Tema 3. Aplicaciones Lineales

Álgebra. 1º IEC

III. Aplicaciones Lineales

III.1. Aplicaciones entre espacios vectoriales

III.1.1. Definición

Definición. Sean V y W dos espacios vectoriales, ambos definidos sobre el mismo cuerpo K. Una **aplicación** de V en W es una regla f que asigna a cada vector $\vec{v} \in V$ un único vector $f(\vec{v}) \in W$:

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow W \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{w} = f(\vec{v}) \end{aligned}$$

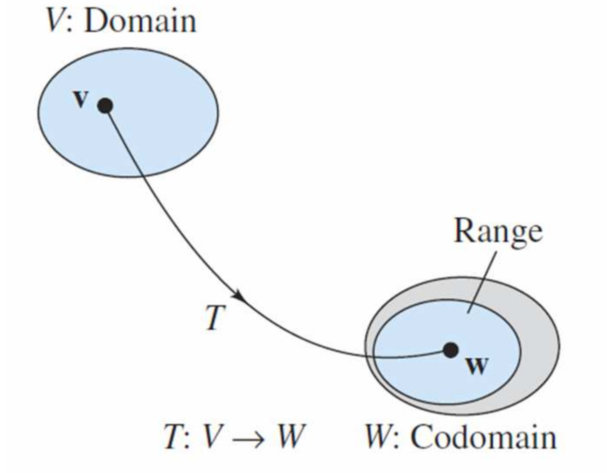
$$\forall \vec{v} \in V, \exists! \vec{w} \in W \mid \vec{w} = f(\vec{v})$$

El conjunto V (W) se llama **dominio** (**codominio**) de f. Si $\vec{v} \in V$, el vector $\vec{w} = f(\vec{v}) \in W$ es la (única) **imagen** de $\vec{v}$ por f (o imagen de $\vec{v}$ bajo la acción de f). El subconjunto de vectores $\vec{v} \in V$ cuya imagen es $\vec{w} \in W$ se llama la **preimagen** de $\vec{w}$ y se denota por $f^{-1}(\vec{w}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{w} \in W\} \subseteq V$.

El conjunto de todas las imágenes de los vectores de V se llama **imagen de la aplicación** f (o rango o recorrido), y se denota por $f(V) = Im(f) \subseteq W$.

Nota: Para que la aplicación sea tal, todo vector de $\vec{v} \in V$ debe tener una y solo una imagen en W.

Nota: En general $Im(f) \neq W$. $f^{-1}(W) = V$ aunque algunos vectores de W puedan no tener preimagen.



Definición. Sean V y W dos espacios vectoriales, ambos sobre el mismo cuerpo de escalares K. Una aplicación $f: V \rightarrow W$ se dice que es una **aplicación lineal** (u **homomorfismo**) entre espacios vectoriales si cumple:

$$\left.\begin{array}{r} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\vec{v} \in V \\ f(c\cdot\vec{u}) = c\cdot f(\vec{u}),\ \forall \vec{u} \in V, \forall c \in K \end{array}\right\} \Rightarrow f(c\vec{u}+d\vec{v}) = f(c\vec{u}) + f(d\vec{v}) = cf(\vec{u}) + df(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\vec{v} \in V,\ \forall c,d \in K$$

Nota: Así, una aplicación lineal f de un espacio vectorial V a otro W es una regla que asigna a cada vectores $\vec{u},\vec{v} \in V$ unos únicos vectores $f(\vec{u}), f(\vec{v}) \in W$ tales que $f(c\vec{u}+d\vec{v}) = cf(\vec{u}) + df(\vec{v})$.

Nota: Una aplicación lineal en la que $V = W$, esto es $f: V \rightarrow V$ se llama endomorfismo (u operador lineal).

- Aplicación cero o nula: $0 : V \rightarrow W$ tal que $0(\vec{u}) = \vec{0},\ \forall \vec{u} \in V$.
- Aplicación identidad: $i : V \rightarrow V$ tal que $i(\vec{u}) = \vec{u},\ \forall \vec{u} \in V$.
- En general $f: K^n \rightarrow K^m$ con $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots x_n) = (\sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{i=1}^n b_i x_i, \dots, \sum_{i=1}^n l_i x_i)$ es lineal.

Propiedades:

Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Se verifica:

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$ (toda aplicación lineal lleva el vector $\vec{0} \in V$ al vector $\vec{0} \in W$; $\vec{0}$ se aplica en sí mismo)
- $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u}),\ \forall \vec{u} \in V$ (la imagen del simétrico u opuesto es el opuesto de la imagen)
- $f(\vec{u}-\vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\vec{v} \in V$
- Si $f: V \rightarrow W$ y $g: W \rightarrow U$ son aplicaciones lineales, su composición $g \circ f: V \rightarrow U$ también lo es

Nota: $\vec{0}$ es el vector nulo, aunque puede ser diferente en V y W.

III.1.2. Aplicación definida por una matriz

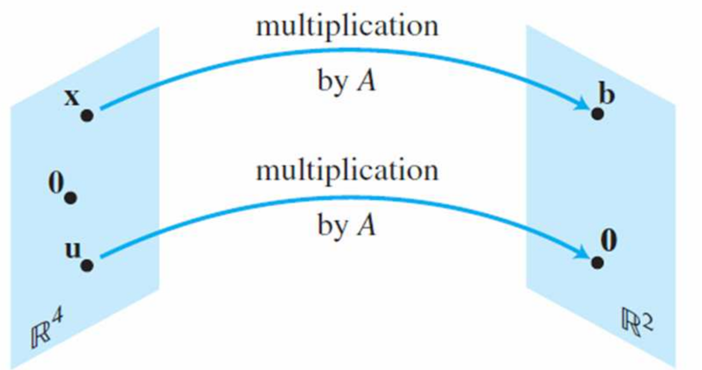
Teorema. Toda matriz $A_{m\times n}$ con escalares en un cuerpo K **determina una única aplicación lineal** de la forma $f: K^n \to K^m$ y definida por $\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, donde $\vec{x} \in K^n$ y $f(\vec{x}) \in K^m$. Generalmente, dicha aplicación f se denotará por el símbolo de la matriz A de la forma $A: K^n \to K^m$.

Nota: 1) La aplicación lineal definida por una matriz A se denota por $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ o $\vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x}$. 2) Si A tiene n columnas y m filas, el dominio de f es K^n y el codominio es K^m (el número de columnas (filas) define la dimensión del dominio (codominio)). 3) $\vec{x} \in K^n$ y $f(\vec{x}) \in K^m$ se escriben como vectores columna.

Teorema. Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal. Existe una única matriz $A_{m\times n}$ tal que $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Así, **toda aplicación** lineal de la forma $f: K^n \to K^m$ **puede expresarse mediante una matriz** $A_{m\times n}$ en forma matricial $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. A dicha matriz se le llama **matriz canónica de la aplicación** f y es de la forma: $A_{m\times n} = [f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \dots\ f(\vec{e}_n)]$ donde $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es la base canónica del dominio K^n

Nota: Así, basta conocer las imágenes de los vectores de la base canónica $\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ del dominio K^n para determinar la aplicación $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

Nota: Toda aplicación lineal $f: K^n \to K^m$ es una transformación matricial $\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = A_{m\times n}\,\vec{x}$, y a la inversa. No obstante, no todas las aplicaciones lineales son matriciales (solo aquellas entre espacios K^r).



$$f\ :\ K^n \to K^m \Leftrightarrow f(\vec{x}) = [f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \dots\ f(\vec{e}_n)] \cdot \vec{x} = A_{m\times n} \cdot \vec{x}$$

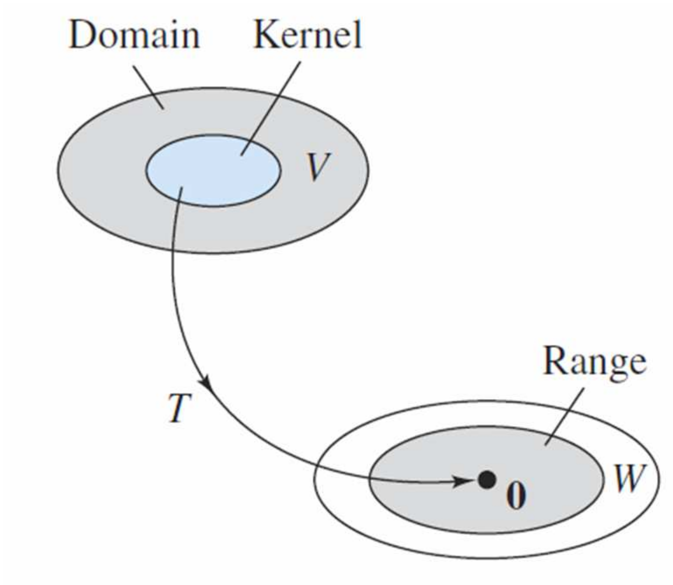
III.2. Núcleo e Imagen de una aplicación

III.2.1. Definición

Definición. Sea $f\colon V \to W$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales V y W, ambos sobre un mismo cuerpo K.

1. El conjunto imagen es el conjunto de todos los vectores $f(\vec{v}) \in W$ que son imagen de V (de todos los vectores $\vec{v} \in V$) y es un subespacio vectorial de W llamado **imagen (o rango) de la aplicación lineal** f, que se denota por $Im(f) \subseteq W$ (o $f(V)$), $Im(f) = \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\} \subseteq W$

2. El **núcleo** o espacio nulo **de la aplicación lineal** f, escrito $Nuc(f) \subseteq V$ (o $Ker(f)$) es el conjunto de elementos de $\vec{v} \in V$ que se aplican en $\vec{0} \in W$ (o sea aquellos cuya imagen es $f(\vec{v}) = \vec{0} \in W$) y forma un subespacio vectorial de V: $Nuc(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$.



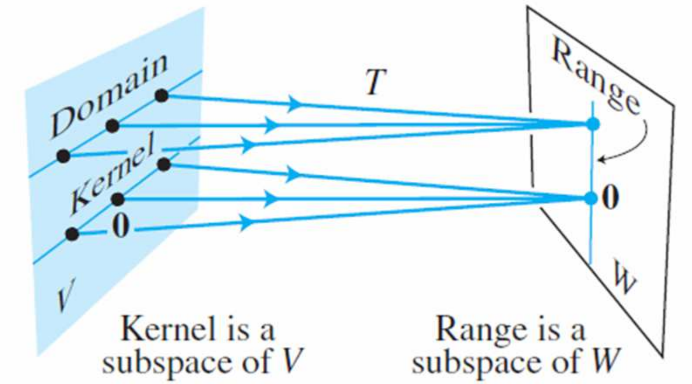


FIGURE 2 Subspaces associated with a linear transformation.

Corolario. Si $A_{m\times n}$ es la matriz canónica de una aplicación lineal $f: K^n \to K^m$ (o alternativamente si f es la aplicación lineal dada por $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$):

1. El núcleo de f, $Nuc(f)$ coincide con el espacio nulo de la matriz A, $\boldsymbol{Nuc(f) = Nul(A)}$, o sea, es el espacio solución del sistema homogéneo $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

2. La imagen de f, $Im(f)$ es el espacio columna de A, $\boldsymbol{Im(f) = Col(A)}$.

Nota: Así, si f proviene de una transformación matricial $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, el núcleo y la imagen de f son simplemente el espacio nulo y el espacio columna de A.

Nota: Como $Im(f)$ y $Nuc(f)$ son subespacios deben tener bases asociadas. Es posible hallar la base de $Nuc(f)$ y de $Im(f)$ de la misma forma que las bases de $Nul(A)$ y $Col(A)$, respectivamente.

Teorema. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es un **sistema de vectores de $\boldsymbol{V}$ linealmente dependiente** entonces $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)\}$ es un **sistema de vectores de $\boldsymbol{W}$ linealmente dependiente**. No obstante, si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \in V$ es independiente, $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)\} \in W$ puede ser dependiente o independiente.

Nota: Así, la independencia de vectores no es una propiedad que se conserve en las aplicaciones lineales.

Proposición. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Si $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \in V$ es un **sistema generador de $\boldsymbol{V}$** entonces $f(S) = \{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)\} \in W$ es un **sistema generador de $\boldsymbol{Im(f)}$.**

Nota: Así, si S es sistema generador de V entonces $dim(Im\, f) = dim\big(Lin(f(S))\big) = rang(f(S))$. No obstante, $f(S)$ podrá ser linealmente dependiente, aún cuando S sea independiente.

III.2.2. Rango y Nulidad de una aplicación

Definición. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Se define el **rango de f**, $rang(f)$ como la dimensión de su imagen $\dim(Im\, f)$, y la **nulidad de f**, $Nul(f)$ como la dimensión de su núcleo $\dim(Nuc\, f)$:

- $rang(f) = \dim(Im\, f)$
- $Nul(f) = \dim(Nuc\, f)$

Teorema. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita ambos sobre el mismo cuerpo K, y sea $A_{m\times n}$ la matriz canónica de f. El rango de la aplicación lineal f es igual al rango de su matriz asociada A, $rang(f) = rang(A)$.

Nota: Si $\{\vec{v}_1, .., \vec{v}_p\}$ es un sistema generador de V entonces $rang(f) = \dim(Im\, f) = rang\left(\{f(\vec{v}_1), .., f(\vec{v}_p)\}\right)$

Nota: Como A define una aplicación, ambas definiciones del rango se corresponden y $Col(A) = Im(f)$.

Teorema del Rango (continuación del Teorema del Rango de una matriz). Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Si el espacio V tiene dimensión finita:

$$\dim V = \dim(Im\, f) + \dim(Nuc\, f) = rang(f) + Nul(f)$$

Nota: Así la suma de las dimensiones de la imagen y el núcleo de una aplicación lineal es la dimensión de su dominio V.

Nota: Si la aplicación viene dada por una matriz $A_{m\times n}$, esto es, $f: K^n \to K^m$ entonces $rang(f) = rang(A)$ y $n = \dim V = rang(f) + Nul(f) = rang(A) + Nul(A)$ ya que $rang(f) = rang(A) = \dim(Col\, A)$ (esto es, la imagen de f es precisamente el espacio columna $Col(A)$) y $Nul(f) = \dim(Nuc\, f) = \dim(Nul\, A)$.

III.3. Tipos de aplicaciones

III.3.1. Definición

▪ **Inyectiva** (o no singular)**:** si dos elementos diferentes de V tienen imágenes diferentes en W (o sea la preimagen de todo $\vec{w} \in Im(f)$ consta de un único vector):

$$f\ inyectiva\ \Leftrightarrow \forall \vec{v}, \vec{v}' \in V \text{ y } \boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{v}' \Rightarrow f(\vec{v}) \neq f(\vec{v}')} \text{ ó } f\ inyectiva\ \Leftrightarrow \forall \vec{v}, \vec{v}' \in V \text{ y } \boldsymbol{f(\vec{v}) = f(\vec{v}') \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}'}$$

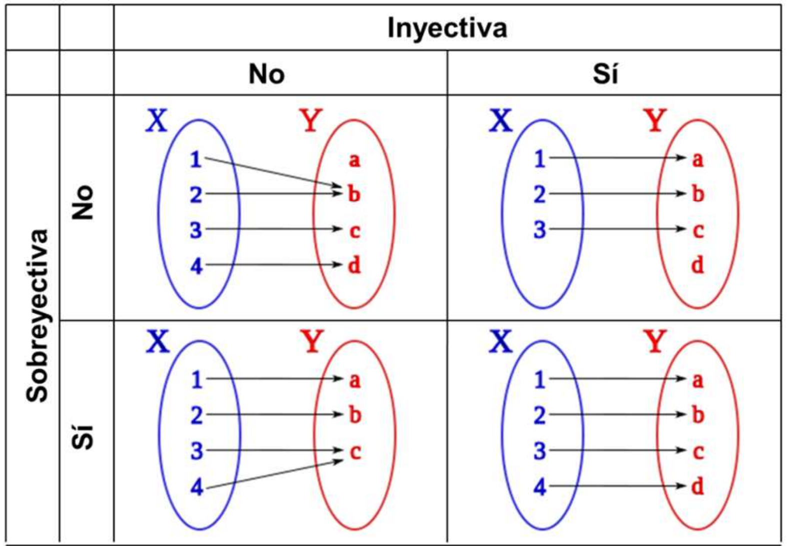
▪ **Sobreyectiva** (o suprayectiva, o que f aplica V sobre W): si todo $\vec{w} \in W$ es imagen de al menos un $\vec{v} \in V$ (o sea, todo elemento de W tiene alguna preimagen en V):

$$f\ sobreyectiva\ \Leftrightarrow \forall \vec{w} \in W, \exists \vec{v} \in V \mid \vec{w} = f(\vec{v}) \text{ ó } f\ sobreyectiva\ \Leftrightarrow \boldsymbol{f(V) \equiv Im(f) = W}$$

▪ **Biyectiva** (o uno a uno): si f es **inyectiva y sobreyectiva**, esto es si todo $\vec{w} \in W$ es imagen de un y solo un $\vec{v} \in V$ (o sea, todo elemento de W tiene una única preimagen en V):

$$f\ biyectiva\ \Leftrightarrow \forall \vec{w} \in W, \exists!\, \vec{v} \in V \mid \vec{w} = f(\vec{v}) \text{ ó } f\ biyectiva\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{w} = f(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{v} = f^{-1}(\vec{w})}$$

Nota: Si f es biyectiva la correspondencia inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ define una aplicación biyectiva.



III.3.2. Aplicaciones inyectivas

Definición. Una aplicación lineal $f: V \to W$ es **singular** si la imagen de algún vector no nulo bajo f es $\vec{0}$, o sea si existe algún $\vec{v} \neq \vec{0} \in V$ tal que $\boldsymbol{f(\vec{v}) = \vec{0}}$. f es **no singular**, si únicamente $\vec{0} \in V$ se aplica en $\vec{0} \in W$, o equivalentemente si su núcleo consiste solamente en el vector $\vec{0} \in V$, esto es $\boldsymbol{Nuc(f) = \{\vec{0}\} \in V}$.

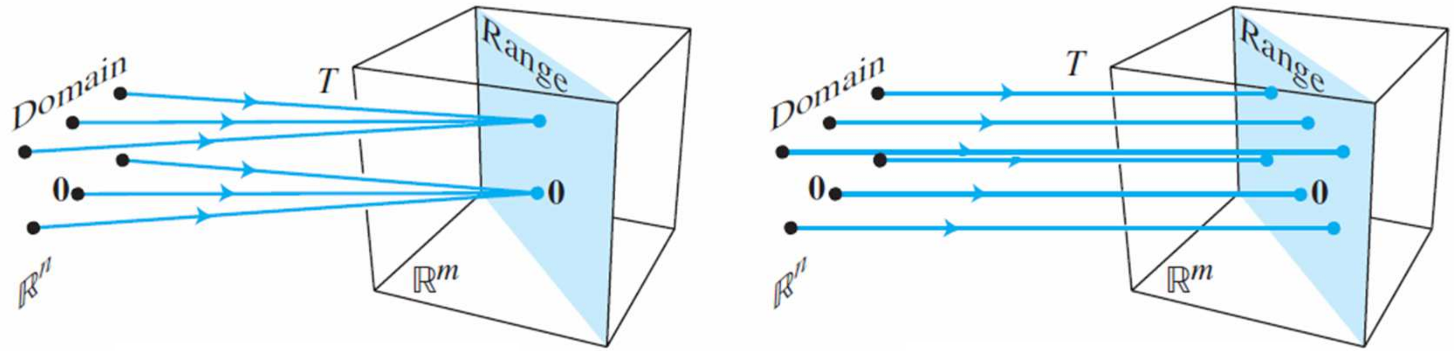
Teorema. Sea una aplicación lineal $f: V \to W$ **no singular**. En tal caso, la **imagen** de cualquier conjunto linealmente independiente del dominio V es un conjunto linealmente **independiente** en la imagen de la aplicación $Im(f) \subseteq W$.

Teorema. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectorial sobre el mismo cuerpo K. Se verifica que $\boldsymbol{f}$ es **inyectiva** si y solo si se cumple alguna de las siguientes propiedades, que son equivalentes:

1) f es no singular, o sea, $\boldsymbol{Nuc(f) = \{\vec{0}\}}$.

2) $\boldsymbol{\dim V = \dim(Im\, f)}$ y V tiene dimensión finita.

3) Siendo $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ una base de V, entonces $\boldsymbol{f(B) = \{f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n)\}}$ es una **base de** $\boldsymbol{Im\,(f)}$, es decir, si y solo si, $f(B)$ es un sistema independiente de vectores de $Im\,(f)$.



T no es inyectiva T es inyectiva

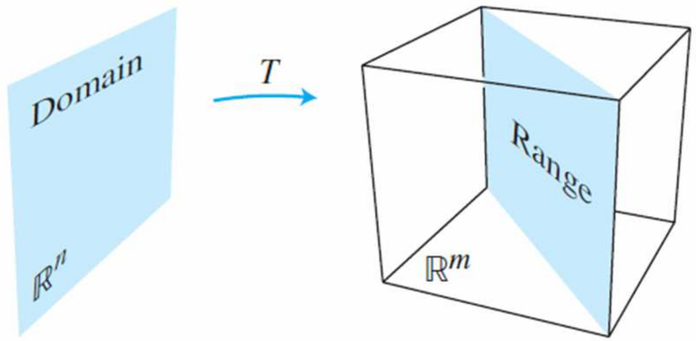
¿Inyectiva? = ¿es todo ***b*** de *Im (f)* la imagen de un único vector del dominio ***Rⁿ***?

III.3.3. Aplicaciones sobreyectivas

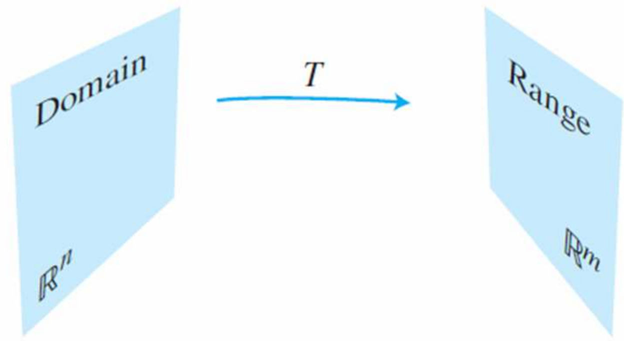
Teorema. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal, con W un espacio vectorial de dimensión finita. f es **sobreyectiva** si y solo si $\boldsymbol{rang(f) = \dim(W)}$.

Nota: También se dice que f es sobre W, o que f mapea V en todo W.

Nota: Si $f: V \to W$ y $W' = f(V)$ entonces $f: V \to W'$ es sobreyectiva.



T no es sobreyectiva



T es sobreyectiva

¿Sobreyectiva? = ¿Es la Imagen de T, ***Im (T) = R^m*** (codominio)?

Teorema. Sea $f: K^n \to K^m$ una aplicación lineal y $A_{m\times n}$ la matriz canónica para f. Entonces:

1) f es **inyectiva** si y solo si la ecuación $f(\vec{x}) = \vec{0}$ tiene solamente la solución trivial, esto es, si y solo si las **columnas de $\boldsymbol{A}$** son linealmente **independientes**.

2) f es **sobreyectiva** si y solo si **las columnas de $\boldsymbol{A}$ generan todo $\boldsymbol{K^m}$**.

III.3.4. Aplicaciones biyectivas

Teorema: Una aplicación lineal $f: V \to W$ entre espacios vectoriales de la misma dimensión finita es inyectiva si y solo si es sobreyectiva: $[\mathbf{dim}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{W})]\ \boldsymbol{f\ inyectiva} \Leftrightarrow \boldsymbol{f\ sobreyectiva.}$

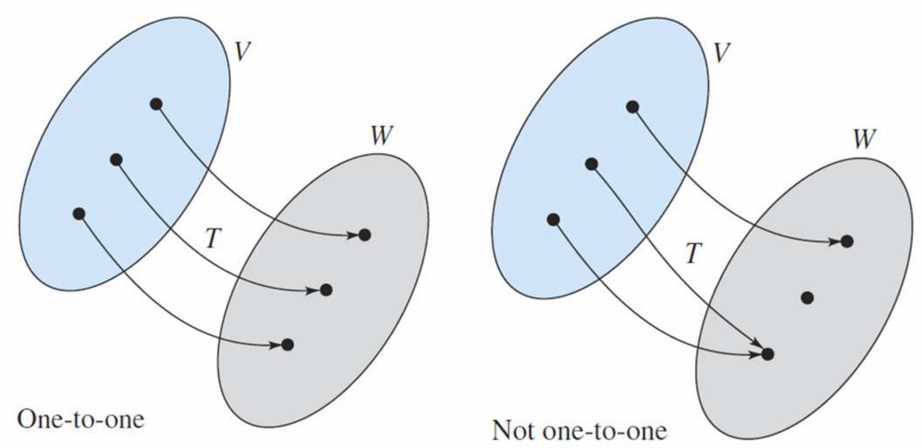
Nota: En otras palabras, si $f: V \to W$ es lineal, V tiene dimensión finita y $\dim V = \dim W$ entonces la aplicación es biyectiva si y solo si f es no singular (inyectiva) o si y solo si f es sobreyectiva. Notar que la condición $\dim V = \dim W$ se cumple, por definición, en cualquier endomorfismo $f: V \to V$.

Teorema. La aplicación lineal $f: V \to W$ es biyectiva si y solo si $Im(f) = W$ (sobreyectiva) y $Nuc(f) = \{\vec{0}\}$ (inyectiva). Así, si V es de dimensión finita, $f: V \to W$ es biyectiva si y solo si $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{V} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{W}$.

Propiedades:

- Si f es biyectiva entonces, existe su inversa $f^{-1}: W \to V$, y es también lineal y biyectiva.

- Si $f: V \to W$ es biyectiva la imagen de una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ de V es una base $f(B) = \{f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n)\}$ de W, y por tanto los espacios V y W tienen la misma dimensión.



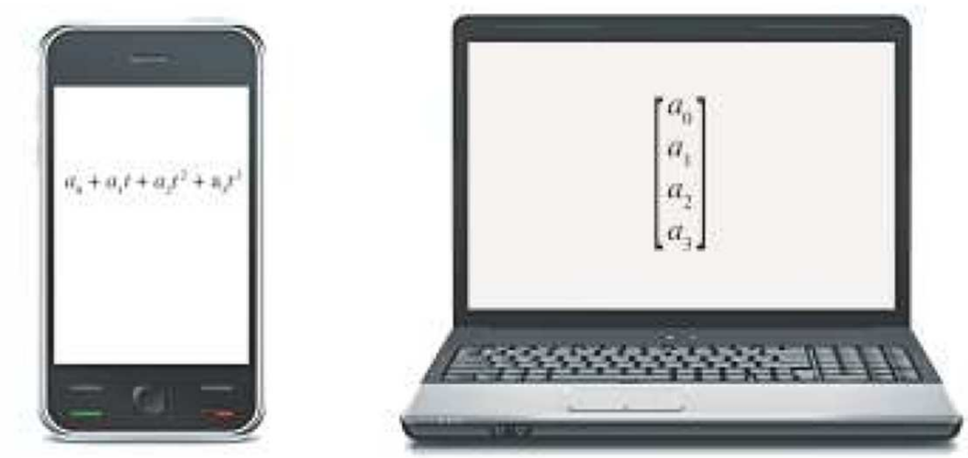
III.3.5. Isomorfismo de coordenadas

Definición. Se llama **isomorfismo** a una **aplicación lineal** $f: V \to W$ entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K que sea **biyectiva**. Si $f: V \to W$ es un isomorfismo, los dos espacios vectoriales se dicen isomorfos.

Nota: Un homomorfismo inyectivo / sobreyectivo / biyectivo se dice que es un monomorfismo / epimorfismo / isomorfismo. Los endomorfismos $f: V \to V$ que son biyectivos se llaman automorfismos.

Teorema: Dos **espacios** vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo K son **isomorfos** (esto es, entre ellos existe algún isomorfismo) si y solo si tienen la **misma dimensión**.

Nota: En un isomorfismo puede considerarse que los espacios vectoriales V y W son iguales. Los dos espacios se comportan del mismo modo aún cuando sean objetos matemáticos muy distintos.



The space $\mathbb{P}_3$ is isomorphic to $\mathbb{R}^4$.

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K. Dada una base de V, $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ se considera la **aplicación de coordenadas** $[\ ]$ que a cada vector $\vec{x} \in V$ le asocia su sistema de coordenadas $[\vec{x}]_B = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ respecto a la base B:

$$\begin{aligned} [\ ]: V &\to K^n \\ \vec{x} &\longmapsto [\vec{x}]_B = (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

siendo x_i la coordenada $i = 1,2, \dots n$ de $\vec{x}$ en la base B. Esta aplicación es **lineal y biyectiva**, tal que:

$$[c\vec{u} + d\vec{v}] = c[\vec{u}] + d[\vec{v}], \forall \vec{u}, \vec{v} \in K, \forall c, d \in K$$

Nota: La aplicación recíproca $[\ ]^{-1}: K^n \to V$ también es lineal y biyectiva. Así, la función de coordenadas $[\ ]$ define un isomorfismo del espacio V en el K^n.

Nota: La selección de una base B cualquiera de V define el isomorfismo $\vec{x} \longmapsto [\vec{x}]_B$ que conecta el espacio V, posiblemente desconocido, con el espacio conocido K^n.

Nota: Salvo notación, no hay nada que diferencie a los vectores de V de los de K^n y asi $\vec{x}$ y $[\vec{x}]_B$ son indistinguibles. Todo cálculo sobre V se reproduce exactamente en K^n, y viceversa.

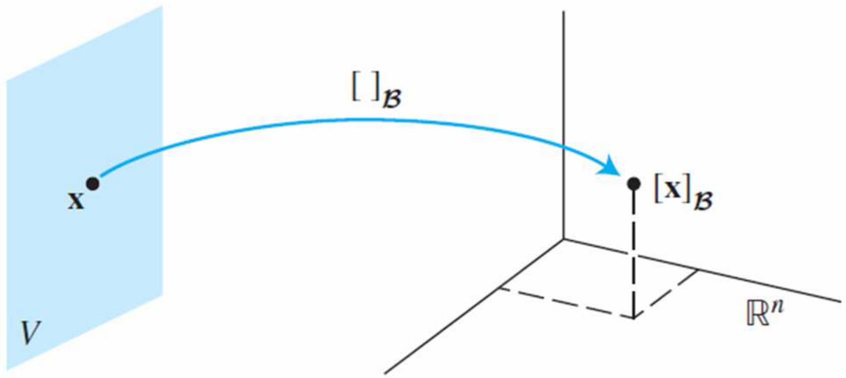


FIGURE 5 The coordinate mapping from V onto $\mathbb{R}^n$.

III.4. Aplicaciones y sistemas de ecuaciones

1) Preguntar si f es **inyectiva** es una pregunta de **unicidad de soluciones** de $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- Si f es inyectiva, $\forall \vec{b} \in K^m$ la ecuación $f(\vec{x}) = \vec{b}$ tiene o bien una solución o bien ninguna solución, esto es, cada $\vec{b} \in Im(f)$ es la imagen de (a lo más) un $\vec{x} \in K^n$.

- f no es inyectiva cuando algún $\vec{b} \in Im(f)$ es la imagen de más de un vector $\vec{x} \in K^n$.

2) Preguntar si f es **sobreyectiva** (o mapea K^n sobre K^m) es una pregunta de **existencia de soluciones** de $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- f es sobreyectiva si $\forall \vec{b} \in K^m$ existe por lo menos una solución de $f(\vec{x}) = \vec{b}$, esto es si cada $\vec{b} \in K^m$ es la imagen de por lo menos un $\vec{x} \in K^n$.

- f no es sobreyectiva cuando existe algún $\vec{b} \in K^m$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{b}$ no tiene solución.

Teorema. Si A_n es una **matriz cuadrada**, el sistema asociado $A\vec{x} = \vec{b}$ verifica:

1. Si $A\vec{x} = \vec{0}$ es **compatible determinado** (solo tiene la solución $\vec{x} = \vec{0}$), $A\vec{x} = \vec{b}$ tendrá solución única $\forall \vec{b} \in K^n$.

2. Si $A\vec{x} = \vec{0}$ es **compatible indeterminado** (tiene alguna solución no nula), entonces:

   a. Existen valores $\vec{b} \in K^n$ para los que $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución (incompatible).

   b. Siempre que exista una solución de $A\vec{x} = \vec{b}$, ésta no será única (compatible indeterminado).

III.5. Operaciones con aplicaciones

III.5.1. Composición de aplicaciones

Definición. Sean V, U y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y sean $f: V \to U$ y $g: U \to W$ aplicaciones lineales. La **función compuesta de f con g,** $g \circ f$ es la aplicación de V en W definida por:

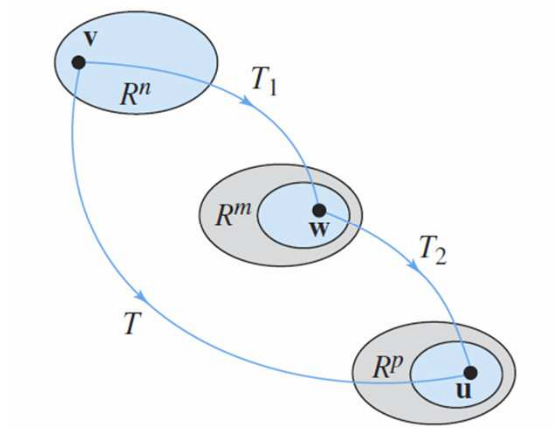
$$(g \circ f) : V \to W$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{z} = (g \circ f)(\vec{x}) = g\big(f(\vec{x})\big) = g(\vec{y})$$

Nota: El dominio (codominio) de $g \circ f$ es el dominio (codominio) de f (g), esto es V (W). La composición solo está definida si la imagen de f está contenida en el dominio de g, o sea si $Im(f) \subseteq U$.

Teorema. La **composición** de dos aplicaciones lineales es una **aplicación lineal**. Así, toda aplicación lineal $f: V \to U$ se puede componer con cualquier aplicación lineal $g: U \to W$ siendo el resultado $g \circ f: U \to W$ una nueva aplicación lineal.

Propiedades: Si f, g y h son homomorfismos y $k \in K$, siempre que las siguientes composiciones tengan sentido se verifica que:

- $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$
- $(g + f) \circ h = g \circ h + f \circ h$ y $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$
- $k \cdot (g \circ h) = (k \cdot g) \circ h = g \circ (k \cdot h)$
- $(g \circ f) \neq (f \circ g)$ y $(g^\circ f)^{-1} = f^{-1\circ} g^{-1}$



Composition of Transformations

Nota: Además la composición de dos aplicaciones lineales inyectivas / sobreyectivas / biyectivas es una aplicación lineal inyectiva / sobreyectiva / biyectiva.

Teorema. Dadas las matrices $A_{m\times p}$ y $B_{p\times n}$ y haciendo corresponder cada una de ellas con su aplicación lineal asociada ($g: K^p \to K^m$ y $f: K^n \to K^p$, respectivamente) respecto a las bases canónicas entonces $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ es la **matriz canónica** asociada a la aplicación lineal $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, esto es $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}}$.

Nota: Lo anterior se puede generalizar a la composición de n aplicaciones lineales. Así, si las matrices canónicas de $f_1, f_2, \dots f_n$ son $A_1, A_2, \dots A_n$ la matriz canónica de la composición $f = f_n \circ f_{n-1} \dots f_2 \circ f_1$ es $A = A_n \cdot A_{n-1} \dots A_2 \cdot A_1$

Propiedades: Siempre que los siguientes productos de matrices tengan sentido, se verifica:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot C$ y $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Nota: En el producto $A \cdot B$, el número de columnas de A debe corresponder al número de filas de B, ya que el codominio de la aplicación $f(\vec{x}) = B\vec{x}$ es el dominio de $g(\vec{x}) = A\vec{x}$ en $g \circ f$.

Nota: Puesto que el producto de matrices no es conmutativo, el orden es importante en una composición. Por eso, en general $g \circ f$ no es igual a $f \circ g$.

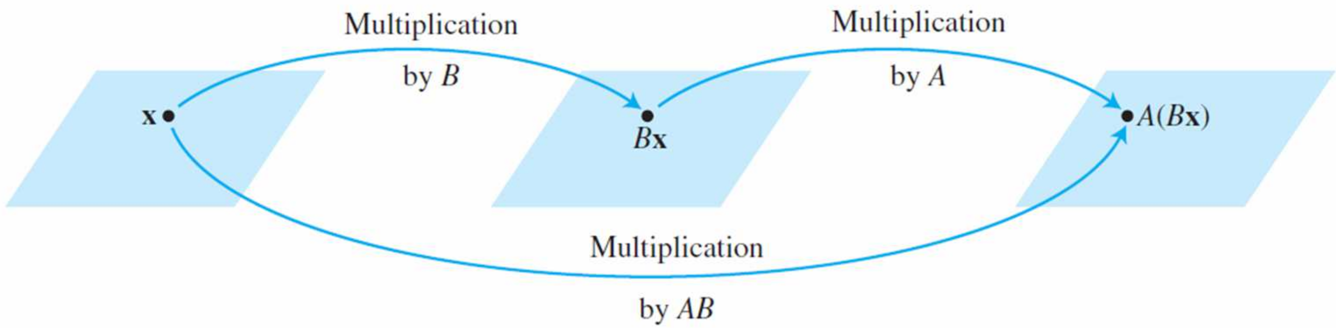


FIGURE 3 Multiplication by AB.

III.5.2. Aplicación inversa

Teorema. Sea $f\colon V \to W$ una aplicación lineal. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es **invertible** si su relación inversa f^{-1} es también una aplicación $g = f^{-1}\colon W \to V$, esto es si existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que:

$$f^{-1} : W \to V \mid f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) \ \forall \vec{y} \in W \ \text{ o } f^{-1} \Leftrightarrow \exists!\ g : W \to V \mid (g^\circ f)(\vec{x}) = i_V, (f^\circ g)(\vec{y}) = i_W$$

Nota: La aplicación inversa, si existe, es única y es una aplicación lineal.

Nota: Por tanto: 1) Si $(g^\circ f) = i_V \Rightarrow g = f^{-1}$; 2) Si $(f^\circ g) = i_W \Rightarrow g = f^{-1}$. Así, para calcular la inversa de una aplicación f basta encontrar una función g que compuesta con f nos dé la identidad.

Teorema. Una aplicación lineal $f\colon V \to W$ es **invertible** si y solo si f es **biyectiva** (un isomorfismo).

Nota: Si f es invertible, entonces su inversa f^{-1} también es biyectiva con $(f^{-1})^{-1} = f$.

Nota: Por ser biyectiva, las dimensiones del dominio y codominio son iguales (son isomorfos), por lo que la matriz de la aplicación f (y g) será cuadrada.

Teorema. Sea $f\colon V \to V$ un **endomorfismo** de un espacio vectorial V de dimensión finita y sea A_n la matriz (cuadrada) canónica de f. Entonces $\boldsymbol{f}$ es **invertible** si y solo si $\boldsymbol{A}$ es una matriz **invertible**. Más aún, si A es la matriz canónica de f, la inversa de f viene dada por $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{x}$ y es única, esto es A^{-1} es la matriz canónica de f^{-1}.

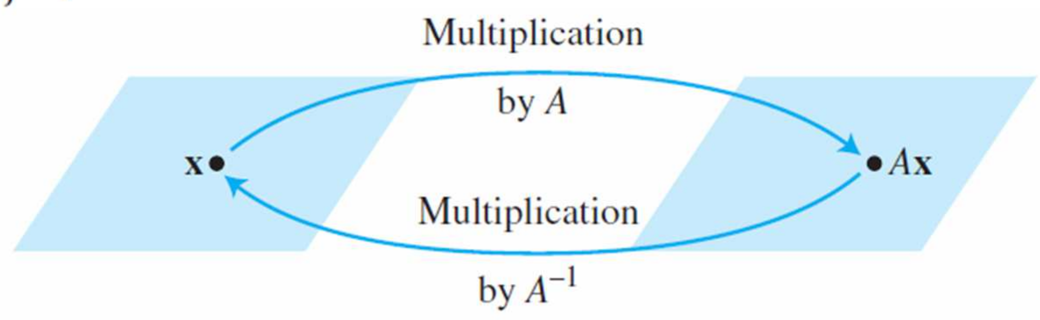


FIGURE 2 A^{-1} transforms $A\mathbf{x}$ back to $\mathbf{x}$.

III.6. Matrices de las aplicaciones lineales

Teorema (Determinación de una aplicación lineal). Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Sea $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ una base de V y $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ un sistema de vectores cualquiera de W. Existe una única aplicación lineal $f: V \to W$ tal que $f(\vec{b}_1) = \vec{w}_1, \dots, f(\vec{b}_n) = \vec{w}_n$. En otras palabras, $\boldsymbol{f}$ **está determinada** inequívocamente para todo $\vec{v} \in V$ mediante el sistema de vectores $\{f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n)\} \subseteq W$, esto es **por las imágenes de los vectores de una base del dominio**.

Nota: Los vectores $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\} = \{f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n)\} \subseteq W$ pueden ser linealmente independientes o dependientes (o incluso iguales entre sí).

Teorema. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, con $\dim V = n$ y $\dim W = m$, y sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}$ bases de V y W, respectivamente. Siendo así, la aplicación f dada por $\vec{x} \longmapsto \vec{y} = f(\vec{x})$ admite la siguiente ecuación matricial respecto de las bases B de V y C de W:

$$[\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})]_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CB}} \cdot [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\boldsymbol{B}} = \left[\left[f(\vec{b}_1)\right]_C \quad \left[f(\vec{b}_2)\right]_C \cdots \quad \left[f(\vec{b}_n)\right]_C \right] \cdot [\vec{x}]_B, \qquad \forall \vec{x} \in V$$

donde A_{CB} es la matriz traspuesta de la matriz de coeficientes del sistema (I), o sea aquella que tiene como columnas las coordenadas en la base C de las imágenes de los vectores de la base B:

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CB}} = \left[\left[\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{b}}_1)\right]_{\boldsymbol{C}} \quad \left[\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{b}}_2)\right]_{\boldsymbol{C}} \cdots \quad \left[\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{b}}_n)\right]_{\boldsymbol{C}} \right]$$

$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CB}}$ se llama la **matriz $\boldsymbol{m \times n}$ de la aplicación lineal $\boldsymbol{f: V \to W}$ en las bases $\boldsymbol{B}$ (de $\boldsymbol{V}$) y $\boldsymbol{C}$ (de $\boldsymbol{W}$)** (o bien la representación matricial de f relativa a las bases B del dominio y C del codominio). Para cualquier $\vec{x} \in V$ el vector coordenado de $f(\vec{x})$ en C, $[f(\vec{x})]_C$ es el producto de A_{CB} por el vector coordenado de $\vec{x}$ en B, $[\vec{x}]_B$.

Nota: Si se dan otras bases de V y W diferentes a B y/o C, la matriz de la aplicación será distinta.

Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre los espacios V y W de dimensión n y m respectivamente. Seleccionando una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}$ para V y W respectivamente, entonces cualquier $\vec{x} \in V$ tiene como coordenadas $[\vec{x}]_B \in K^n$ en B y su imagen $f(\vec{x}) \in W$ tiene como coordenadas $[f(\vec{x})]_C \in K^m$ en C. Si $[\vec{x}]_B = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ entonces:

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n \Rightarrow f(\vec{x}) = f\left(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n\right) = c_1 f\left(\vec{b}_1\right) + \cdots + c_n f\left(\vec{b}_n\right)$$

ya que f es lineal. Al usar la base C de W es posible reescribir la ecuación anterior en términos de los vectores de coordenadas en C aplicando la función de coordenadas $[\,]_C$. Así la conexión entre $[\vec{x}]_B$ y $[f(\vec{x})]_C$ es:

$$[f(\vec{x})]_C = \left[c_1 f\left(\vec{b}_1\right) + c_2 f\left(\vec{b}_2\right) + \cdots + c_n f\left(\vec{b}_n\right)\right]_C = c_1\left[f\left(\vec{b}_1\right)\right]_C + c_2\left[f\left(\vec{b}_2\right)\right]_C + \cdots + c_n\left[f\left(\vec{b}_n\right)\right]_C \Rightarrow$$

$$[f(\vec{x})]_C = \left[\,\left[f\left(\vec{b}_1\right)\right]_C \quad \left[f\left(\vec{b}_2\right)\right]_C \cdots \quad \left[f\left(\vec{b}_n\right)\right]_C\,\right] \cdot [\vec{x}]_B = A_{CB} \cdot [\vec{x}]_B$$

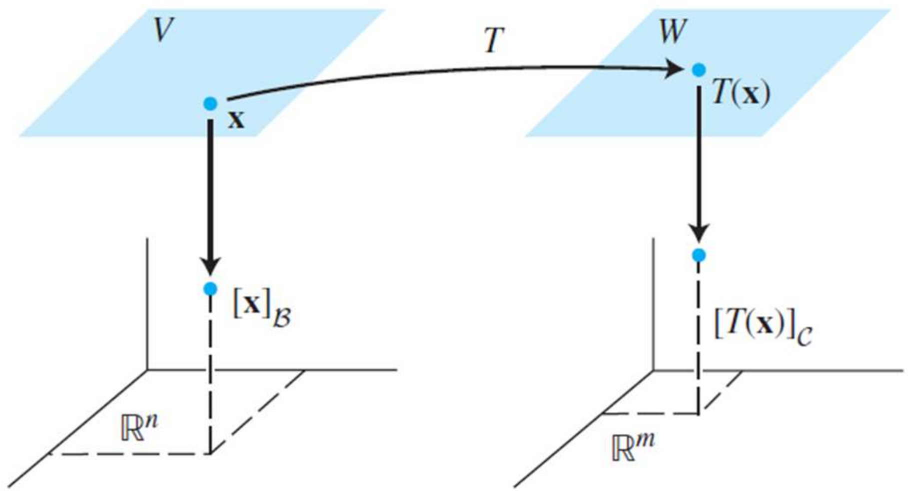


FIGURE 1 A linear transformation from V to W.

Box III.6.1. Algoritmo matriz de una aplicación lineal

Sea una aplicación lineal (homomorfismo) $f: V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W, ambos sobre el mismo cuerpo K. Sean $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}$ sendas bases de V y W. La matriz que representa a f en la bases B y C es tal que $[f(\vec{x})]_C = A_{CB} \cdot [\vec{x}]_B$ y se obtiene del siguiente modo:

Paso 1. Para cada vector $\vec{b}_i$ de la base B hallar sus imágenes $f(\vec{b}_i), i = 1,2, \dots, n$ usando la expresión explícita de la aplicación lineal $f(\vec{x})$.

Paso 2. Escribir $f(\vec{b}_i)$ como combinación lineal de los vectores de la base C para obtener las coordenadas de $f(\vec{b}_i)$ en C, $[f(\vec{b}_i)]_C$.

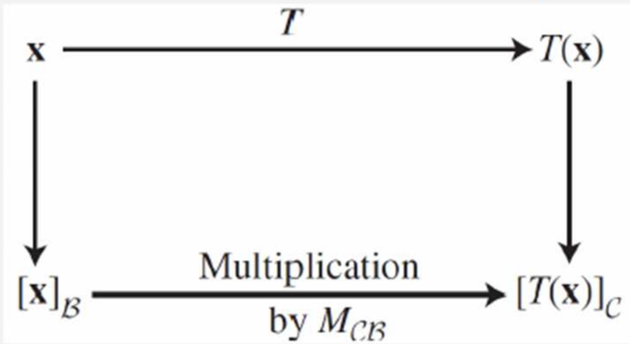
Paso 3. Construir la matriz A_{CB} cuyas columnas son los vectores coordenados $[f(\vec{b}_i)]_C$.

Nota: Análogamente, si la aplicación es de la forma $f: K^n \to K^m$ pueden sustituirse los Pasos 2 y 3 por:

Paso 2'. Reducir mediante operaciones elementales fila la matriz ampliada:

$$[\, \vec{c}_1 \;\; \vec{c}_2 \;\; \dots \;\; \vec{c}_m \mid f(\vec{b}_1) \;\; f(\vec{b}_2) \dots f(\vec{b}_n) \,] \equiv [\, C \mid f(B) \,] \overset{f}{\sim} [\, I_m \mid [f(B)]_C \,] \equiv$$
$$\left[\, \vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2 \;\; \dots \;\; \vec{e}_m \mid [f(\vec{b}_1)]_C \;\; [f(\vec{b}_2)]_C \dots [f(\vec{b}_n)]_C \,\right] = [\, I_m \mid A_{CB} \,].$$

Siendo así, se cumple $[f(\vec{x})]_C = A_{CB} \cdot [\vec{x}]_B \; \forall \vec{x} \in V$ donde $[\vec{x}]_B$ son las coordenadas de un vector arbitrario $\vec{x} \in V$ en la base B y $[f(\vec{x})]_C$ son las coordenadas de su imagen en la base C.



III.6.1. Matrices Semejantes de un Endomorfismo

Teorema. Si $f: V \to V$ es un **endomorfismo** (u operador lineal) en V y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ es una base cualquiera de V entonces:

$$[f(\vec{x})]_B = A_{BB} \cdot [\vec{x}]_B \equiv A_B \cdot [\vec{x}]_B \quad \forall \vec{x} \in V \text{ con } \boldsymbol{A_{BB}} \equiv \boldsymbol{A_B} = \left[\, [\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{b}}_1)]_{\boldsymbol{B}} \quad [\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{b}}_2)]_{\boldsymbol{B}} \cdots \quad [\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{b}}_n)]_{\boldsymbol{B}} \,\right]$$

La representación matricial de f relativa a B (o B-matriz para f) o simplemente, la **matriz de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{B}$** es $\boldsymbol{A_B}$.

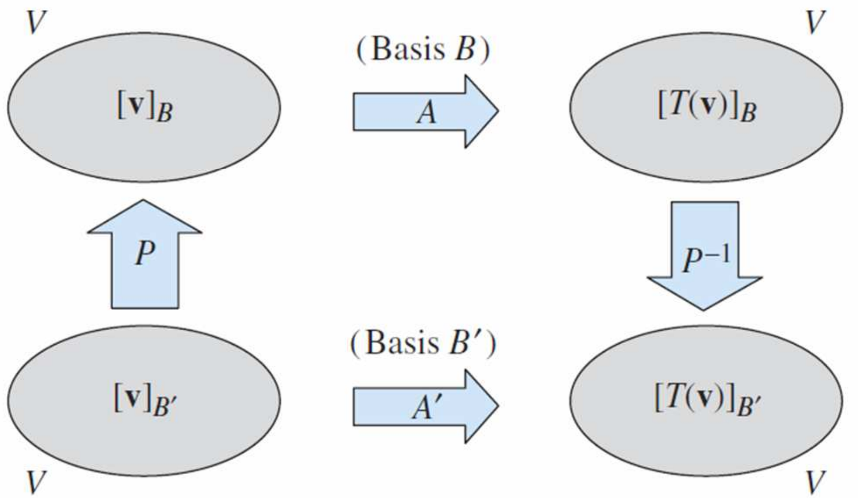
Teorema. Sea $f: V \to V$ un **endomorfismo** en el espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un cuerpo K y sea $A_{BB} = A_B$ la matriz asociada a f respecto de cierta base B de V. Si en V se **cambia la base** y llamando a $P_{B\leftarrow B'}$ a la matriz del respectivo cambio de coordenadas, entonces la **matriz asociada a $\boldsymbol{f}$ en la nueva base** B' es:

$$A'_{B'B'} = P^{-1}_{B'\leftarrow B} \cdot A_{BB} \cdot P_{B\leftarrow B'}$$

donde $P_{B\leftarrow B'}$ es la matriz de cambio de coordenadas de B' a B y $P^{-1}_{B'\leftarrow B}$ su inversa.

Nota: Así, si A_{BB} representa a f en la base B, la matriz que representa a f en B' es $P^{-1}_{B'\leftarrow B} \cdot A_{BB} \cdot P_{B\leftarrow B'}$.

Nota: Se emplea la siguiente notación $P_{B\leftarrow B'} \Rightarrow (P_{B\leftarrow B'})^{-1} = P^{-1}_{B'\leftarrow B}$



Definición. Dos matrices cuadradas A_n y A'_n del mismo tamaño se dicen **matrices semejantes** si están **asociadas a un mismo endomorfismo** de un espacio vectorial V de dimensión n ($f: K^n \to K^n$ respecto de bases adecuadas), o equivalentemente si existe una matriz regular (invertible) P_n tal que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Nota: El rango de la aplicación no cambia al cambiar de base y por tanto $rang(A) = rang(f) = rang(A')$.

Nota: De la definición de semejanza se sigue que cualesquiera dos matrices que representen en bases diferentes un mismo endomorfismo son semejantes, y lo inverso también es cierto: si dos matrices son están relacionadas por una ecuación de la forma $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. representan el mismo endomorfismo.

Nota: Algunos libros llaman a las matrices semejantes matrices similares.

Teorema. Determinante de un endomorfismo. Sea un **endomorfismo** $f: V \to V$ de un espacio vectorial V de dimensión finita. Todas las **matrices** asociadas a f en distintas bases de V tienen el **mismo determinante**, que se llama determinante del endomorfismo f y se representa por $det(f)$.

Nota: Dos matrices semejantes son también equivalentes por lo que sus rangos son iguales.

Nota: Dos matrices que sean semejantes tienen el mismo determinante, pero la inversa no es cierta.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\mathbf{x}) \arrow[d] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Multiplication}", "\text{by } {[T]_{\mathcal{B}}}"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}
$$

III.6.2. Matrices Equivalentes de un Homomorfismo

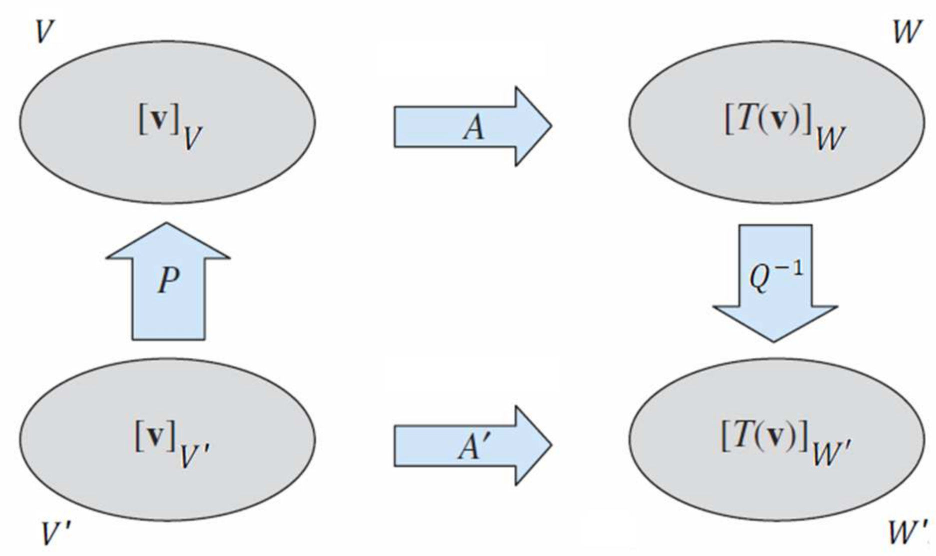
Teorema. Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal u **homomorfismo** entre espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente, ambos sobre el mismo cuerpo K. Sea A_{WV} la matriz asociada a f respecto de ciertas bases de V y W que denotaremos por V y W, respectivamente. Si en V y W se **cambian las bases** por V' y W', y llamando $P_{V \leftarrow V'}$ y $Q^{-1}_{W' \leftarrow W}$ a las matrices de los respectivos cambios de coordenadas, entonces la **matriz de *f*** $A'_{W'V'}$, **en las nuevas bases** V' y W' es:

$$A'_{W'V'} = Q^{-1}_{W' \leftarrow W} \cdot A_{WV} \cdot P_{V \leftarrow V'}$$

donde $Q_{W \leftarrow W'}$ es de tamaño $m \times m$, A_{WV} $m \times n$ y $P_{V \leftarrow V'}$ $n \times n$.

Nota: Así para toda aplicación lineal $f: V \to W$ se cumple que si A_{WV} es la matriz de la aplicación lineal respecto a las bases V y W entonces $Q^{-1}_{W' \leftarrow W} \cdot A_{WV} \cdot P_{V \leftarrow V'}$ representa a f en las nuevas bases V' y W'. O sea, realizando los cambios de coordenadas oportunos, se pasa a operar con unas nuevas bases en las que la matriz de f es $Q^{-1}_{W' \leftarrow W} \cdot A_{WV} \cdot P_{V \leftarrow V'}$.

Nota: Se usa la siguiente notación $Q_{W \leftarrow W'} \Rightarrow (Q_{W \leftarrow W'})^{-1} = Q^{-1}_{W' \leftarrow W}$.



Definición. Dos matrices $A_{m\times n}$ y $A'_{m\times n}$ de igual tamaño se dicen que son **matrices equivalentes** si están **asociadas a una misma aplicación lineal** de $f: K^n \rightarrow K^m$ (respecto de bases adecuadas), o lo que es lo mismo, si existen dos matrices P_n y Q_m invertibles tales que $A'_{m\times n} = Q_m^{-1} \cdot A_{m\times n} \cdot P_n$

Nota: El recíproco también es cierto. Dos matrices que representan la misma aplicación son equivalentes (esto es están relacionadas mediante $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$).

Teorema. Dos matrices $A_{m\times n}$ y $A'_{m\times n}$ de igual tamaño representan el mismo **homomorfismo** $f: V \rightarrow W$ si y solo si son **equivalentes**.

Nota: semejanza $\Rightarrow$ equivalencia pero equivalencia $\nRightarrow$ semejanza.

Nota: Si A y A' representan la misma aplicación o lo que es lo mismo, son equivalentes, entonces tienen el mismo rango $rang(A) = rang(f) = rang(A')$.

Teorema (resumen). Dos matrices $A_{m\times n}$ y $A'_{m\times n}$ del mismo tamaño son **equivalentes** si y solo si se verifican cualquiera de las tres condiciones siguientes (que son equivalentes entre sí):

1. Están asociadas a una misma aplicación $f: V \rightarrow W$ respecto de bases adecuadas: A_{WV} y $A'_{W'V'}$

2. $A'_{m\times n} = Q_m^{-1} \cdot A_{m\times n} \cdot P_n$ para ciertas matrices cuadradas regulares P_n y Q_m

3. Tienen igual rango: $rang(A) = rang(A')$

III.6.3. Diagonalización por equivalencia: forma canónica de una aplicación

Definición. Sea C_r la matriz canónica de equivalencia de $A_{m\times n}$. Se verifica que **A y C_r están asociadas a una misma aplicación lineal** $f: K^n \to K^m$ respecto de bases adecuadas. Así, la matriz C_r también se llama **forma normal o canónica de equivalencia** de la aplicación lineal f.

Nota: No confundir la matriz canónica de equivalencia de una aplicación f con la matriz canónica de f.

Nota: A y C_r son equivalentes, y por tanto, tienen el mismo rango $rang(A) = rang(f) = rang(C_r)$.

Teorema. Si $f: V \to W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales V y W con $rang(f) = r$, y A_{WV} es la matriz de f respecto ciertas bases V y W, entonces existen bases V' y W' en las que la representación matricial de f adopta la forma $A_{W'V'} = C_r$. Se dice que A_{WV} es **diagonalizable por equivalencia**.

Nota: Las bases en las que la matriz de f es $C_r = Q^{-1}_{W'\leftarrow W} \cdot A_{WV} \cdot P_{V\leftarrow V'}$, son V' y W', esto es, aquellas donde la representación de f es C_r. Las matrices P y Q no son únicas.

Box III.6.2. Diagonalización por equivalencia

Sea $A_{WV} = A_{m\times n}$ la matriz de la aplicación lineal $f: V \to W$ en las bases V del dominio (de dimensión n) y W del codominio (dimensión m). El siguiente proceso proporciona las bases V' y W' en las que la representación matricial de f es $A_{W'V'} = C_r$, siendo C_r la matriz canónica de equivalencia de A.

Paso 1. Aplicar operaciones elementales E^f a las filas de la matriz ampliada por filas $[\ A \mid I_m\ ]$ hasta obtener una forma escalonada por filas U esto es $[\ A \mid I_m\ ] \overset{f}{\sim} [\ U \mid F\ ]$.

Paso 2. Aplicar operaciones elementales E^c a las columnas de la matriz ampliada por columnas $\left[\frac{U}{I_n}\right]$ siendo U la matriz obtenida en el paso 1 hasta obtener C_r, esto es $\left[\frac{U}{I_n}\right] \overset{c}{\sim} \left[\frac{C_r}{C}\right]$.

Nota: Los pasos 1 y 2 consisten exactamente en hallar la factorización de la matriz $C_r = F \cdot A \cdot C$.

Paso 3. La matriz $F = E^f(I_m)$ del paso 1 es la matriz Q^{-1} y la matriz $C = E^c(I_n)$ del paso 2 es la matriz P, las cuales permiten escribir $C_r = Q^{-1}_{W'\leftarrow W} \cdot A_{WV} \cdot P_{V\leftarrow V'}$.

Nota: P y Q no son únicas, ya que F y C no lo son: con otras operaciones elementales se obtendrían matrices P y Q distintas, y por tanto hay múltiples bases distintas en las que la matriz de f es C_r.

Nota: $P_{V\leftarrow V'} = [\ [\vec{v}'_1]_V\ \ [\vec{v}'_2]_V\ \ \dots\ \ [\vec{v}'_n]_V]$ y $Q_{W\leftarrow W'} = [\ [\vec{w}'_1]_W\ \ [\vec{w}'_2]_W\ \ \dots\ \ [\vec{w}'_m]_W]$ permiten hallar los vectores de las bases $V' = \{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n\}$ y $W' = \{\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_m\}$

Apéndice: Transformaciones geométricas

Elementary Matrices for Linear Transformations in the Plane

Reflection in y-Axis

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflection in x-Axis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflection in Line $y = x$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Horizontal Expansion ($k > 1$) or Contraction ($0 < k < 1$)

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vertical Expansion ($k > 1$) or Contraction ($0 < k < 1$)

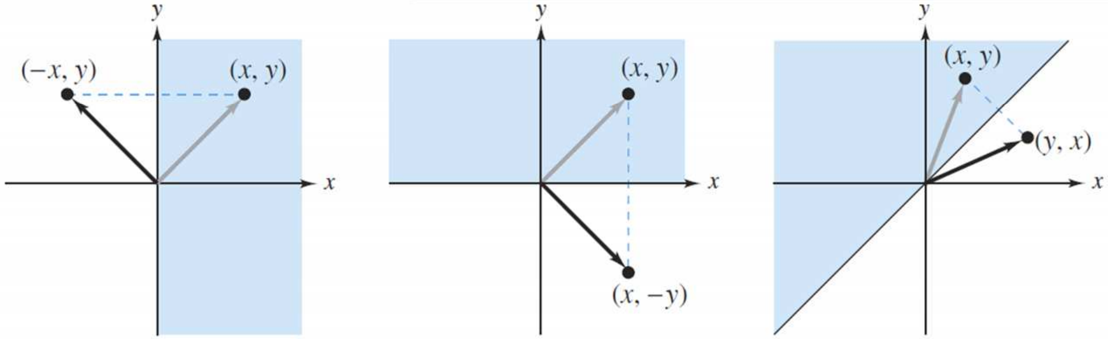
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Horizontal Shear

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vertical Shear

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



Reflections in the Plane

(a) Reflection in the y-axis:

$$T(x, y) = (-x, y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

(b) Reflection in the x-axis:

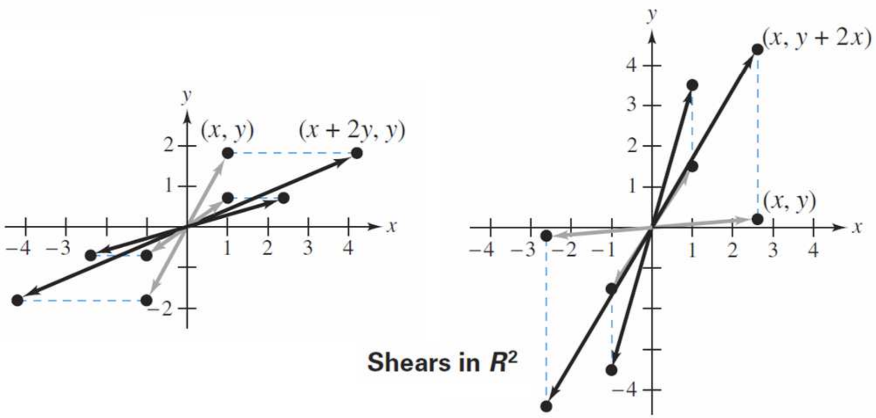
$$T(x, y) = (x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

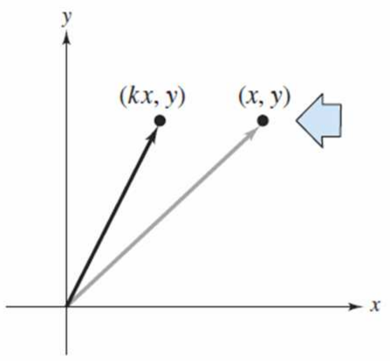
(c) Reflection in the line $y = x$:

$$T(x, y) = (y, x)$$

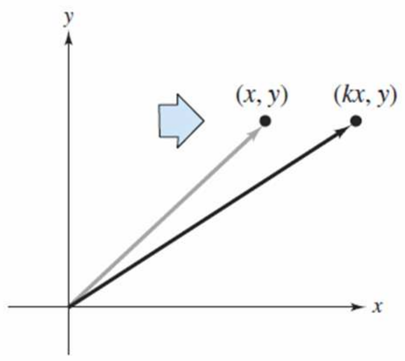
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Shears in R^2



Contraction $(0 < k < 1)$

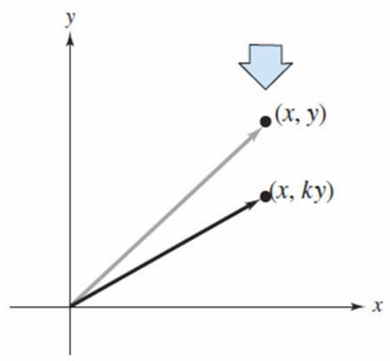


Expansion $(k > 1)$

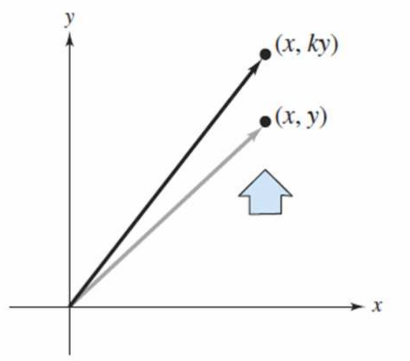
(a) Horizontal contractions and expansions:

$$T(x, y) = (kx, y)$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$



Contraction $(0 < k < 1)$



Expansion $(k > 1)$

(b) Vertical contractions and expansions:

$$T(x, y) = (x, ky)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

Rotation About the x-Axis

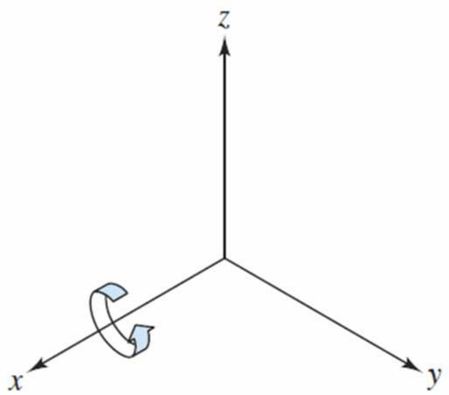
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation About the y-Axis

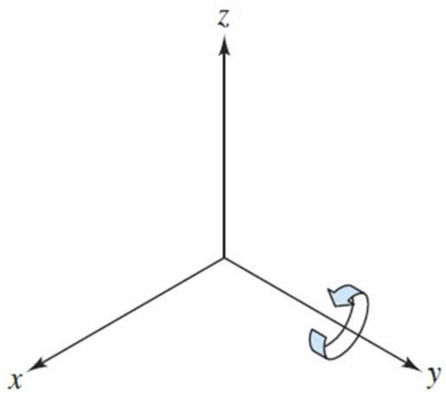
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation About the z-Axis

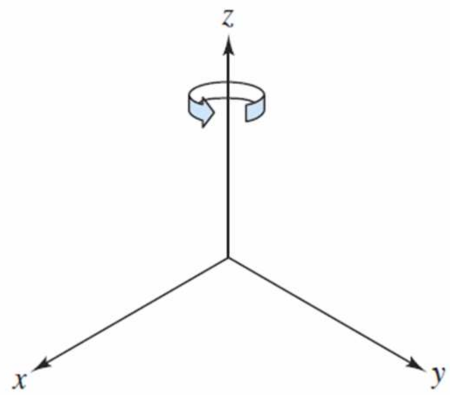
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotation about the x-axis



Rotation about the y-axis



Rotation about the z-axis