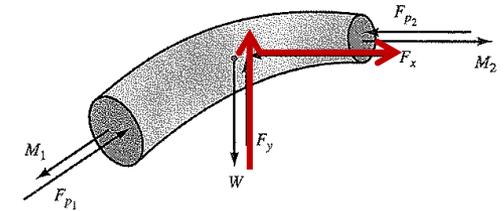
Sustituyendo en las ecuaciones de los ejes:

$$F_x = -812 \text{ N}$$

Los signos negativos indican que las direcciones subpuestas no eran correctas.

$$F_R^2 = F_x^2 + F_y^2$$

Suponemos la siguientes direcciones para los vectores F_x y F_y :



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Primera Ley de la termodinámica, expresión diferencial:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad \rightarrow \quad \delta W = -p dV \quad \rightarrow \quad W = -\int_V p dV$$

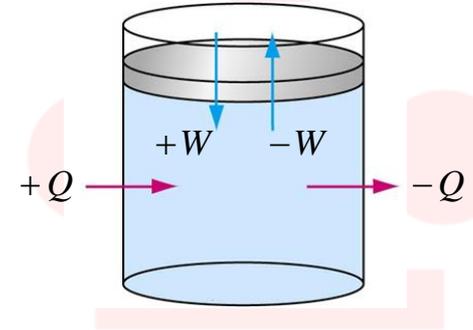
Definimos : $[U = E]$ $[N = E]$ \rightarrow $\left[\eta = \frac{E}{m} = e \right]$

Ecuación general de Reynolds:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \oint_{SC} \rho e \vec{v} dS \quad \rightarrow \quad \delta W \begin{cases} \delta W_p & \text{fuerzas de presión} \\ \delta W_s & \text{fuerzas cortantes} \end{cases}$$

Diferencial de las **fuerzas de presión**:

$$\delta W_P = -dt \int_V p dV \quad \rightarrow \quad \delta W_P = -dt \oint_{SC} p \frac{d\vec{x}}{dt} dS = -dt \oint_{SC} p \vec{v} dS$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \oint_{SC} p \vec{v} dS + \oint_{SC} \rho e \vec{v} dS$$

Simplificando:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \oint_{SC} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{v} dS$$

Despreciando fuerzas coulombianas, nucleares y posibles fuerzas viscosas → **energía interna específica** del sistema:

$$e = e_p + e_c + u^* \quad [u^*]: \text{energía intrínseca específica} \quad \rightarrow \quad e = g z + \frac{v^2}{2} + u^*$$

Sustituyendo en la ecuación de conservación:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \left(g z + \frac{v^2}{2} + u^* \right) dV + \oint_{SC} \left(p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2} + \rho u^* \right) \rho \vec{v} dS$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Flujo estacionario, integral de superficie en cada frontera:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} = \int_{S_2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2^* \right) \rho_2 v_2 dS_2 - \int_{S_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1^* \right) \rho_1 v_1 dS_1$$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \text{Entrada} \\ 2 = \text{Salida} \end{array} \right.$

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} \quad \rightarrow \quad \text{energía disponible (mecánica)} \quad \left[\frac{J}{kg} \right]$$

Consideraciones de la ecuación de energía mecánica: Habitual encontrarla en CARGA [m]

- Energía de flujo, trabajo de flujo: $\frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\gamma}$ **Carga de presión** Cuando un punto del fluido está expuesto a la atmósfera, la presión se considera nula y el término se cancela.
- Energía potencial: $g z \Rightarrow \frac{g z}{g} = z$ **Carga de elevación** Cuando los puntos de referencia están a la misma elevación, los términos se cancelan.
- Energía cinética: $\frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{v^2}{2g}$ **Carga de velocidad** La carga en la superficie de un depósito se

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Simplificaciones:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} = \int_{s_2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2^* \right) \rho_2 v_2 dS_2 - \int_{s_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1^* \right) \rho_1 v_1 dS_1$$

- Energía intrínseca constante o uniforme a través de cada área:

$$\int_S u^* \rho v dS = u^* \int_S \rho v dS$$

Recordatorio: $\left[\dot{m} = \int_S \rho v dS \right]$

- Elevación o altura → valor promediado o centroide del área Z_c .

$$\int_S g z \rho v dS = g z_c \int_S \rho v dS$$

- Presión y densidad distribuidas uniformemente a través del área (conductos de diámetro pequeños).

$$\int_S \frac{P}{\rho} \rho v dS = \frac{P}{\rho} \int_S \rho v dS$$

- Conductos de grandes diámetros, prevalece componente hidrostática importante → calcular presión promedio, líneas de corriente paralelas a la tubería y perpendiculares a la gravedad.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

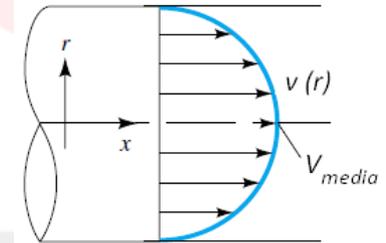
Ley de Conservación de Energía

Simplificaciones:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} = \int_{S_2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2^* \right) \rho_2 v_2 dS_2 - \int_{S_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1^* \right) \rho_1 v_1 dS_1$$

- Fronteras sólidas en conductos → NO velocidad uniforme.

$$\int_S \frac{v^2}{2} \rho v dS = \int_S \frac{v^3}{2} \rho dS \neq \frac{U^3}{2} \rho S$$



Factor de corrección α de la velocidad:

$$\alpha E_c^{real} = E_c^{media} \quad \Rightarrow \quad \alpha \frac{\rho}{2} \int_S v^3 dS = \frac{\rho}{2} U^3 S \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{U^3 S}{\int_S v^3 dS} \quad \Rightarrow \quad \int_S \frac{v^2}{2} \rho v dS = \frac{U^2}{2\alpha} \rho v S$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) \dot{m}_1 - \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2\alpha_2} \right) \dot{m}_2 = u_2^* \dot{m}_2 - u_1^* \dot{m}_1 - \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Aplicando la ecuación de continuidad: $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) \dot{m}_1 - \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2\alpha_2} \right) \dot{m}_2 = u_2^* \dot{m}_2 - u_1^* \dot{m}_1 - \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt}$$

$$\left(\frac{p_1}{g\rho_1} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g\alpha_1} \right) - \left(\frac{p_2}{g\rho_2} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g\alpha_2} \right) = \frac{u_2^* - u_1^*}{g} - \dot{q} - \dot{w}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_2^* - u_1^*}{g} - \dot{q} = h_f \Rightarrow \text{Pérdida de carga por fricción} \\ -\dot{w}_s = h_s \Rightarrow \text{Carga del eje} \end{array} \right.$$

$$\dot{q} = c_p T$$

Se ha incluido el trabajo asociado a las fuerzas viscosas en h_f .

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) - \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2\alpha_2} \right) = h_f \text{ pérdidas de carga}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Consideramos una tubería y entre los puntos de entrada y salida se coloca una bomba o una turbina.

$$\left(\frac{p_1}{\gamma_1} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g\alpha_1} \right) = \left(\frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g\alpha_2} \right) + h_f + h_{turbina} - h_{bomba}$$

Flujo estacionario para un fluido ideal incompresible

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \right)_{entrada} = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \right)_{salida} + h_{fricción} + h_{turbina} - h_{bomba}$$

Ecuación de Darcy → factor de fricción adimensional (f) función directa de dicha caída de presión:

$$\Delta P = h_f = f \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía Mecánica

Flujo ideal: estacionario, incompresible, no viscoso, sin fricción, sin agentes externos

$$\left[\alpha_1 = \alpha_2 = 1, h_{\text{fricción}} = h_{\text{turbina}} = h_{\text{bomba}} = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \right]$$

$$(1) \quad \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cte \quad [z] = m$$

Ecuación (Teorema) de Bernoulli

$$(2) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cte \quad [gz] = J / kg$$

$$(3) \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = cte \quad [\rho gz] = Pa$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70