BLOQUE II:
Tema 2
SEMÁNTICA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL. TEORÍA INTERPRETATIVA

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

Alessandra Gallinari

URJC

Contenido

Introducción

La **semántica** es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una fórmula. Permite definir la validez de una fórmula o de un razonamiento.
Los **sistemas de demostración** son sistemas formales que permiten averiguar cuándo una fórmula o un razonamiento son válidos. En el contexto de la semántica se denominan **teoría interpretativa**.
Los sistemas de demostración se suelen dividir en dos clases: **sistemas directos** y **sistemas indirectos** (o por **refutación**). Los primeros aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar. Los segundos aplican la técnica de reducción al absurdo.
Como sistema de demostración directo estudiaremos las tablas de verdad y como sistema indirecto el método de los tableaux.

Valoraciones de un lenguaje formal

Recordamos que el conjunto Σ de los símbolos $p, q, r, s, t, \ldots$ que representan las proposiciones atómicas de una fórmula se suele denominar **signatura**:

$$\Sigma = \{p, q, r, s, t, \ldots\}.$$

Definición

Sea **L** *el lenguaje de la lógica proposicional. Una* **valoración del**

Valoraciones de un lenguaje formal

a)

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

b)

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Ejemplo

Si $\Sigma = \{p, q\}$, *podemos representar las cuatro posibles valoraciones de* Σ :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \\ p & \to & 0 \\ q & \to & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \\ p & \to & 0 \\ q & \to & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \\ p & \to & 1 \\ q & \to & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \\ p & \to & 1 \\ q & \to & 1 \end{array}$$

por medio de las filas de la tabla a).
De forma similar, si $\Sigma = \{p, q, r\}$, *podemos representar las ocho posibles valoraciones de* Σ *por medio de las filas de la tabla b).*

Valoraciones de un lenguaje formal

Observación

Usando una demostración por inducción se puede verificar que si Σ *contiene* n *elementos, entonces hay* 2^n *posibles valoraciones de* Σ.

Evaluación semántica de fórmulas

Dada una valoración $v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$ nos interesa extender su definición a todas las fórmulas proposicionales definidas a partir de las proposiciones atómicas de Σ.
Esto no permitirá establecer los **valores de verdad (veritativos)** de esas fórmulas. Como es de esperar, la definición de la extensión de una valoración tiene carácter recursivo.
Nota: En lo que se sigue usaremos la forma abreviada para las fórmulas proposicionales.

Como primer paso tenemos que definir, para toda valoración $v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$, los valores que toman los conectivos lógicos.

Valores de verdad de los conectivos lógicos

Valores de verdad de los conectivos lógicos

($\neg$): Los valores de verdad del conectivo lógico negación, $v_{\neg p}$, residen en que la fórmula $\neg p$ es verdadera si y sólo si p es falsa y, recíprocamente, que $\neg p$ es falsa si y sólo si p es verdadera.

Ejemplo

Valores de verdad de los conectivos lógicos

($\wedge$): La fórmula $p \wedge q$ (p y q) es verdadera si y sólo si p y q son verdaderas simultáneamente.

Ejemplo

Sean $p =$ Luis tiene 18 años y $q =$ Maria es española. Entonces $p \wedge q =$ Luis tiene 18 años y Maria es española es verdadera sólo si es verdadero que Luis tiene 18 y es también verdadero que Maria es española.

Valores de verdad de los conectivos lógicos

($\vee$): La fórmula $p \vee q$ (p ó q), es verdadera si y sólo si p es verdadera o q es verdadera o ambas p y q son verdaderas.

Ejemplo

Sean $p =$ Luis tiene 18 años y $q =$ Maria es española. Entonces $p \vee q =$ Luis tiene 18 años ó Maria es española es falsa sólo si es falsa que Luis

Valores de verdad de los conectivos lógicos

($\rightarrow$): Para establecer el significado de la fórmula $p \rightarrow q$ (p implica q), debemos tener presente que en lenguaje natural este enunciado encierra una relación de causalidad, que no siempre aparece al utilizar este conectivo en el ámbito formal.
En el lenguaje matemático, p implica q quiere decir que si p es verdadera, necesariamente q es verdadera, o lo que es lo mismo, que es imposible que q sea falsa si p es verdadera. Por tanto el único caso en el cual $p \rightarrow q$ puede ser falsa es si p es verdadera y q es falsa.
Las fórmulas atómicas p y q son, respectivamente, el **antecedente o premisa** y el **consecuente o conclusión** de la fórmula $p \rightarrow q$.
La fórmula $q \rightarrow p$ se denomina **sentencia recíproca** de la sentencia $p \rightarrow q$, y la sentencia $\neg q \rightarrow \neg p$ **sentencia contrarrecíproca** de la sentencia $p \rightarrow q$.

Valores de verdad de los conectivos lógicos

Ejemplo

Sean $p =$ Luis tiene 18 años y $q =$ Maria es española. Entonces $p \rightarrow q$ es falsa sólo si es verdadero que Luis tiene 18 y es falso que Maria es española.

Valores de verdad de los conectivos lógicos

($\leftrightarrow$): La fórmula $p \leftrightarrow q$ (p si y sólo si q) es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo

Sean $p =$ Luis tiene 18 años y $q =$ Maria es española. Entonces $p \leftrightarrow q$ es falsa si es verdadero que Luis tiene 18 y es falso que Maria es española o si es falso que Luis tiene 18 y es verdadero que Maria es española.

Valores de verdad de los conectivos lógicos

p	q	$v_{\neg p}$	$v_{p \wedge q}$	$v_{p \vee q}$	$v_{p \rightarrow q}$	$v_{p \leftrightarrow q}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tablas de verdad

Definidos los valores de verdad de los conectivos de la lógica proposicional, el principio de recursión estructural nos permite extender una valoración a todas las fórmulas proposicionales.
En efecto, se trata de extender a toda fórmula proposicional la función valoración $v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$, respetando las definiciones de los valores de verdad de los conectivos lógicos establecidos en el anterior párrafo.
Además, la unicidad de la estructura sintáctica de cada fórmula proposicional nos garantiza que la extensión que vamos a obtener es única.

Tablas de verdad

Definición

Dada una valoración $v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$, se asocia a cada fórmula proposicional φ un único valor de verdad $(\varphi)^v \in \{0, 1\}$ de la siguiente forma:

Definición recursiva de una valoración

(At): $(\top)^v = 1$ $(\perp)^v = 0$

Construcción de una tabla de verdad

La **tabla de verdad** de una fórmula proposicional φ es una forma de representar todos los posibles valores de verdad que φ puede tomar en todas las posibles valoraciones de las proposiciones atómicas de su signatura.
La construcción de la tabla de verdad de una fórmula φ está basada en la definición recursiva de la valoración de φ. Por tanto, necesitamos seguir varios pasos para completarla:

Paso 1: Tenemos que identificar las proposiciones atómicas y los pasos que se han seguido para construir φ. Para eso podemos usar el árbol estructural ed φ.

Ejemplo

Volvamos a considerar la fórmula

$$\varphi = ((p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t))$$

Tablas de verdad

Paso 2: Siguiendo el orden de construcción de φ se escribe la primera fila de su tabla de verdad.
Para nuestro ejemplo se obtiene:

p	q	r	t	$p \to r$	$p \wedge (p \to r)$	$q \leftrightarrow t$	$(p \wedge (p \to r)) \vee (q \leftrightarrow t)$

Tablas de verdad

Paso 3: Se rellenan las columnas que se corresponden a las proposiciones atómicas con todas sus posibles valoraciones.

p	q	r	t	$p \to r$	$p \wedge (p \to r)$	$q \leftrightarrow t$	$(p \wedge (p \to r)) \vee (q \leftrightarrow t)$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1

contiene $2^4 + 1 = 17$ filas.

Tablas de verdad

Paso 4: Se rellenan todas las columnas siguiendo las valoraciones de los conectivos lógicos y, en cada fila, las valoraciones de las proposiciones atómicas.
Para nuestro ejemplo se obtiene la anterior tabla de verdad.

Modelos y contraejemplos de una fórmula.

La posibilidad de valorar fórmulas proposicionales nos permite definir las siguientes nociones fundamentales.

Definición

Se dice que una fórmula φ *es* **satisfacible bajo una valoración** v *(o que* v *es un* **modelo** *de* φ*) cuando se verifica que*

$$(\varphi)^v = 1$$

Modelos y contraejemplos de una fórmula.

Ejemplo

En la anterior tabla de verdad, las valoraciones

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \\ p & \to & 0 \\ q & \to & 0 \\ r & \to & 0 \\ s & \to & 0 \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \\ p & \to & 0 \\ q & \to & 0 \\ r & \to & 1 \\ s & \to & 0 \end{array}$$

son dos de los diez posibles modelos de la fórmula $\varphi = (p \wedge (p \to r)) \vee (q \leftrightarrow t)$.

Modelos y contraejemplos de una fórmula.

Definición

Se dice que una valoración v es un **contraejemplo** *de una fórmula φ cuando se verifica que* $(\varphi)^v = 0$.

Ejemplo

En la anterior tabla de verdad, las valoraciones

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \{0,1\} \end{array}$$

Modelos y contraejemplos de una fórmula.

Definición

Se dice que una fórmula φ *es* **satisfacible** *cuando es satisfacible bajo alguna valoración* v*. En caso contrario se dice que es* **insatisfacible**.

Ejemplo

La fórmula $\varphi = p \wedge \neg p$ *es insatisfacible, ya que* p *y* $\neg p$ *no pueden ser verdaderos a la vez.*

Observación

Las definiciones anteriores se pueden extender a un conjunto de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ *pidiendo que la satisfacibilidad de* Φ *sea la satisfacibilidad simultánea de todas las fórmulas que lo definen.*
Entonces,
1) Φ *es satisfacible si y sólo si* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ *es satisfacible.*
2) Φ *es insatisfacible si y sólo si* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ *es insatisfacible.*

Modelos y contraejemplos de una fórmula.

Ejemplo

Sea $v(p) = 0,\ v(q) = 1,\ v(r) = 1$ *una valoración del conjunto* $\{p, q, r\}$.
Entonces v *es un modelo del conjunto de dos fórmulas* $\Phi_1 = \{(p \to q) \wedge r,\ q \wedge r\}$ *y es un contraejemplo del conjunto*

Tautologías, contingencias y contradicciones

Definición

Sea φ una fórmula proposicional construida a partir de un conjunto $\Sigma = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ de proposiciones atómicas.

1. *Se dice que la fórmula φ es* **lógicamente válida** *o una* **tautología** *cuando es verdadera bajo cualquier valoración, es decir, si $v \models \varphi$ para toda valoración v de Σ.*
2. *Se dice que φ es una* **contradicción** *cuando es falsa bajo cualquier valoración, es decir, si toda valoración v de Σ es un contraejemplo de φ. Por tanto una contradicción es una fórmula insatisfacible.*
3. *Se dice que φ es una* **contingencia** *cuando entre las valoraciones de Σ existen al menos un modelo y al menos un contraejemplo de φ.*

Tautologías, contingencias y contradicciones

Ejemplos

1) Por definición,

$$\begin{array}{ll} \top & \textit{es una tautología y} \\ \bot & \textit{es una contraddicción.} \end{array}$$

2) Para toda fórmula φ

Tautologías, contingencias y contradicciones

Ejemplos

3) Usando una tabla de verdad se puede verificar que vale la ley conmutativa para el conectivo $\wedge$, *es decir, que*

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

es una fórmula lógicamente válida.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

4) La tabla de verdad de $\varphi = (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$ *nos indica que* φ *es una contingencia.*

Consecuencia lógica

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Definición

Se dice que una fórmula φ *es* **consecuencia lógica** *de un conjunto finito de fórmulas* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\}$ *si todo modelo* v *del conjunto* Φ *es un modelo de la fórmula* φ, *es decir, si*

$$v \models \Phi \qquad \textit{implica que} \qquad v \models \varphi.$$

Consecuencia lógica

Definición

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas proposicionales y* φ *una fórmula. Se define* **deducción** *o* **razonamiento** *a la fórmula*

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi).$$

Para distinguir las premisas del conjunto Φ de la conclusión φ, un razonamiento se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

Consecuencia lógica

Observación

Decir que $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi)$ *es una tautología significa que es imposible que las fórmulas de* Φ *tengan todas el valor de verdad 1 y* φ *tenga valor 0. Por tanto* $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi)$ *es una tautología si y sólo si* Φ *implica lógicamente a* φ.
Por el otro lado, una fórmula φ *es siempre consecuencia lógica de un cualquier conjunto de fórmulas* Φ *insatisfacible.*

Definición

Consecuencia lógica

Observación

Observar que, según la definición anterior, un razonamiento $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi)$ es correcto si y sólo si es una tautología.

Ejemplos

1) El razonamiento (Modus ponens)

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

es válido ya que $(p \wedge (p \to q)) \to q)$ es una tautología.
2) Todas las implicaciones de la siguiente tabla son razonamientos correctos.

Consecuencia lógica

$\neg\neg p \models p,$	Ley de la doble negación
$(p \wedge q) \models p$ $p \models (p \vee q)$	Leyes de simplificación
$(p \to q) \models (\neg q \to \neg p)$	Ley de contraposición
$((p \to q) \wedge (q \to r)) \models (p \to r)$	Ley transitiva de $\to$
$((p \wedge q) \to r) \models (p \to (q \to r))$	Ley de exportación
$(p \wedge (p \to q)) \models q$	Modus ponens

Equivalencia de fórmulas

En este apartado vamos a estudiar el concepto de equivalencia lógica entre fórmulas. Veremos que la equivalencia de fórmulas es una relación binaria de equivalencia. Por tanto, dos fórmulas equivalentes pertenecen a una misma clase de equivalencia lógica.

Definición

Sean φ y ψ dos fórmulas proposicionales. Se dice que φ **equivale lógicamente** *a ψ si la fórmula proposicional $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es una tautología. Si φ y ψ son equivalentes se escribe $\varphi \equiv \psi$.*

Observación

Se sigue de la definición que si φ y ψ son dos fórmulas equivalentes, entonces **tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier valoración**.

Equivalencia de fórmulas

Ejemplo

Vamos a verificar la siguiente importante equivalencia lógica, llamada **interdefinición***:*

$$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q).$$

El único caso en el cual $(p \to q)$ es falsa es cuando p es verdadera y q

Equivalencia de fórmulas

Observación

Recordamos que una relación binaria R sobre un conjunto no vacío A se dice de equivalencia si es:
Reflexiva: para todo elemento a del conjunto A, $R(a,a)$ es verdadera,
Simétrica: para todo par a y b de elementos de A,
$R(a,b) \to R(b,a)$ es verdadera.
Transitiva: para toda terna a, b y c de elementos de A,
$(R(a,b) \wedge R(b,c)) \to R(a,c)$ es verdadera.

Se puede demostrar que en el conjunto $\mathbf{L}$ de las fórmulas bien construidas, la relación

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{si y sólo si} \quad (\varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{es una tautología})$$

es una relación de equivalencia.

Equivalencia de fórmulas

A continuación vamos a ver como se comporta la relación de equivalencia lógica entre fórmulas proposicionales respecto a sus subfórmulas.

Definición

Supongamos que ψ_1 sea una subfórmula de una fórmula φ. Si ψ_2 es una fórmula, indicaremos con el símbolo $\varphi[\psi_1/\psi_2]$ a la nueva fórmula que se obtiene substituyendo (reemplazando) cada ocurrencia de la fórmula ψ_1 en φ por la fórmula ψ_2.

Ejemplo

Equivalencia de fórmulas

Teorema

(Teorema de sustitución) *Sea* ψ_1 *una subfórmula de* φ*. Si* ψ_2 *es una fórmula tal que* $\psi_1 \equiv \psi_2$*, entonces* $\varphi[\psi_1/\psi_2] \equiv \varphi$*.*

Ejemplo

Sean $\varphi = (p \to q) \wedge (r \vee (p \to q))$, $\psi_1 = p \to q$ *y* $\psi_2 = \neg p \vee q$ *las fórmulas proposicionales del ejemplo anterior. Sabemos que* $\psi_1 \equiv \psi_2$ *por interdefinición. Por lo tanto, sustituyendo* ψ_1 *por* ψ_2 *en* φ*, se obtiene la nueva fórmula*

$$\varphi[\psi_1/\psi_2] = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee (\neg p \vee q)),$$

que, por el teorema de sustitución, es equivalente a la fórmula φ*.*

Equivalencia de fórmulas

$\varphi \wedge \top \equiv \varphi \qquad \varphi \wedge \bot \equiv \bot$ $\varphi \vee \top \equiv \top \qquad \varphi \vee \bot \equiv \varphi$	**Leyes de Identidad**
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$	**No contradicción**
$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$	**Tercio excluso**
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	**Idempotencia**
$\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_1 \qquad \varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \varphi_1$	**Absorción**
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1 \qquad \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$ $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_1)$	**Conmutatividad**
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	**Asociatividad**
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$	**Distributividad**

Refutación

Los métodos de demostración por refutación pertenecen a los sistemas de demostración indirectos que, como ya comentamos, son más modernos que los métodos de demostración axiomáticos y más adecuados para su automatización.
Estos métodos nos proporcionan así una nueva forma de verificar la validez de fórmulas y de razonamientos.
Un ejemplo de sistema de demostración por refutación es la teoría de los tableaux, que vamos a estudiar en las siguientes secciones.
Vamos ahora a ver cómo se pueden emplear métodos indirectos para verificar la validez de una fórmula o de un razonamiento.

Refutación

Procedimiento por reducción al absurdo de demostración de la validez de una fórmula φ.

Recordamos que:

Una fórmula φ **es una tautología si y sólo si su negación** $\neg\varphi$ **es una contradicción (insatisfacible)**.

Si queremos usar un método de reducción al absurdo (o refutación) para

Refutación

Ejemplo

Si queremos demostrar que la fórmula

$$\varphi : \neg(p \wedge (p \vee q)) \vee p$$

es una tautología, podemos usar una razonamiento por reducción al absurdo. Se trata de suponer que exista un modelo para $\neg\varphi \equiv (p \wedge (p \vee q)) \wedge \neg p$ *y llegar a un absurdo.*
Ahora, $\neg\varphi \equiv (p \wedge (p \vee q)) \wedge \neg p$ *es verdadera si y sólo si* $p \wedge (p \vee q)$ *y* $\neg p$ *son verdaderas. De la primera condición se deduce que* p *es verdadera y de la segunda que* p *es falsa. Así que* p *tendría que ser verdadera y falsa al mismo tiempo y esto es imposible.*

Refutación

Procedimiento por reducción al absurdo de demostración de la validez de un razonamiento.

El siguiente teorema afirma que la deducción $\Phi \to \varphi$ es una tautología (una implicación lógica) si y sólo si no pueden ser simultáneamente verdaderas todas sus premisas y la negación de su conclusión:

Teorema

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$ *un conjunto finito de fórmulas proposicionales*

Observación

Se puede notar que, por interdefinición, la fórmula $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ *es equivalente a la fórmula* $(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \vee \varphi)$. *Por tanto, su negación es equivalente a la fórmula*

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \wedge \neg(\varphi)).$$

Se sigue que el teorema anterior afirma que el razonamiento $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ *es válido (es una tautología) si y sólo si su negación* $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \wedge \neg(\varphi))$ *es insatisfacible (una contradicción). Simplemente se está aplicando el método de reducción al absurdo para demostrar la validez de la fórmula* $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$, *que es un razonamiento.*

Ejemplo

Por definición de implicación lógica, para verificar que $p \models (q \rightarrow p)$, *hace falta demostrar que la fórmula* $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ *es una tautología. Aplicando el teorema anterior (el método de refutación), es suficiente verificar que la fórmula* $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ *es insatisfacible (es una contradicción).*
Para toda valoración tal que $\neg(q \rightarrow p)$ *es falsa,* $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ *es falsa.*

Definición de los tableaux

Durante el estudio de los tableaux semánticos descubriremos que la verdadera naturaleza de las reglas que los definen es sintáctica y que, por tanto, la presentación semántica (y no sintáctica) de la teoría de los tableaux tiene su principal justificación en su mayor simplicidad y claridad.
Los **tableaux semánticos** se basan sobre el método de reducción al absurdo y **son un procedimiento sistemático para verificar si una fórmula es insatisfacible (una contradicción).**
Dada una implicación $\varphi \rightarrow \psi$, su negación $\varphi \wedge \neg\psi$ es insatisfacible si y sólo si $\varphi \rightarrow \psi$ es una implicación lógica.
Más en general, si una fórmula es insatisfacible (una contradicción), su negación es una tautología y, por tanto, **un tableau permite averiguar si una fórmula es lógicamente válida (una tautología)**.

Definición de los tableaux

Además, en muchos casos los tableaux son más eficientes que las tablas de verdad (donde para una signatura formado por n proposiciones atómicas tenemos 2^n posibles valoraciones), proporcionan una teoría para programar herramientas de demostración automática y tienen una extensión natural a la lógica de predicados de primer orden.

Estudiaremos otras dos aplicaciones de la teoría de los tableaux

Fórmulas conjuntivas y disyuntivas

Antes de poder definir la teoría de los tableaux semánticos, necesitamos profundizar en el análisis semántico de las fórmulas proposicionales.

Se puede demostrar que toda fórmula proposicional es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.
Esta propiedad se suele expresar diciendo que el conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es un conjunto **adecuado** de conectivos para la lógica proposicional.

Fórmulas conjuntivas y disyuntivas

El anterior resultado justifica las siguientes definiciones, que nos permiten clasificar más fácilmente las fórmulas proposicionales:

Definición

(Fórmulas conjuntivas y disyuntivas)
Si una fórmula proposicional α *es equivalente a una conjunción de otras dos fórmulas más sencillas,* $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$, *diremos que es una* **fórmula conjuntiva** *(de la categoría* α*).*
Si una fórmula proposicional β *es equivalente a una disyunción de otras*

Fórmulas conjuntivas y disyuntivas

Usando las equivalencias lógicas estudiadas, podemos recoger en la siguiente tabla todas las posibles fórmulas conjuntivas, disyuntivas y simplificables.

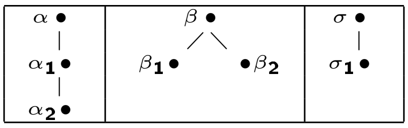
Fórmulas conjuntivas			Fórmulas disyuntivas		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \to \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\neg(\varphi \to \psi)$	$\neg(\psi \to \varphi)$

Fórmulas simplificables	
σ	σ_1
$\neg\top$	$\bot$
$\neg\bot$	$\top$
$\neg\neg\varphi$	φ

Cuadro: Fórmulas reducibles

Fórmulas conjuntivas y disyuntivas

Usando árboles con raíz, podemos ahora representar las fórmulas reducibles de la tabla anterior por medio del siguiente esquema:



Cuadro: Esquema de reducción de fórmulas

que se puede interpretar de la siguiente manera:

que ser verdadera.

Fórmulas conjuntivas y disyuntivas

Por tanto, las fórmulas α, β y σ que aparecen como etiquetas de las raíces de los árboles de la tabla (5) tendrán valor 1 si asignamos valor 1 a las fórmulas que ocupan los demás vértices.

Observación

El hecho de que toda fórmula proposicional es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos $\neg$, $\wedge$ *y* $\vee$ *implica que* **toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula conjuntiva, a una fórmula disyuntiva o es simplificable**.

Fórmulas conjuntivas y disyuntivas

Ejemplo

Sea

$$\varphi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$$

la fórmula proposicional que se quiere reducir. La regla de interdefinición nos permite reescribir nuestra fórmula de forma equivalente como una fórmula disyuntiva

Tableaux semánticos

Tableaux semánticos Dado un conjunto finito de fórmulas proposicionales Φ, queremos asociar a este conjunto un árbol con raíz que nos permita determinar fácilmente propiedades semánticas del conjunto Φ. Este árbol será el tableau asociado a Φ.

Tableaux semánticos

En este capítulo necesitamos ampliar un poco la terminología asociada al concepto de árbol con raíz.

Definición

1) Recordemos que una **rama** *de un árbol con raíz es un cualquier camino simple que no pueda prolongarse a otro más largo.*
2) Un árbol con raíz es **binario** *si todos sus vértices no tienen más que dos hijos.*
3) Un **árbol de fórmulas** T *es cualquier árbol con raíz binario que*

Tableaux semánticos

Antes de definir formalmente el método de los tableaux, vamos a ver un ejemplo de como se construye un tableau asociado a un razonamiento.

Ejemplo

(Ejemplo de construcción de un tableau asociado a un razonamiento)
Consideramos el razonamiento:
1) Si quiero comer fruta y hay una frutería cerca, entonces soy feliz.
2) No soy feliz.
3) Quiero comer fruta.
Por tanto,
4) No hay una frutería cerca.

Sean p *= quiero comer fruta,* q *= hay una frutería cerca y* r *= soy feliz.*
El razonamiento anterior será válido si $\{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p\} \models \neg q$.

Ejemplo

Ya que los tableaux usan el método de refutación, podemos afirmar la validez del razonamiento anterior si demostramos que la fórmula

$$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge p \wedge \neg\neg q$$

Ejemplo

De forma equivalente, tenemos que verificar que el conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{p \wedge q \to r, \neg r, p, \neg\neg q\}$$

es insatisfacible.

Conviene siempre transformar las fórmulas de Φ en fórmulas equivalentes, que contengan sólo conectivos del conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$:

$$p \wedge q \to r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r,$$

$$\neg\neg q \equiv q.$$

Ahora empezamos a construir un árbol de fórmulas T_0 *con la* **regla de inicialización** *que consiste en dibujar un primer árbol con una única rama cuyos vértices están etiquetados por las fórmulas de nuestro conjunto* Φ.

Ejemplo

T_0 *es nuestro tableau inicial:*

$\bullet$ $\neg p \vee \neg q \vee r$

|

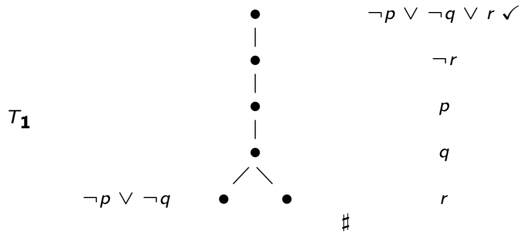
$\bullet$ $\neg r$

T_0 |

Tableaux semánticos

Ejemplo

Ahora intentamos simplificar las fórmulas anteriores y obtenemos un nuevo tableaux T_1, que es una extensión del anterior. En T_1, marcamos con el símbolo $\checkmark$ las fórmulas que hemos reducido y **cerramos** *con el símbolo $\sharp$ aquellas ramas que contienen un conjunto de fórmulas insatisfacible:*

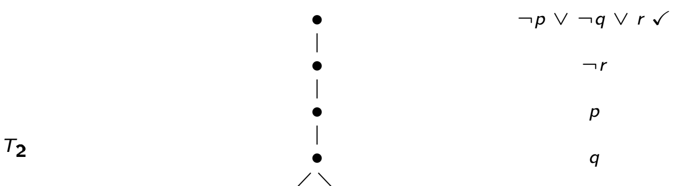


Hemos cerrado la rama derecha de T_1 que contiene las fórmulas $\neg r$ y r, ya que esto quiere decir que el conjunto de fórmulas $\{\neg r, p, \neg\neg q, r\}$ (todas las que aparecen en esta rama, eliminando las que llevan el símbolo $\checkmark$) es insatisfacible.

Tableaux semánticos

Ejemplo

Ahora, usando su rama izquierda, podemos extender T_1 a un nuevo árbol T_2 :



Ejemplo

Veremos que, en el caso de obtener sólo ramas cerradas, se podrá deducir que el conjunto Φ es insatisfacible: no es posible asignar valores de verdad 1 a las fórmulas que aparecen como etiquetas del árbol T_2 sin caer en una contradicción. Por tanto, nuestro razonamiento inicial es válido.

Vamos entonces a definir los tableaux semánticos. Como veremos, esta definición será, una vez más, una definición recursiva.

Definición

Sea

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$$

Tableaux semánticos

Definición

Reglas de formación de un tableau:

- **Regla de inicialización (R_{ini}):** *el* **tableau inicial** *es un árbol de fórmulas T_0 con una única rama cuyos vértices están etiquetados por las fórmulas del conjunto Φ.*
- **Regla de reducción (R_α):** *si una rama abierta θ de T incluye un vértice etiquetado por una fórmula* **conjuntiva** $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$, *podemos extender T a un nuevo tableau T' (una* **extensión directa** *de T) prolongando θ de forma lineal, con dos nuevos vértices α_1 y α_2. Se añade a la fórmula conjuntiva el símbolo $\checkmark$. Esta regla* **no se aplica** *si la rama abierta θ ya contiene α_1 y α_2.*

Tableaux semánticos

Definición

- **Regla de reducción (R_β):** *si una rama abierta θ de T incluye un vértice etiquetado por una fórmula* **disyuntiva** $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$, *podemos extender T a un nuevo tableau T' (una* **extensión directa** *de T) bifurcando θ con dos nuevos vértices β_1 y β_2, que sean hijos del vértice β. Se añade a la fórmula disyuntiva el símbolo*

Definición

- **Regla de reducción (R_σ):** *si una rama abierta θ de T incluye un vértice etiquetado por una fórmula* **simplificable** $\sigma \equiv \sigma_1$, *podemos extender T a un nuevo tableau T' (una* **extensión directa** *de T) prolongando θ de forma lineal, con un nuevo vértice σ_1. Se añade a la fórmula simplificable el símbolo $\checkmark$.*
  Esta regla **no se aplica** *si la rama abierta θ ya contiene σ_1.*
- **Regla de cierre (R_c):** *si una rama abierta θ, contiene $\perp$ o ambas fórmulas φ y $\neg\varphi$ aparecen en θ se cierra usando el símbolo $\sharp$.*

Las siguientes definiciones permiten saber cuando no es posible extender ulteriormente un tableau, es decir, cuando termina nuestro procedimiento de reducción de fórmulas.

Definición

- *Una rama θ, de tableau T está* **completa (ó saturada)** *si y sólo si se cumplen bf las tres siguientes condiciones:*
  1) Si $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ pertenece a θ, entonces α_1 y α_2 pertenecen a θ

Tableaux semánticos

Observación

Dado un conjunto de fórmulas, el tableau asociado a esto conjunto no queda únicamente definido.

Estrategias para simplificar los tableaux:

Para intentar **minimizar la complejidad del tableau** *que se obtiene, en general es conveniente reducir primero fórmulas de tipo σ y α, o fórmulas que permitan cerrar ramas.*

Entre las restantes fórmulas, conviene reducir las más sencillas antes que las más complejas.

Tableaux semánticos

Las siguientes definiciones y teoremas permiten interpretar un tableau acabado.

Definición

- *Una rama θ de un tableau es* **satisfacible** *si y sólo si existe una valoración que satisface las fórmulas de θ.*
- *Un tableau T es* **satisfacible** *si y sólo si existe una valoración que satisface las fórmulas de alguna de sus ramas.*

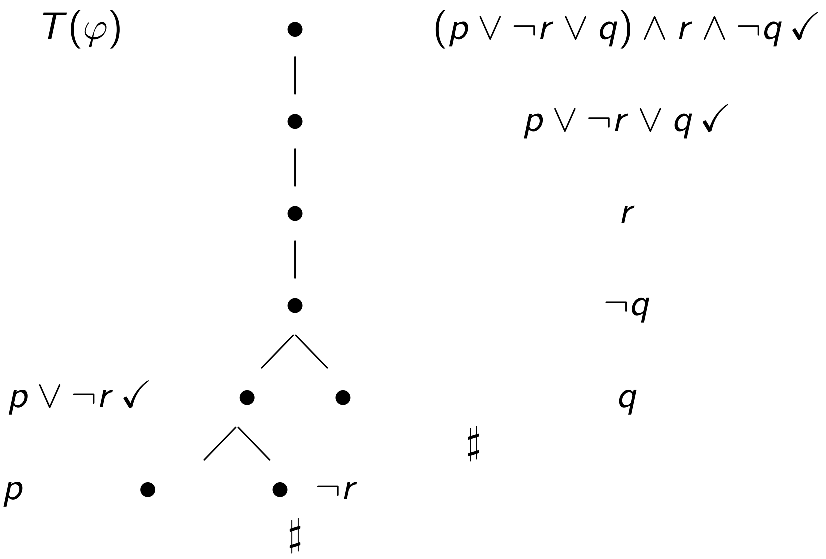


Figura: Tableau acabado de $\varphi = (p \vee \neg r \vee q) \wedge r \wedge \neg q$.

Ejemplo

Sea $T(\varphi)$ *el tableau acabado de la figura 1 asociado a la fórmula*

$$\varphi = (p \vee \neg r \vee q) \wedge r \wedge \neg q.$$

$T(\varphi)$ *tiene la primera rama abierta. Si asignamos valor de verdad 1 a todos los* **literales** *(fórmulas atómicas o negaciones de ellas) que son las etiquetas de esa rama, obtenemos que*

Tableaux y razonamientos

Sea $\Phi \to \varphi$ un razonamiento. El teorema (3) asegura que el tableaux asociado a la negación del razonamiento $\neg(\Phi \to \varphi) \equiv \Phi \wedge \neg\varphi$ es cerrado si y sólo si el razonamiento es válido.
Por el otro lado, si el tableaux asociado a $\Phi \wedge \neg\varphi$ no es cerrado, contendrá una rama abierta θ que nos permite hallar un contraejemplo a la validez del razonamiento (toda valoración que satisface θ es un contraejemplo).

Tableaux y razonamientos

Ejemplo

Consideremos el siguiente razonamiento:

$$\begin{array}{c} p \to (q \leftrightarrow \neg r) \\ (q \vee \neg r) \to \neg p \\ (q \wedge r) \vee p \\ \hline p \wedge q \wedge \neg r \end{array}$$

Tableaux y razonamientos

Ejemplo

Podemos simplificar la construcción del tableaux asociado escribiendo todas las fórmulas en términos de los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.
Usando equivalencias semánticas, obtenemos que el razonamiento dado se puede rescribir como:

$$\begin{array}{c} (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r \vee q) \\ (\neg q \wedge r) \vee \neg p \\ (q \wedge r) \vee p \\ \hline p \wedge q \wedge \neg r \end{array}$$

Ejemplo

El tableau completo asociado es:

- $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r \vee q)$
- $(\neg q \wedge r) \vee \neg p$
- $(q \wedge r) \vee p$
- $\neg p \vee \neg q \vee r$
- $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
- $\neg p \vee r \vee q$

Tableaux y razonamientos

Ejemplo

El tableaux completo obtenido tiene dos ramas cerradas y dos abiertas. Estas últimas nos proporcionan dos contraejemplos del razonamiento, que se obtiene dando valor 1 a los literales que aparecen como sus etiquetas:

$$\{p = 1,\ r = 1,\ q = 0\} \quad y \quad \{p = 0,\ r = 1,\ q = 1\}.$$

Tableaux y clasificación de fórmulas

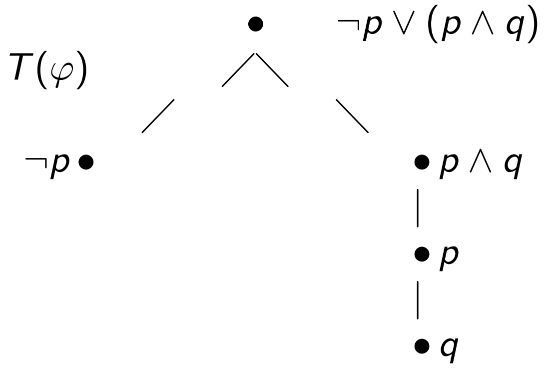
Sea $T(\varphi)$ el tableaux asociado a una fórmula φ.

- Si $T(\varphi)$ es cerrado, φ es una contradicción (es insatisfacible).
- Si $T(\varphi)$ tiene al menos una rama abierta, φ es satisfacible y tenemos que construir el tableaux $T(\neg\varphi)$ asociado a $\neg\varphi$. Hay dos posibles casos:

Tableaux y clasificación de fórmulas

Ejemplo

Sea $\varphi : p \to (p \wedge q)$ *la fórmula que se quiere clasificar.*
φ *es equivalente a las forma disyuntiva* $\neg p \vee (p \wedge q)$ *y el tableaux* $T(\varphi)$ *es*

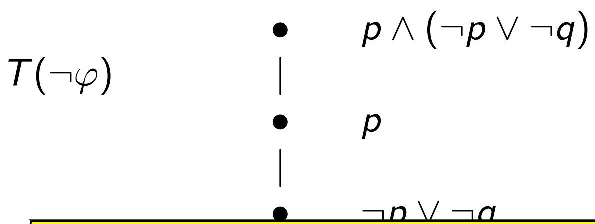


Ya que hay dos ramas abiertas, φ *es satisfacible (un modelo es, por ejemplo,* $\{q = 1, p = 1\}$*).*

Tableaux y clasificación de fórmulas

Ejemplo

Ahora, $\neg\varphi : \neg(\neg p \vee (p \wedge q)))$ *es equivalente a las forma conjuntiva* $p \wedge (\neg p \vee \neg q)$ *el tableaux* $T(\neg\varphi)$ *es*



un contraejemplo de φ*.)*

Tableaux y formas normales disyuntivas y conjuntivas

Vamos ahora a ver como la teoría de los tableaux semánticos se puede aplicar para hallar la forma normal disyuntiva y conjuntiva de una fórmula proposicional.
Representar un fórmula φ por medio de su formas normales disyuntiva y conjuntiva permite aplicar nuevos métodos de refutación como el método de resolución.
Siendo sus formas normales una nueva manera de expresar una fórmula por medio de los conectivos del conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$, no es sorprendente que, también en este caso, la teoría de los tableaux sea una herramienta de cálculo efectiva.

Tableaux y formas normales disyuntivas y conjuntivas

Definición

(Formas normales disyuntivas y conjuntivas)

1. *Un* **literal** *es cualquier fórmula de la forma p (literal positivo) o $\neg p$ (literal negativo), donde p es una proposición atómica.*
2. *Una* **cláusula disyuntiva** *es cualquier disyunción de literales.*
3. *Una* **cláusula conjuntiva** *es cualquier conjunción de literales.*

Tableaux y formas normales disyuntivas y conjuntivas

Convenios:

- Un literal se puede considerar como una disyunción o una conjunción.
- $\perp$ representa una disyunción, una cláusula disyuntiva o una FND vacía (siempre falsa).
- $\top$ representa una conjunción, una cláusula conjuntiva o una FNC vacía (siempre verdadera).

Teorema

Sea φ una fórmula. A partir de las proposiciones atómicas de φ, se pueden siempre construir una forma normal disyuntiva, $FND(\varphi)$, y una forma normal conjuntiva, $FNC(\varphi)$, tales que

$$\varphi \equiv FND(\varphi) \qquad y \qquad \varphi \equiv FNC(\varphi).$$

Además, por las leyes de De Morgan y de la doble negación,

$$FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi).$$

Tableaux y formas normales disyuntivas y conjuntivas

Cálculo de las formas normales disyuntiva y conjuntiva mediante tableaux

Dado un tableau acabado $T(\varphi)$, sean $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sus ramas abiertas.
Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea Φ_i las fórmula obtenida como conjunción de los literales de la rama θ_i.
Por el lema de reducción (1) se obtiene que

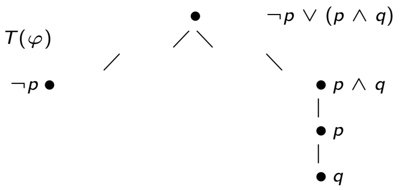
$$FND(\varphi) = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \cdots \vee \Phi_n.$$

Tableaux y formas normales disyuntivas y conjuntivas

Aplicando las anteriores consideraciones y la equivalencia $FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi)$, vamos a ver como $T(\varphi)$ y $T(\neg\varphi)$ permiten calcular $FND(\varphi)$ y $FNC(\varphi)$.

Ejemplo

Sea $\varphi : p \to p \wedge q$ *la fórmula clasificada en el ejemplo anterior.*
Ya comentamos que, usando equivalencias lógicas, se obtiene que $\varphi \equiv \neg p \vee (p \wedge q) = FND(\varphi)$.
Vamos ahora a obtener $FND(\varphi)$ *mirando al tableaux acabado* $T(\varphi)$,



Observamos que hay dos ramas abiertas, con $\Phi_1 = \neg p$ *y* $\Phi_2 = p \wedge q$.
Por tanto, en este caso, $FND(\varphi) = \Phi_1 \vee \Phi_2 = \neg p \vee (p \wedge q)$.

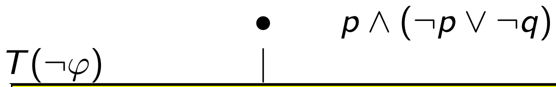
Tableaux semánticos

Ejemplo

Usando equivalencias lógicas, obtenemos que

$$\neg\varphi \equiv \neg FND(\varphi) \equiv p \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Mirando al tableau acabado $T(\neg\varphi)$,



observamos que hay una sola rama abierta, con $\Phi_2 = p \wedge \neg q$.

Tableaux semánticos

Ejemplo

Entonces

$$FND(\neg\varphi) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \quad \textit{(si no ignoramos la rama cerrada),}$$

o

$$FND(\neg\varphi) = p \wedge \neg q \quad \textit{(si ignoramos la rama cerrada).}$$

Se sigue que

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = \neg((p\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)) \equiv \neg(p\wedge\neg p)\wedge\neg(p\wedge\neg q) \equiv$$

$$\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$$

o

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q.$$