Tema 4: Sistemas Trifásicos

Contenido

1. Introducción a los sistemas trifásicos

1.1 Suministro de potencia eléctrica en 3 y más fases

A lo largo de los temas 2 y 3 vimos las diferentes maneras de generar potencia eléctrica y qué implicaciones tenía esto sobre las señales y los tipos de potencia generada. Una de las cosas que más pueden chocar es el hecho de tener una potencia eléctrica oscilante. Sin duda, esto no es lo óptimo posible: el que tengamos un generador suministrando potencia sólo en las crestas de las señales, por mucho que alcancemos un valor constante debido al desfase.

Esto llevó a plantearse a los ingenieros eléctricos de finales del siglo XIX (*Ferraris*, *Dobrovolsky*, *Wenström, Hopkinson y por supuesto*, *Tesla*) a buscar maneras alternativas de suministrar potencia de manera más eficiente o por lo menos, de manera que compensase esos valles. En ese sentido hay dos estrategias posibles: o bien aumentar la frecuencia y suministrar varias señales acopladas a diferentes frecuencias, o bien enviar a la misma frecuencia varias señales.

El problema de generar señales a varias frecuencias está claro: la generación. Como sabemos, girando un bobinado podemos inducir una diferencia de potencial de manera sinusoidal de acuerdo con la velocidad de giro (y expandiremos estos conocimientos en el bloque 3 de la asignatura). Sin embargo, combinar varias velocidades de giro requiere varios generadores, con lo cual, es necesario invertir en generadores que hay que mover a velocidades distintas: estamos aumentando el nivel de complejidad y de necesidades de potencia sin ninguna ventaja aparente.

Por otro lado, podemos enviar varias señales a través de nuestros cables de cobre. Esto implicaría que tendríamos que usar tantos cables como señales mandemos. Pero como idea es interesante. Además, que, si dichas señales no están en fase, podríamos tener una diferencia de potencial continuamente disponible entre los cables.

Otra ventaja, podríamos poner en lugar de un único bobinado en nuestro generador varios, de tal manera que fuéramos induciendo diferentes señales para un mismo giro, desfasadas entre ellas un cierto ángulo, tanto como ángulos mecánicos definamos. Esto parece un buen camino. Por último, si compensamos las subidas y las bajadas de las crestas de las diferentes señales podríamos pensar en eliminar el término de potencia fluctuante y dejarlo constante. Eso lo estudiaremos más adelante en detalle.

Entonces, vemos que generar potencia eléctrica en varias señales desfasadas nos aporta a priori bastantes ventajas. Además, si nos fijamos, generamos por cada cable que añadimos más potencia. En una situación de 3 fases, añadimos 1 cable más incrementando así la ratio potencia/cobre necesario de una manera muy eficiente.

A priori uno podría seguir aumentando el número de fases indiscriminadamente. Así transmitir más y más potencia, si bien el crecimiento de esa ratio no sería lineal (seguimos necesitando más cables para generar más potencia. Si bien existen experimentos con 6 y 12 fases de transmisión, el tipo de complejidad que implican no sólo durante la transmisión sino durante la transformación lleva a quedarnos sólo con 3 fases que es dónde verdaderamente la ratio compensa económica y logísticamente. Otro problema de la transferencia multifásica es que las torres de transmisión necesitarían de un muy buen aislamiento del cableado para poder transmitir dicha potencia sin generar efectos inductivos y que necesitaríamos generadores muy grandes para poder incorporar los bobinados de manera física, llevando a tener que mover elementos de mayor tamaño.

Con lo cual las ventajas de la generación de tensión (y por lo tanto de potencia eléctrica) a partir de tres fases las podemos reconocer tanto en la generación (utilizar un único generador compacto) como en la transmisión (emisión de potencia de manera continuada, aumento de la ratio de transmisión de potencia eléctrica, de 1 a 3, sin aumentar la cantidad de cableado necesario, de 2 a 3 cables). ¿Qué le sucede al consumo? En la práctica el consumo se hace de manera monofásica, con lo cual no aportará mayor beneficio sobre el mismo, sin embargo, si que veremos eficacia a la hora de disponer de transformadores que conviertan la señal de 3 en 3 respecto de otros tipos multifásicos (menor complejidad de distribución y fabricación).

La idea de instalar 6 o más fases sigue siendo un campo por explorar. Independientemente de si es logísticamente viable, se consigue tener más potencia de manera directa. Prueba de que logísticamente sería viable es que hoy día hay torres de transmisión que soportan varias líneas trifásicas sin problemas (aunque son estructuralmente más complejos).

Es un problema que aparece de vez en cuando y se hacen algunos avances, pero hasta que algún país con suficiente masa crítica (del estilo de países como China o India) no decida invertir en desarrollarlo, de momento los sistemas trifásicos son el estándar de transmisión de potencia eléctrica.

1.2 Desfases, notación de trabajo y régimen fasorial

Bien, hemos visto entonces que la transferencia de potencia se realiza, debido a una serie de ventajas, a partir de 3 señales de tensión desfasadas entre sí. Para poder estudiar este tipo de sistemas y de líneas de transmisión, vamos a tener que modelizar y el problema de tal manera que encontremos un circuito o grafo equivalente con sus propiedades asociadas. Además, al ser corriente alterna la que transmitimos, podremos aplicar todas nuestras herramientas de análisis fasorial para entender y trabajar mejor con este tipo de problemas. Veamos entonces cómo se traduce la notación y herramientas que hemos desarrollado en los temas anteriores para estudiar este tipo de sistemas.

Lo primero es caracterizar nuestra señal de tensión que sale de nuestro generador. De acuerdo con lo que hemos visto hasta ahora, tendremos 3 señales, desfasadas un ángulo mecánico en su generación que se va a traducir en un desfase entre ellas desde un punto de vista eléctrico o fasorial.

$$
\begin{aligned}
u_{AA'}(t) &= \sqrt{2} \cdot U \cos(\omega t) \\
u_{BB'}(t) &= \sqrt{2} \cdot U \cos(\omega t - 120^{\circ}) \\
u_{CC}(t) &= \sqrt{2} \cdot U \cos(\omega t - 240^{\circ}) = \sqrt{2} \cdot U \cos(\omega t + 120^{\circ})
\end{aligned}
$$

Dónde, lógicamente, el valor eficaz de todas ellas ha de ser el mismo ya que proceden del mismo generador.

Hemos elegido 120º como ángulo de desfase para nuestras 3 señales ya que así queda distribuido de manera simétrica el problema eléctrico. En general, no es necesario que las 3 fases estén desfasadas el mismo valor o que tengan el mismo valor eficaz, sin embargo, si queremos recuperar todas las propiedades y ventajas que hemos visto anteriormente, deberemos establecer un problema simétrico desde el punto de vista de los ángulos, tanto mecánicos (distribución de las fases en el generador) como eléctricos (valor del desfase de cada señal).

Como podemos ver, hemos elegido como el origen de fases una de las tensiones, en este caso AA’ (veremos en breve la verdadera notación de estas fases, por el momento dejémoslas como referidas a cada punto del generador).

Una propiedad interesante de la definición de las señales de esta manera es que la suma de las tres señales de manera instantánea es nula. Así, no necesitaremos un neutro como tal (dicho de otra manera, un cable de regreso al generador como sucedía en corriente continua) ya que las intensidades, siempre que se enfrenten a la misma impedancia en cada una de las 3 fases mantendrán esta propiedad y su suma en un nodo será nula. A este tipo de sistemas los llamaremos equilibrados. Si cada fase sufre un “desfase” distinto, es decir, se enfrenta a impedancias diferentes, necesitaremos un cable de retorno o “neutro”. En general, las líneas de transmisión cuentan con 4 cableados tipo *Litz*, uno por cada fase y un neutro por si surgen desequilibrios en la carga

Por último, estableciendo el diagrama fasorial de nuestras 3 tensiones tendremos:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AA'} &= U\angle 0^{\circ} \\ \underline{U}_{BB'} &= U\angle -120^{\circ} \\ \underline{U}_{CC} &= U\angle +120^{\circ} \end{aligned}$$

Que, efectivamente, al hacer su diagrama fasorial quedan anulados entre ellos.

Hemos fijado por lo tanto un esquema fasorial de nuestras tres señales de trabajo desfasadas los 120º. El diagrama fasorial en la que llamaremos “secuencia directa” partirá del fasor tensión origen de fases (en nuestro caso el AA’), luego pasará al siguiente fasor desfasado -120º respecto del origen (BB’) y finalmente cerraremos el diagrama con el fasor CC’, a -240º del origen, en el segundo cuadrante.

Si nos fijamos, a estas señales les hemos puesto el subíndice AA’, BB’ y CC’. La razón se debe a que podemos llamar a cada uno de los 3 bobinados del generador A, B y C, y, por lo tanto, los dos extremos del circuito de cada bobinado corresponderán respectivamente a A y a A’, a B y B’, etc.

Bien, una vez tenemos definidas las señales de trabajo, vamos a pasar a implementarlas en nuestros esquemas de circuitos que hemos visto hasta ahora y a ir desarrollando las herramientas para estudiar este tipo de circuitos.

2. Representación trifásica y tipos de conexiones

2.1 El circuito Trifásico

Para poder trabajar con un sistema trifásico debemos de no sólo adaptar las tres tensiones generadas a un régimen fasorial sino también esquematizar en forma de circuito el problema.

Así, una vez ubiquemos nuestras mallas, nodos y demás elementos familiares, podremos estudiar las diferentes variables eléctricas del problema y trabajar con la transferencia de potencia de manera apropiada.

A priori disponemos de 3 señales generadas, así que nada nos impide ubicar 3 generadores cada uno con su señal correspondiente. El primer impulso es el de colocar los 3 generadores en serie (porque en paralelo, sabemos bien que no aportarían mayor nivel de tensión) pero sabemos que la suma de las tres señales es nula, con lo que no es la manera de colocarlos.

De hecho, si enfocamos bien un poco mejor el modelo que queremos conseguir, cada generador debe provocar su propia intensidad para que así podamos suministrar la potencia deseada. Y cada intensidad irá desfasada por una impedancia, con lo cual, a priori podríamos crear 3 circuitos, cada uno con un generador y una carga.

Bien, hemos llegado entonces a un modelo de 3 circuitos: 3 generadores, 3 intensidades, 3 cargas, vamos a llamar a cada una con su apellido A, B, C (las fuentes recordemos que tenían el AA' por la denominación que utilizamos anteriormente). Ahora bien, ¿son estos circuitos independientes? Lógicamente no, el sistema trifásico de tensiones debe tener el mismo origen de potencial ya que la tensión que se está generando es siempre respecto de dicho origen si bien desfasada los grados eléctricos correspondientes.

Esto nos llevará a "unir" a los generadores en un mismo nodo, luego de cada uno de ellos saldrá una rama que vaya a parar a una carga para después regresar al mismo nodo de partida. Así tendremos 3 intensidades que recorrerán cada una de las ramas y que se unirán siguiendo el primer lema de Kirchhoff en el nodo de unión.

Existen varias formas de llevar a un esquema gráfico dicha representación. Sin embargo, la manera normalizada de hacerlo es repartir las tres fases en forma de "*estrella*", es decir, de manera que van teniendo 120º gráficamente una respecto de la otra. Así los grados mecánicos, eléctricos y gráficos coinciden.

Además, esta representación nos permite visualizar la manera de conexión de las cargas (en estrella, en triángulo, etc.) y nos permite también, de manera visual entender que los tres hilos están al mismo potencial respecto del nodo de unión y que entre ellos habrá una diferencia de potencial definida. Vemos también claramente a qué diferencia de potencial está cada una de las impedancias y qué intensidad pasa por ellas.

A cada uno de los tres circuitos lo llamaremos por abuso del lenguaje "fases" del sistema trifásico. Y como veremos, tendrán diferente notación en función del país o de la normativa. Por el momento, mantengamos las fases A, B y C y el nodo de unión, o de regreso que vamos a llamar Neutro o fase Neutra.

Una vez descrito el grafo trifásico, vamos a ver cómo quedan definidas las intensidades en este problema. Para ello simplemente debemos aplicar la ley constitutiva con cada una de las impedancias sobre las tensiones de cada generador:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{AA'}}{\underline{Z}_A}, \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BB'}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CC}}{\underline{Z}_C}$$

Lógicamente, cada una de las cargas de cada fase marcará un desfase dado, teniendo entonces que cada intensidad presenta un desfase determinado. Al llegar las tres corrientes al nodo de unión o neutro, se sumarán de acuerdo con el primer lema de Kirchhoff. Aunque sea un único nodo, viendo la representación gráfica que hacemos del circuito trifásico, podemos identificarlo como una “rama” de unión entre la conexión de las tres cargas y los tres generadores.

Así, aplicando el primer lema de Kirchhoff a ese nodo:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_N$$

Siendo $\underline{I}_N$ la intensidad que circularía por esa falsa rama que va del nodo de unión de las cargas hasta el nodo de unión de los generadores (que obviamente, es el mismo). Una vez llegue al punto de unión se volverá a separar en las intensidades mencionadas, con lo que, a priori, el valor de la intensidad que circula por el neutro no es vital para el análisis del circuito.

En el caso específico en que las cargas sean simétricas, es decir, iguales en módulo y argumento, tendremos que la intensidad que circula por el neutro será nula directamente, es decir, no hará falta un cable de “retorno” para el sistema trifásico. Esta propiedad es una ventaja más para tener en cuenta a favor de los sistemas trifásicos: a priori, haría falta un cable menos (3 en lugar de cuatro) para transferir potencia eléctrica siempre y cuando las cargas conectadas sean idénticas en modo y en fase. A esta situación particular se le llama sistema trifásico equilibrado y es deseable para realizar la transmisión de potencia a gran distancia (y también lógicamente para simplificarlos).

El diagrama fasorial de las intensidades en el caso de tener un sistema equilibrado será simplemente una rotación en sentido horario respecto del de las tensiones igual al valor del ángulo impuesto por la carga conectada y una contracción igual al módulo de la impedancia. En el caso de que la carga fuese capacitiva, el giro lógicamente sería en adelanto, es decir, en sentido antihorario (*en caso de no asimilar bien este concepto, recomiendo regresar al tema 3 de la asignatura y estudiar los detalles de la definición del factor de potencia*). De la misma manera, si el módulo de la impedancia es menor que la unidad, en lugar de contraer, expandiremos el fasor intensidad.

Como vemos, cada una de las tensiones de nuestras 3 fases están definidas como la diferencia de potencial entre el nodo neutro y el de cada una de las fases. Sin embargo, existe otra opción y es definir la tensión llamada de línea, que refiere la diferencia de potencial entre 2 fases en lugar de respecto del neutro.

Para poder establecer un sistema de notación medianamente consistente y así, no perdernos a la hora de trabajar con tensiones de línea y de fase, vamos a fijar ahora los nombres de cada una de ellas. Existen varios estándares de notación según la región del mundo en la que nos encontremos. Nosotros a partir de ahora llamaremos a cada fase R (de referencia de fases, es decir, la que está a 0º), S (a -120º siguiendo la secuencia directa) y T (a +120º).

Consecuentemente, a las tensiones simples o de fase, las llamaremos: $\underline{U}_{RN}, \underline{U}_{SN}$ y $\underline{U}_{TN}$ y a las tensiones complejas o de línea las llamaremos: $\underline{U}_{RS}, \underline{U}_{ST}$ y $\underline{U}_{TR}$.

Como vemos, vamos a seguir la secuencia directa (R->S->T, es decir, 0, -120º, -240º) a la hora de nombrar y trabajar con las tensiones complejas. Al nodo de unión lo llamamos Neutro (N) como punto común de origen potencial, también lo llamaremos tierra lógicamente.

Los valores de línea son importantes a la hora de realizar cálculos con cargas conectadas en triángulo y, sobre todo, para caracterizar la diferencia de potencial disponible entre dos fases. Podemos estimar su valor a partir de los valores fasoriales de las tensiones de fase simplemente restando.

NOTA: *El abuso de notación a la hora de estudiar los circuitos trifásicos es bastante común. Se habla de fase para referirse tanto a las R, S, T y N como para hablar de la fase de la impedancia o del desfase entre tensión e intensidad. Para evitar esta confusión, se suele acudir también a llamar hilos a R, S, T y N, pero no siempre lo encontraremos así. Cuidado y ¡Ojo con la dislexia!*

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{RN} &= U \\ \underline{U}_{SN} &= U\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \underline{U}_{TN} &= U\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} \underline{U}_{RS} &= \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{SN} = U\left(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot U\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot U\angle 30^{\circ} \\ \underline{U}_{ST} &= \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{TN} = U\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot U(-j) = \sqrt{3}\cdot U\angle 270^{\circ} \\ \underline{U}_{TR} &= \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{RN} = U\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \sqrt{3}\cdot U\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot U\angle 150^{\circ} \end{aligned}\right.$$

Y, fijándonos bien en los ángulos que se obtienen, tenemos que

$$\begin{aligned} \underline{U}_{RS} &= \sqrt{3}\cdot\underline{U}_{RN} e^{j30^{\circ}} \\ \underline{U}_{ST} &= \sqrt{3}\cdot\underline{U}_{SN} e^{j30^{\circ}} \\ \underline{U}_{TR} &= \sqrt{3}\cdot\underline{U}_{TN} e^{j30^{\circ}} \end{aligned}$$

Es decir, que para obtener las tensiones de línea bastará con rotar 30º las tensiones de fase y escalarlas por un factor raíz de 3. Dado que la rotación es en el sentido antihorario y la fase R es la referencia de fases, diremos que las tensiones de línea llevan un adelanto de 30º respecto de las de fase, independientemente de la carga que esté conectada y cómo esté conectada.

Es importante darse cuenta de que el factor raíz de 3, una vez pasemos de fasor a una señal temporal irá multiplicando al factor de raíz de 2, con lo que una señal temporal trifásica llevará "de costumbre" un término raíz de 6 multiplicando. Aunque el valor eficaz será, lógicamente, raíz de 3 veces el valor eficaz de fase, es decir:

$$U_F = U, \quad U_L = \sqrt{3}\cdot U$$

En lo referente a las intensidades, tendremos también intensidades de línea (las que vemos en cada una de las ramas del circuito trifásico) y las de fase, asociadas a las cargas.

Hemos supuesto hasta ahora que la carga trifásica se conecta de tal manera que cada generador tenga su carga asociada. Esto no es necesariamente la única manera de hacerlo. Vimos en el tema 2 que existían diferentes equivalencias entre las cargas o elementos pasivos conectados en estrella y en triángulo. De dónde podemos sacar como conclusión que, de la misma manera que situamos las cargas en estrella en las 3 líneas trifásicas, podremos hacerlo de manera equivalente, sin romper el equilibrio, en triángulo.

A continuación, vamos a ir estudiando una a una las diferentes conexiones posibles de nuestras cargas trifásicas para ver cómo plantear el problema eléctrico y cómo operar y trabajar con el mismo.

2.2 Conexión en Estrella equilibrada

Bien, la primera de las diferentes opciones posibles es la más directa, la que hemos visto hasta ahora: la conexión en estrella equilibrada.

Como hemos visto anteriormente, la conexión será con una impedancia en estrella cuyo valor por fase en módulo y argumento será el mismo: $Z_R = Z_S = Z_T = Z\angle\varphi$.

Con lo cual, el cálculo de las intensidades será directo: bastará con dividir el módulo de cada una de las tensiones de fase entre el valor del módulo de la impedancia y desfasar cada una de ellas un ángulo φ en el sentido horario.

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} = \frac{U_F}{Z}\angle -\varphi, \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} = \frac{U_F}{Z}\angle -120^{\circ} - \varphi, \quad \underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T} = \frac{U_F}{Z}\angle 120^{\circ} - \varphi$$

Hasta ahora sólo hemos hablado de las intensidades de línea ya que, a efectos del generador sólo podemos definir este tipo de intensidades. Sin embargo, una vez conectadas las cargas, podemos definir intensidades de fase a aquellas que circulan por cada una de las fases de las cargas.

A las intensidades de fase, las llamaremos: $\underline{I}_1,\ \underline{I}_2,\ \underline{I}_3$ y en la conexión en estrella serán las que pasen por las cargas de las fases R, S, T respectivamente, con lo cual, iguales a las de línea. Cuando la carga sea más complicada, por ejemplo, un triángulo, estas intensidades no coincidirán lógicamente.

A continuación, vamos a analizar qué le sucede al neutro en este tipo de conexión. Sabemos ya que, por ser equilibrado y la suma de las tres señales en tensión igual a cero, la suma de las tres intensidades de línea (y de fase) serán cero y por lo tanto no circulará ningún tipo de intensidad a lo largo del neutro.

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \frac{U_F\angle -\varphi}{Z}\left(1 + e^{-j120^{\circ}} + e^{j120^{\circ}}\right) = 0 \text{ A}$$

Pero a priori, aunque lo podemos intuir, no sabemos nada de cuánto vale la diferencia de potencial entre el neutro de la carga y el neutro del generador (el nodo de unión de las fases para cada elemento).

Sin embargo, aplicando el segundo Lema de Kirchhoff en cada uno de nuestros circuitos y sumando:

$$\underline{U}_{RN} - \underline{U}_{NN'} + \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{NN'} + \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{NN'} = Z\overbrace{\left(\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T\right)}^{=0} = 0 - 3\underline{U}_{NN'} \rightarrow \underline{U}_{NN'} = 0$$

Con lo cual podemos asegurar ahora que los centros de las estrellas están al mismo nivel potencial y que, por lo tanto, el estudio del problema eléctrico puede hacerse a partir de monofásicos equivalentes.

Como ejemplo de aplicación de este tipo de conexiones, proponemos un circuito trifásico equilibrado con una carga de línea asociada, es decir, un divisor de tensión trifásico. Nos vamos a tener que acostumbrar, en general a convertir nuestros problemas conocidos y comprendidos de corriente alterna monofásica a nuestros esquemas trifásicos.

El planteamiento del ejemplo es sencillo, dado una conexión trifásica equilibrada, con una carga de línea inductiva de impedancia $1+2j$. Este problema, como decíamos antes es un divisor de tensión, pero trifásico.

Como dato, sólo tenemos el valor del módulo de la tensión de línea (380 V) sobre la carga (es decir, las U_{out} de línea) y de la impedancia de dicha carga conectada en estrella equilibrada. Además, nos dicen que tomemos el origen de fases en la tensión R'N', es decir la fase R de la carga. Esto se debe principalmente a que así simplificamos el cálculo, pero como hemos visto, lo usual es tomar el origen de fases en la fase R del generador.

Con lo cual, para poder llegar a resolver el problema, debemos pasar al monofásico equivalente, sin embargo, para poder llegar a eso necesitamos primero el valor de la tensión de fase.

Aplicando las relaciones que hemos visto, podríamos convertir las tensiones de línea en tensiones de fase, pero recordando que estamos sobre la carga, es decir, sacaríamos las U_{out} de fase, no las tensiones de fase del generador. (En caso de no ver esto claro, conviene repasar bien los ejemplos de divisores de tensión que hemos visto hasta la fecha tanto en alterna como en trifásica).

Bien, para hacer esa conversión de línea a fase, miramos nuestras relaciones y llegamos a que tendremos que dividir entre raíz de 3. Como el origen de fases está en la fase R', no hay problema más allá de esto:

$$\underline{U}_{R'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^{\circ} \quad [\mathrm{V}],\ \ \underline{U}_{S'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle -120^{\circ} \quad [\mathrm{V}],\ \ \underline{U}_{T'N'} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle +120^{\circ} \quad [\mathrm{V}]$$

Como conocemos el valor de la impedancia de la carga trifásica y de la tensión en las fases de esta, podemos sacar fácilmente la intensidad:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R'N'}}{Z_L} = \frac{380/\sqrt{3}}{38/\sqrt{3}}\angle -45^{\circ} = 10\angle -45^{\circ} \quad [\mathrm{A}]$$

Y las intensidades de las fases S y T tendrán el mismo módulo y el desfase de 120° correspondiente:

$$\underline{I}_S = 10\angle -45-120^{\circ} = 10\angle -165^{\circ} \quad [\mathrm{A}], \qquad \underline{I}_T = 10\angle -45+120^{\circ} = 10\angle +75^{\circ} \quad [\mathrm{A}]$$

Con el valor de la intensidad y de la tensión en la carga podemos entonces plantear el monofásico equivalente para la fase R. Una vez resuelto, los valores de la fase S y T serán idénticos, pero desfasados los 120° correspondientes. Como por el neutro no circula ninguna intensidad (carga equilibrada), la carga de línea que se encuentra en el mismo no consume ninguna diferencia de potencial y, por lo tanto, no es necesario añadirla en nuestro circuito monofásico equivalente.

El circuito restante queda como un divisor de tensión usual, en el que nuestra incógnita eléctrica será la tensión en el generador.

Para calcularla:

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_{R'N'} + Z_R \underline{I}_R = \left(Z_L + Z_R\right)\underline{I}_R = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+2j\right)\left(1-j\right) + \frac{380}{\sqrt{3}} = 240.7\angle 1.7^{\circ}$$

Con lo cual, tenemos las tensiones de fase del generador:

$$\underline{U}_{RN} = 240.7\angle 1.7^{\circ}\ \ [\mathrm{V}],\ \ \underline{U}_{SN} = 240.7\angle -118.3^{\circ}\ \ [\mathrm{V}],\ \ \underline{U}_{TN} = 240.7\angle 121.7^{\circ}\ \ [\mathrm{V}]$$

Y para obtener las de línea de la transmisión trifásica multiplicaremos por raíz de 3 y adelantaremos 30° como vimos anteriormente:

$$\underline{U}_{RS} = 416.9\angle 31.7^{\circ}\ \ [\mathrm{V}],\ \ \underline{U}_{ST} = 416.9\angle -88.3^{\circ}\ \ [\mathrm{V}],\ \ \underline{U}_{TR} = 416.9\angle 151.7^{\circ}\ \ [\mathrm{V}]$$

Y así quedaría el problema resuelto. Como vemos, siempre que tengamos las cargas equilibradas, resolver el problema trifásico no es un salto conceptual necesariamente complejo. Es importante, eso sí, ser consistente con la notación e ir entendiendo los pasos de cálculo. Lógicamente, la tensión de línea deberá ser mayor que la de fase, si esto no es así debería darnos un indicativo de que estamos cometiendo un error. De la misma manera, las fases de las tensiones deben estar desfasadas 120° entre sí, independientemente del origen de estas.

Con esto, queda vista la conexión en estrella equilibrada, vamos ahora con la conexión en triángulo.

2.3 Conexiones en Triángulo equilibrado

De la misma manera que podemos pensar en una carga conectada en estrella, utilizando las equivalencias obtenidas en el teorema de Kenelly (ver tema 2) podemos obtener el valor de las impedancias equivalentes entre una carga en triángulo y una carga en estrella.

Como recordaremos, el teorema de Kenelly implicaba un cálculo ligeramente más complejo que el resto de las equivalencias. Y más aún ahora que trabajamos con impedancias en lugar de resistencias. Sin embargo, tenemos la suerte de trabajar (de momento) con cargas equilibradas. Así, podremos resumir las equivalencias del teorema de Kenelly de la siguiente manera:

$$Z_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{3}Z_{\Delta} \leftrightarrow Z_{\Delta} = 3Z_{\mathrm{Y}}$$

Con lo cual, a priori podríamos pasar de una conexión en estrella equilibrada a una en triángulo equilibrada sin problemas. Esto sólo es posible si por la rama neutro (el nodo NN' que veíamos en la sección anterior) no circula ninguna intensidad (es decir, que los centros de las estrellas están al mismo nivel de potencial, convirtiendo esa rama en un nodo), en caso contrario nos quedaría el hilo neutro “colgando” al pasar a triángulo.

Para analizar las cargas en triángulo uno podría simplemente pasar a estrella equivalente y continuar sin problemas. Sin embargo, dado que podríamos tener un caso de triángulo desequilibrado, vamos a indagar un poco en cómo analizar la carga en triángulo sin pasar por una estrella equivalente.

En este caso, deberemos definir corrientes de línea y fase (de la carga) distintas. Tiene sentido, si miramos cómo se conecta la carga triangular a la línea trifásica vemos que aparecen 3 nodos: uno por cada hilo de la línea trifásica. Con lo cual, las intensidades se separarán y, por lo tanto, serán distintas las de línea y las de fase. La pregunta es ahora, ¿Podemos calcular una equivalencia directa entre intensidades de fase e intensidades de línea en este problema al igual que hacíamos en el caso de la estrella?

Pues, lógicamente si, de ahí que nos hayamos hecho la pregunta… Bien, vamos a ver cómo hacerlo. Primero, como ya hicimos en el caso de la conexión estrella-estrella vamos a darle la siguiente notación a cada una de ellas:

A las intensidades de línea (las que circulan por los hilos trifásicos desde los generadores) las llamaremos respectivamente: $\underline{I}_R,\ \underline{I}_S,\ \underline{I}_T$. Hasta aquí ninguna novedad. A las intensidades que van por cada una de las cargas del triángulo las llamaremos: $\underline{I}_1,\ \underline{I}_2,\ \underline{I}_3$ siendo 1 la que va de R' a S', 2 la que va de S' a T' y 3 la que va de T' a R', es importante destacar que no sólo estamos llamando las intensidades de fase de la carga por un subíndice, también por una dirección (de R' a S', etc.). Otra manera común de encontrar estas intensidades es: $\underline{I}_{\Delta R},\ \underline{I}_{\Delta S},\ \underline{I}_{\Delta T}$, que es equivalente al 1, 2, 3 que hemos visto anteriormente.

Por lo tanto, si aplicamos la ley de Ohm en las cargas del triángulo necesitaremos la t<u>ensión de línea</u> (¡cuidado con el trabalenguas!): la carga conectada entre R' y S', por la que circula la intensidad $\underline{I}_1$, cumplirá que:

$$Z_1\angle\varphi = \frac{\underline{U}_{R'S'}}{\underline{I}_1} \rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{R'S'}}{Z_1\angle\varphi} = \frac{\sqrt{3}\ \underline{U}_{R'N'}e^{j30^\circ}}{Z_1\angle\varphi} = \frac{\overbrace{\sqrt{3}\ U_F}^{I_F}}{Z_1}\angle 30^\circ - \varphi$$

Es decir, que la intensidad de la fase 1 de la carga tendrá un desfase de $30^\circ - \varphi$, siendo φ el ángulo que impone la impedancia de cada fase de la carga en triángulo.

El resto de las intensidades de fase se obtendrán simplemente desfasando los grados adecuados:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{R'S'}}{Z\angle\varphi} = I_F\angle\left(30^\circ - \varphi\right),\quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{S'T'}}{Z\angle\varphi} = I_F\angle\left(-90^\circ - \varphi\right),\quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{T'R'}}{Z\angle\varphi} = I_F\angle\left(150^\circ - \varphi\right)$$

Bien, por último, vamos a tratar de recuperar las intensidades $\underline{I}_R,\ \underline{I}_S,\ \underline{I}_T$ y estudiar la relación que hay entre las intensidades de línea y de fase. Para ello "simplemente" planteamos el primer lema de Kirchhoff en cada uno de los nodos (vértices) del triángulo. Para ello, es importante prestar atención a las direcciones de las intensidades de fase:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = I_F e^{-j\varphi}\left(e^{j30^\circ} - e^{j150^\circ}\right) = \sqrt{3} I_F e^{-j\varphi} = \sqrt{3}\underline{I}_1 e^{-j30^\circ} \\
\underline{I}_S &= \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = I_F e^{-j\varphi}\left(e^{-j90^\circ} - e^{j30^\circ}\right) = \sqrt{3} I_F e^{-120^\circ - j\varphi} = \sqrt{3}\underline{I}_2 e^{-j30^\circ} \\
\underline{I}_T &= \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = I_F e^{-j\varphi}\left(e^{j150^\circ} - e^{-j90^\circ}\right) = \sqrt{3} I_F e^{+120^\circ - j\varphi} = \sqrt{3}\underline{I}_3 e^{-j30^\circ}
\end{aligned}$$

Es decir, que las corrientes de línea son las de fase retrasadas 30° y multiplicadas por raíz de 3. Tiene sentido que tengan mayor módulo ya que al pasar por el nodo, por cada tensión de línea salen 2 de fase.

Bien, para fijar conceptos, vamos a ir de nuevo a un par de ejemplos de aplicación que nos permitan poner en práctica esta manera de analizar circuitos.

Conectando una carga en triángulo a una línea que tiene una tensión enfrentada a la carga de 380 V y una impedancia de línea de $1+2j$ (para ver la equivalencia con el ejemplo de la estrella).

En este caso, la impedancia de cada fase del triángulo tiene un valor de: $38\sqrt{3}\angle 30^\circ \ \ \Omega$, que es la carga equivalente de una impedancia en estrella de $38/\sqrt{3}\angle 30^\circ \ \ \Omega$. Con lo cual, a priori lo único que cambia respecto del ejemplo anterior es el ángulo de la impedancia. El módulo de tanto la tensión de línea que enfrenta a la carga como de la impedancia se mantienen.

Para resolverlo podemos bien ir al monofásico equivalente una vez más a partir de la carga en estrella equivalente o bien, plantearlo con las relaciones que hemos visto.

Si la tensión de línea es de 380 V, dejando el origen de fases en la R'N' (aunque no tengamos dicha fase realmente):

$$\underline{U}_{R'S'} = U_L\angle 30^\circ = 380\angle 30^\circ \ \text{V}, \ \ \underline{U}_{S'T'} = 380\angle -90^\circ \ \text{V}, \quad \underline{U}_{T'R'} = 380\angle 150^\circ \ \text{V}$$

Y, por lo tanto, las intensidades de fase por el triángulo serán:

$$\underline{I}_1 = \frac{380}{38\sqrt{3}}\angle(30^\circ - 30^\circ) = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \ \text{A}, \ \ \underline{I}_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle(-90^\circ - 30^\circ) = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle -120^\circ \ \text{A}, \ \ \underline{I}_3 = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle 120^\circ \ \text{A}$$

Con la intensidad de fase podemos recuperar la intensidad de línea retrasando 30° y multiplicando por raíz de 3 a partir de las relaciones que hemos sacado anteriormente.

Así:

$$\underline{I}_R = 10\angle -30^\circ \ \text{A}, \quad \underline{I}_S = 10\angle -150^\circ \ \text{A}, \quad \underline{I}_T = 10\angle 90^\circ \ \text{A}$$

Con estos valores podemos ver finalmente cuánta tensión cae en las impedancias de línea y sacar así la tensión que debe dar el generador.

$$\underline{U}_{RN} = \underline{I}_R(1+2j) + \underline{U}_{R'N'} = 10(1+2j)e^{j30^\circ} + \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 238.37\angle 2.96^\circ \ \text{V}$$

Y el resto de las tensiones de las fases se obtendrán desfasando los 120°. Por último, la tensión de línea saliente del generador será:

$$\underline{U}_{RS} = \sqrt{3} \ \underline{U}_{RN}e^{j30} = 412.87\angle 32.96^\circ \ \text{V}$$

La gran diferencia entre el anterior ejemplo y este es el desfase de 30° que tiene la carga ya que el resto de las variables son equivalentes.

Por último, se deja propuesto un problema en el que se combinan los dos tipos de cargas, una estrella y un triángulo. Como vemos, las líneas trifásicas se representan normalmente con los 3 hilos R, S, T sin el neutro. En el caso de que hiciera falta, se añadiría el cuarto hilo (problema desequilibrado).

Una manera de plantear el problema es pasar el triángulo a estrella y hacer un monofásico equivalente para obtener de manera sencilla las intensidades de línea. Este problema es clave para comprender las conexiones trifásicas, por eso se deja propuesto, pero en la parte de teoría, no como ejercicio planteado.

Una vez se saque este ejercicio se podrá pasar sin problemas a las conexiones desequilibradas que veremos a continuación. Recomendamos que, durante el repaso de los apuntes, no se pase al siguiente apartado hasta haber sido capaz de calcular la solución de este ejemplo.

2.4 Conexión desequilibrada

Por último, vamos a estudiar un problema en el que tengamos diferentes cargas conectadas, es decir un problema desequilibrado. Aquí hay poca teoría que desarrollar, simplemente vamos a plantear un problema de la manera más general posible.

Las conexiones desequilibradas pueden aparecer en muchas aplicaciones, en las que tengamos por ejemplo diferentes cargas conectadas a cada una de las fases de un generador trifásico. En esta situación, no quedará más remedio que, o bien trabajar con la conexión del neutro o bien identificar el nivel de potencial al que se encuentra la carga. Que, en general, será distinto al nivel de potencial del generador.

Vamos a plantear una situación general con una conexión a neutro (que es el caso más conflictivo operativamente hablando): un generador trifásico al que conectamos una carga en estrella desequilibrada (Z_{R1}, Z_{S1}, Z_{T1}) que, a su vez, tiene una impedancia de línea distinta en cada fase $Z_{RL}, Z_{SL}, Z_{TL}, Z_N$.

En este caso, el primer paso es sumar las impedancias que se encuentren en serie para simplificar un poco el problema. Así tendremos:

$$Z_R = Z_{R1} + Z_{RL}, \quad Z_S = Z_{S1} + Z_{SL}, \quad Z_T = Z_{T1} + Z_{TL}$$

El siguiente es analizar el nodo neutro. Para ello, planteamos el segundo lema de Kirchhoff en cada uno de los 3 circuitos del esquema trifásico de la misma manera que hicimos en el caso equilibrado para calcular la diferencia de potencial del neutro:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{RN'} &= \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} = \underline{U}_{RR'} + \underline{U}_{R'N'} = \underline{I}_R Z_R \\
\underline{U}_{SN'} &= \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N} = \underline{U}_{SS'} + \underline{U}_{S'N'} = \underline{I}_S Z_S \\
\underline{U}_{TN'} &= \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N} = \underline{U}_{TT'} + \underline{U}_{T'N'} = \underline{I}_S Z_S
\end{aligned}$$

Hemos definido los valores intermedios de tensión (de N’ a R, de N’ a S y de N’ a T) ya que, al haber sumado las impedancias en línea va a ser la diferencia de potencial que vea cada una de las impedancias. A priori este planteamiento puede parecer algo enrevesado, pero si nos fijamos, con los valores “intermedios” de tensión, la intensidad de línea y la impedancia tenemos el problema definido.

Si pintamos un diagrama fasorial de nuestro sistema trifásico, veremos los tres fasores del generador, equilibrados y desfasados 120°, con el origen de fases en la tensión de fase RN.

Y de ahí se desplaza un neutro N’ (el fasor de la tensión NN’ será el que marque dicho desplazamiento) del que saldrán los fasores de tensión intermedios.

Una vez tenemos estos valores definidos y comprendamos el esquema fasorial, el siguiente paso es calcularse el valor del fasor tensión entre los dos neutros: NN’. Para ello aprovechamos el primer lema de Kirchhoff:

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \underline{I}_N \rightarrow \frac{\underline{U}_{RN'}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN'}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN'}}{\underline{Z}_T} = \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N}$$

Y, pasando a los valores de fase del generador, que suelen ser dato, dejamos al descubierto la tensión del neutro como incógnita:

$$\frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} - \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} - \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T} - \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_T} = \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N} \rightarrow \underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T}}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_S} + \frac{1}{\underline{Z}_T} + \frac{1}{\underline{Z}_N}}$$

Si el generador está equilibrado, lo cual es una hipótesis muy razonable (aunque no siempre se cumplirá), tendremos:

$$\frac{\underline{U}_{N'N}}{U_F} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_S} + \frac{e^{j120^\circ}}{\underline{Z}_T}}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_S} + \frac{1}{\underline{Z}_T} + \frac{1}{\underline{Z}_N}}$$

Como vemos entonces, una carga desequilibrada genera un nivel de tensión en el neutro que sólo depende de los valores de las impedancias y es independiente del nivel de intensidad que circule por la línea trifásica. Esto nos permitirá calcular la potencia que consumen las cargas trifásicas (equilibradas o no) de manera directa sin necesidad de pasar por un análisis del circuito en general.

En el caso de no tener conexión de regreso a través de la línea neutra, es decir, una estrella desequilibrada sin hilo NN’ (o lo que sería lo mismo, un triángulo desequilibrado), el problema se simplifica ligeramente. Seguimos pudiendo definir una diferencia de potencial entre N y N’ (el centro de la estrella) si bien no están conectadas, con lo cual las definiciones de tensiones “intermedias” o RN’, SN’ y TN’ siguen siendo válidas.

Sin embargo, a la hora de plantear el primer lema de Kirchhoff:

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \rightarrow \frac{\underline{U}_{RN'}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN'}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN'}}{\underline{Z}_T} = 0$$

De dónde, sustituyendo los valores de las tensiones intermedias tendremos:

$$\frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} - \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} - \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T} - \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_T} = 0 \rightarrow \underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_T}}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_S} + \frac{1}{\underline{Z}_T}}$$

Es decir, la fórmula anterior en el caso de que la impedancia del neutro fuera infinita, es decir, con un circuito abierto entre los nodos N y N'. Todo parece seguir de acuerdo con los conocimientos que tenemos de circuitos.

Con lo cual, ya sabemos cómo lidiar con una carga desequilibrada, tanto en estrella como en triángulo.

Vamos a ver ahora un ejemplo de aplicación, sencillo, para cerrar esta parte de análisis de circuitos y pasar directamente a potencia en sistemas trifásicos.

En el ejemplo tenemos una carga desequilibrada conectada directamente a una línea de transmisión trifásica de 4 hilos. Y hay un interruptor ubicado, no para estudiar efectos transitorios (que, por cierto, sería interesante, animo a los valientes a pegarse con ello) sino para definir los 2 apartados del problema: el primero en el que se conectan los neutros y el segundo en el que están desconectados.

En el primer caso, tendremos el problema de los 4 hilos (interruptor cerrado). El primer paso para calcularse el sistema trifásico desequilibrado es sumas las impedancias para que así tengamos directamente una por fase. En este ejemplo en particular es más sencillo ya que son todas cargas resistivas, lo que implica que podemos sumar simplemente los valores sin preocuparnos por la fase.

De ahí vamos directamente a la fórmula de la tensión en el neutro.

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{380}{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{Z_R} + \frac{e^{-j120^\circ}}{Z_S} + \frac{e^{j120^\circ}}{Z_T}}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_T} + \frac{1}{Z_N}} = \frac{\frac{1}{11} + \frac{e^{-j120^\circ}}{21} + \frac{e^{j120^\circ}}{16}}{\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = 11.9\angle 19.76^\circ \text{ V}$$

A partir de este valor recuperamos rápidamente las tensiones intermedias, simplemente restando a las de fase del generador el valor obtenido:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{U}_{RN} - \underline{U}_{N'N} = 380/\sqrt{3}\angle 0^\circ - 11.9\angle 19.76^\circ = 208.23\angle -1.11^\circ \text{ V}$$
$$\underline{U}_{SN'} = \underline{U}_{SN} - \underline{U}_{N'N} = 380/\sqrt{3}\angle -120^\circ - 11.9\angle 19.76^\circ = 228.63\angle -121.94^\circ \text{ V}$$
$$\underline{U}_{TN'} = \underline{U}_{TN} - \underline{U}_{N'N} = 380/\sqrt{3}\angle +120^\circ - 11.9\angle 19.76^\circ = 221.86\angle +123.03^\circ \text{ V}$$

Si comparamos con los aprox. 220 V de la tensión de fase equilibrada usual vemos que, aunque hay un cierto valor de desfase en las mismas, el orden de magnitud sigue siendo el mismo.

Una vez tenemos las tensiones intermedias podemos calcular las intensidades de línea, que en el caso del ejemplo que estamos tratando bastará con dividir el valor de las tensiones intermedias por la carga total de cada fase. Así tendremos que:

$$\underline{U}_{RN'} = \underline{I}_R Z_R \rightarrow \underline{I}_R = 18.93\angle -1.11^\circ \text{ A}$$
$$\underline{U}_{SN'} = \underline{I}_S Z_S \rightarrow \underline{I}_S = 10.89\angle -121.93^\circ \text{ A}$$
$$\underline{U}_{TN'} = \underline{I}_T Z_T \rightarrow \underline{I}_T = 13.87\angle +123.03^\circ \text{ A}$$
$$\underline{U}_{N'N} = \underline{I}_N Z_N \rightarrow \underline{I}_N = 5.95\angle 19.76^\circ \text{ A}$$

Y a partir de estas intensidades podremos saber cuánta tensión se pierde en la carga de línea y cuánto le llega a cada impedancia de nuestra carga desequilibrada. Otra manera de ver lo mismo sin calcularse el valor de la intensidad sería plantearse un divisor de tensión en cada fase, así:

$$\underline{U}_{R'N'} = \frac{Z_{R'}}{Z_L + Z_{R'}}\underline{U}_{RN'} = \frac{10}{11}\underline{U}_{RN'} = 189.36\angle -1.11^{\circ} \text{ V}$$
$$\underline{U}_{S'N'} = \frac{Z_{R'}}{Z_L + Z_{R'}}\underline{U}_{SN'} = \frac{20}{21}\underline{U}_{SN'} = 217.74\angle -121.94^{\circ} \text{ V}$$
$$\underline{U}_{T'N'} = \frac{Z_{R'}}{Z_L + Z_{R'}}\underline{U}_{TN'} = \frac{15}{16}\underline{U}_{TN'} = 207.99\angle +123.03^{\circ} \text{ V}$$

Para sacar las tensiones de línea en la carga no podremos aplicar la fórmula del adelanto de los 30º ya que la carga no está equilibrada. Con lo cual tendremos que aplicar la definición directamente:

$$\underline{U}_{R'S'} = \underline{U}_{R'N'} - \underline{U}_{S'N'} = 354.30\angle 30.74^{\circ} \text{ V}$$
$$\underline{U}_{S'T'} = \underline{U}_{S'N'} - \underline{U}_{T'N'} = 359.15\angle -90.29^{\circ} \text{ V}$$
$$\underline{U}_{T'R'} = \underline{U}_{T'N'} - \underline{U}_{R'N'} = 351.17\angle +149.54^{\circ} \text{ V}$$

Como vemos, no se alejan mucho de los valores de desfases que tendríamos en un problema equilibrado. Cuanto más se diferencien las impedancias del problema más diferencias en los resultados tendremos.

Por último, desconectamos el interruptor y estimamos el valor de la diferencia de potencial entre el nodo N y el N':

$$\underline{U}_{NN'} = \frac{380}{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{Z_R} + \frac{e^{-j120^{\circ}}}{Z_S} + \frac{e^{j120^{\circ}}}{Z_T}}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_T}} = \frac{\frac{1}{11} + \frac{e^{-j120^{\circ}}}{21} + \frac{e^{j120^{\circ}}}{16}}{\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{16}} = 41.9\angle 19.76^{\circ} \text{ V}$$

Vemos que el centro de la carga está a más diferencia de potencial que en el caso de tener el interruptor conectado. En el caso de no tener impedancia de línea en el neutro (es decir, en el neutro Z=0) toda la intensidad se iría por ese hilo y tendríamos de nuevo que la tensión en el neutro sería nula, pero no así su intensidad.

Estos resultados finales son conceptualmente importantes y nos dan las claves para manejar los sistemas de transferencia de potencia eléctrica en trifásica desequilibrada. En muchas aplicaciones, en las que se conectan cargas en fases individuales directamente tendremos un esquema general de conexión trifásica desequilibrada y su estudio eléctrico pasará por estimar los valores de intensidad y tensión en el neutro y, a partir de ello, pasar al cálculo del resto del sistema.

3. Potencia en sistemas trifásicos

3.1 Definiciones y tipos de potencias en 3 fases

Para terminar con el tema, vamos a estudiar qué tipos de potencia eléctrica aparecen en un sistema trifásico y cómo analizarlas.

Para estudiar cuánta potencia suministramos, debemos analizar la potencia de cada una de las señales generadas, es decir, ir generador a generador aplicando los conceptos estudiados en el tema de potencia eléctrica.

Así, la potencia total suministrada por una línea trifásica será:

$$p(t) = p_R(t) + p_S(t) + p_T(t) = u_{RN}(t) i_R(t) + u_{SN}(t) i_S(t) + u_{TN}(t) i_T(t)$$

Como vemos, este tipo de líneas suministran 3 veces más potencia eléctrica que una fuente única alterna, aunque dependiendo de los desfases de las cargas conectadas, tendremos diferentes configuraciones presentes. Tal como hemos escrito la potencia en la fórmula anterior vemos que está referida exclusivamente a la potencia instantánea. Si queremos usar la representación fasorial que vimos en el tema 3 deberemos desarrollar las expresiones anteriores usando las fórmulas de productos de funciones sinusoidales.

Lo que sí es posible definir son las expresiones de las potencias fasoriales "teóricas" que tendríamos en un sistema trifásico. En realidad, como vimos en el tema de potencias, aparecen términos cruzados de los productos para señales que no estén desfasadas apropiadamente, es decir, equilibradas. Aún así, podríamos definir los valores de potencia activa y reactiva generales como:

$$P = \sum_{k=1}^{3} U_k I_k \cos\varphi_k = U_R I_R \cos\varphi_R + U_S I_S \cos\varphi_S + U_T I_T \cos\varphi_T \quad [\mathrm{W}]$$

$$Q = \sum_{k=1}^{3} U_k I_k \sin\varphi_k = U_R I_R \sin\varphi_R + U_S I_S \sin\varphi_S + U_T I_T \sin\varphi_T \quad [\mathrm{VAr}]$$

Y, finalmente, definir la potencia aparente o compleja trifásica de la siguiente manera:

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{3} U_k I_k \cos\varphi_k + j \sum_{k=1}^{3} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{3} \underline{U}_k \underline{I}_k^* \quad [\mathrm{VA}]$$

Dónde, lógicamente, los valore de 1 a 3 de k se pueden sustituir por las fases R, S y T. A partir de esta definición podemos demostrar que se sigue cumpliendo la definición del módulo de la potencia compleja:

$$|\underline{S}| = S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\mathrm{VA}]$$

3.2 Potencia en sistemas trifásicos equilibrados

En el análisis de potencias para el caso de cargas trifásicas equilibradas se puede realizar estudiando el circuito trifásico en su conjunto o mediante el análisis del circuito monofásico equivalente. Dicho de otra manera, podremos definir los triángulos de potencia monofásica de cada una de las conexiones.

La potencia instantánea suministrada por un generador trifásico equilibrado se podrá calcular simplemente desarrollando la suma de las tres potencias correspondientes a cada una de las fases. Así:

$$p(t) = p_R(t) + p_S(t) + p_T(t) = u_{RN}(t)i_R(t) + u_{SN}(t)i_S(t) + u_{TN}(t)i_T(t)$$

$$u_{RN}(t) = \sqrt{2}U_F\cos(\omega t),\ \ u_{SN}(t) = \sqrt{2}U_F\cos(\omega t - 120^o),\ \ u_{TN}(t) = \sqrt{2}U_F\cos(\omega t + 120^o)$$

$$i_R(t) = \sqrt{2}I_R\cos(\omega t - \varphi),\ \ i_S(t) = \sqrt{2}I_S\cos(\omega t - 120^o - \varphi),\ \ i_T(t) = \sqrt{2}I_T\cos(\omega t + 120^o - \varphi)$$

$$p(t) = 2U_F I_F\left[\cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - 120^o)\cos(\omega t - 120^o - \varphi) + \cos(\omega t + 120^o)\cos(\omega t - \varphi + 120^o)\right]$$

$$p(t) = 2\frac{1}{2}U_F I_F\left[3\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t + 120^o - \varphi) + \cos(2\omega t - 120^o - \varphi)\right] = 3U_F I_F\cos\varphi$$

Dónde, al estar hablando de potencia suministrada por una línea trifásica identificamos la intensidad de fase y la de línea como idénticas. Es importante que, a la hora de analizar las potencias consumidas por las cargas, identifiquemos correctamente las intensidades de línea y de fase según tengamos cargas en estrella o en triángulo.

De esta operación sacamos una de las principales ventajas de la generación de potencia en régimen trifásico: que la potencia instantánea no tiene componente fluctuante, sólo valor medio, con lo cual no tendremos que preocuparnos a priori por fluctuaciones en la energía que sale de nuestros generadores.

A pesar de no ser una señal dependiente del tiempo, podemos seguir manteniendo las definiciones fasoriales para esta potencia aplicando las relaciones que vimos anteriormente (como suma de las fases y multiplicadas por el seno correspondiente). Así, recuperaremos:

$$P = 3P_{fase} = 3U_F I_F\cos\varphi\ \ [\mathrm{W}],\qquad Q = 3Q_{fase} = 3U_F I_F\sin\varphi\ \ [\mathrm{VAr}],$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3U_F I_F\ \ [\mathrm{VA}]$$

La razón por la cual se mantienen estas definiciones es para poder seguir aplicando todas las técnicas de resolución y cálculo de potencias que habíamos visto hasta ahora ya que, aunque inicialmente el problema puede ser equilibrado, podemos tener una variación imprevista o una conexión de nuevas cargas que lo desequilibre, alterando el problema.

A pesar de no tener potencia fluctuante, el valor del factor de potencia sigue siendo importante en el problema y sigue limitando la cantidad de watios consumibles por las cargas. Por lo tanto, todo lo estudiado sobre aumento del factor de potencia a través de baterías de condensadores sigue siendo válido, aunque tendríamos que adaptarlo a cargas trifásicas.

Por último, para cerrar este tema vamos a analizar la potencia que consumen los dos tipos de cargas que hemos visto: las cargas en estrella y las cargas en triángulo, recordemos, equilibrado.

Una carga en estrella consumirá, en función del valor de su impedancia, una cantidad de watios y de voltamperios reactivos. Para calcularlo, dado que la carga está equilibrada, sabemos que cada fase consumirá la misma potencia, por lo tanto, será tan simple como multiplicar por 3 los valores de potencia activa y reactiva. Dado que la conexión es en estrella, la intensidad de línea y la de fase coinciden y la tensión de línea se relaciona con la de fase de la carga estrella a partir de la relación de la raíz de tres ya vista. Con lo cual tendremos que:

$$P = 3U_F I_F \cos\varphi = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \quad [\mathrm{W}]$$

$$Q = 3U_F I_F \sin\varphi = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \sin\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi \quad [\mathrm{VAr}]$$

$$S = 3U_F I_F = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L = \sqrt{3} U_L I_L \quad [\mathrm{VA}]$$

Como se observa, para calcular las potencias consumidas por las cargas en estrella equilibrada, aplicando los valores de fase bastará con multiplicar por 3 el valor del monofásico equivalente y en el caso de querer utilizar los valores de línea, deberemos multiplicar dicho valor por raíz de 3.

En el caso de las cargas en triángulo, la situación es conceptualmente distinta, aunque el resultado es, curiosamente, el mismo. Para el caso de la carga en triángulo, la tensión de fase del triángulo, que, en este caso, por simplicidad llamaremos $U_{F\Delta}$, coincide con la tensión de línea trifásica que le alimenta.

Es importante no confundir la tensión de fase que llega del generador, $U_{RN}, U_{SN}, U_{TN} = U_F$ con la tensión anterior, que es la correspondiente a la fase de la carga. Si bien es un poco trabalenguas, tiene sentido: la carga en triángulo recordemos que tiene 3 fases, cada uno de los lados del triángulo, y su tensión será aquella que haya entre los nodos del triángulo. Y lógicamente, estos valores son los de línea de la conexión trifásica $U_{F\Delta} = U_L = U_{RS}, U_{ST}, U_{TR}$.

Por otro lado, las intensidades de línea y de fase tendrán la relación que hemos ya visto de la raíz de tres. Con lo cual si estudiamos ahora la potencia consumida por una carga conectada de esta manera:

$$P = 3U_{F\Delta} I_F \cos\varphi = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \quad [\mathrm{W}]$$

$$Q = 3U_{F\Delta} I_F \sin\varphi = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \sin\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi \quad [\mathrm{VAr}]$$

$$S = 3U_{F\Delta} I_F = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L = \sqrt{3} U_L I_L \quad [\mathrm{VA}]$$

Con lo que, siempre que tengamos en cuenta que el valor de tensión fase de la carga es de cada uno de los lados del triángulo, podremos afirmar que el triángulo y la estrella equilibrados cumplen las mismas relaciones de potencia.

Por último, para el cálculo de potencia desequilibrado deberá hacerse fase a fase y posteriormente sumar las potencias tal y como lo vimos en las relaciones que derivamos en la anterior subsección del apartado de potencias.