T. 4: Funciones reales y continuidad

Def 1: i) Sea $G \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto.
Diremos que G es la *gráfica* de una función f si, dado $x \in \mathbb{R}$, existe a lo más un valor $y \in \mathbb{R}$ que cumple $(x,y) \in G$

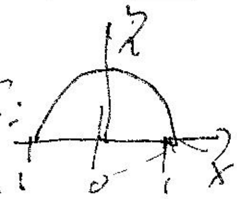
ii) (*Dominio* de f): $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} \wedge (x,y) \in G\}$

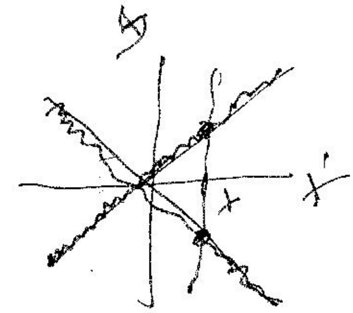
iii) (*Imagen* de f): $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \wedge (x,y) \in G\}$.

Ejemplos:

1) Sea $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\ y \geq 0\}$.
Entonces ~~y~~ G es la gráfica de una función, pues si $|x| > 1$, $x^2+y^2 \geq |x|^2 > 1$, luego para ningún $y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in G$, mientras que si $|x| \leq 1$, $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \geq 1$ (pues $x^2 = |x|^2 \leq 1$), luego si además $y \geq 0$, la única solución de $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$ es $y = \sqrt{1-x^2}$; G es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ con $|x| \leq 1$.

$-$ $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} = [-1,1]$.

$\therefore \operatorname{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1 \} = [0,1]$; G: 

2) $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y| \}$. $G =$ 

G no es la gráfica de una función: Si $x \neq 0$, $y_{\pm} = \pm x$ cumplen $|x| = |y_{\pm}|$, e $y_{\pm}$ son valores distintos.

Obs: Si $y = f(x)$ ($x \in \operatorname{Dom}(f)$) es una función, es habitual tomar como $\operatorname{Dom}(f)$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ más grande para el cual $f(x)$ tiene sentido (p. ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$, entendemos $\operatorname{Dom}(f) = [0,\infty)$). Suele escribirse $f : \operatorname{Dom}(f) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ salvo que se diga otra cosa).

Def 2: (Funciones inyectivas y sobreyectivas).

i) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Diremos que f es inyectiva ~~sii~~ $f(x) = f(x)$ sii $x = y$

ii) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto B \subset \mathbb{R}$. Diremos que f (considerada como función de A en B) es sobreyectiva si, dado $y \in B$, $\exists x \in A$ con $y = f(x)$
($\forall y \in B \ \exists x \in A \wedge y = f(x)$).

iii) $f : A \mapsto B$ es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva

Obs: El que una función $f: A \mapsto B$ sea inyectiva o sobreyectiva depende crucialmente de cuáles sean los subconjuntos A y B. Asimismo, en ~~gen~~ general una función $f: A \mapsto B$ no tiene porqué tener ninguna de esas propiedades.

Ejemplos:

1) $y = ax+b$ con $a \neq 0$ es biyectiva:
(con $A = B = \mathbb{R}$)

1.1) $ax+b = ax'+b \Leftrightarrow ax = ax'$
$\Leftrightarrow x = x'$ $(a \neq 0)$

luego $f(x) = ax+b$ es inyectiva.

1.2) Si $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tomando $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$.

2) $y = f(x) = x^2$ con $A = \text{dom}(f) = [0, \infty)$ y $B = [0, \infty)$ es sobreyectiva, pues si $y \in B$, $y = x^2$ con $y = \sqrt{x} \in A$.

3) $y = f(x) = x^2$ con $\left| \begin{array}{l} A = \text{dom}(f) = [0,\infty) \\ B = \mathbb{R} \end{array} \right.$ no es sobreyectiva.

(si $y < 0$, $y \neq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$).

Def 3 (Función inversa): Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto B \subset \mathbb{R}$ función biyectiva. Entonces, dado $y \in B$ existe un

único $x \in A$ con $f(x) = y$. Entonces escribimos
$x = f^{(-1)}(y)$; $f^{(-1)}$: función inversa de f.

<u>Prop 1</u>: i) Sea $G \subset \mathbb{R}^2$ ~~el~~ gráfico de una función f, con $A = \mathrm{Dom}(f)$, $B = \mathrm{Im}(f)$.
Entonces $G \subset A \times B$ y $G = \{(x, f(x)) : x \in A\}$
ii) Si $G \subset \mathbb{R}^2$ es el gráfico de una función f biyectiva, $G' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,x) \in G\}$ es el gráfico de $f^{(-1)}$, con $f^{(-1)} : B \longmapsto A$

<u>Dem</u>: i) Si $(x,y) \in G$, con G gráfico de una función,

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{dom}(f) = A \\ y \in \mathrm{Im}(f) = B \end{array}\right. \Rightarrow (x,y) \in A \times B.$$

Además, si $y \in \mathrm{Im}(f)$, $y = f(x)$ para un único $x \in \mathrm{Dom}(f)$, luego $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$.
ii) Si G es el gráfico de una función biyectiva, $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ y si ~~$x \in \mathrm{Dom}(f)$~~ $y \in \mathrm{Im}(f)$, hay un único x $(= f^{(-1)}(y))$ tal que $f(x) = y$, luego $(y,x) = (y, f^{(-1)}(y))$ está en el gráfico de $f^{(-1)}$, y como la gráfica de $f^{(-1)}$ son

exactamente en un punto, $G' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (y,x)\in G\}$.

$f^{(-1)} : B \mapsto A$, porque ~~y ∈ Dom(f)~~

. $y \in \mathrm{Dom}(f^{(-1)}) \iff y = f(x)$ con $x \in \mathrm{Dom}(f)$,

$\iff y \in \mathrm{Im}(f)$ con $y = f(x)$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

. $x \in \mathrm{Im}(f^{(-1)}) \iff f(x) = y$ con $y \in \mathrm{Im}(f)$.

∎

<u>Prop 2</u>: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con I un intervalo y f estrictamente monótona (creciente ó decreciente). Entonces f es inyectiva.

<u>Dem</u>: Pongamos que f es estrictamente creciente y dados $x, y \in I$, si $x \neq y$, $x < y \vee y < x$, luego $f(x) < f(y) \vee f(y) < f(x)$. ~~En~~ En todo caso $f(x) \neq f(y)$. El argumento si f es estrictamente decreciente es muy similar.

∎

<u>Obs</u>: En las condiciones anteriores, no podemos deducir la sobreyectividad. Ejemplo:

~~Si~~ sea $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$ (para $x \in \mathbb{R}$)

Entonces f es estrictamente creciente, pero si $0 < y < 1$,

$y \notin \mathrm{Im}(f)$.

Def 3 (Composición de funciones).

Sean $\left| \begin{array}{l} f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto B \subset \mathbb{R} \\ g: C \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \end{array} \right.$

y dónde $B \subset C$. Entonces definimos la composición ~~$g \circ f: A \mapsto$~~

$$g \circ f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(f(x)).$$

Obs 1 La condición "$B \subset C$" es necesaria para que $g(f(x))$ esté bien definida, pues necesitamos $f(x) \in C$, lo cual corresponde con $B \subset C$.

Obs 2: Si $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, podemos considerar indistintamente $g \circ f$ y $f \circ g$, pero en general no coinciden:

- Sea $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2$.

Entonces $\left| \begin{array}{l} (g \circ f)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1. \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1 \end{array} \right.$, que son funciones distintas.

Prop 3: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto B \subset \mathbb{R}$ función biyectiva y $f^{(-1)}: B \subset \mathbb{R} \mapsto A \subset \mathbb{R}$ su inversa. Entonces:

$$f^{(-1)} \circ f = Id_A$$

$$f \circ f^{(-1)} = Id_B$$

donde para un subconjunto $C \subset \mathbb{R}$, $Id_C(x) = x \ \forall x \in C$.

Dem: Puesto que f es biyectiva $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(A) = B \\ f^{(-1)}(B) = A \end{array} \right.$

Si $x \in A$, $f(x) \in B = \cancel{\mathrm{Dom}(f)}\ \mathrm{Dom}(f^{(-1)})$ y $(f^{(-1)} \circ f)(x) = f^{(-1)}(f(x)) = x$ (por definición de $f^{(-1)}$), esto es, $f^{(-1)} \circ f = Id_A$. La otra identidad es análoga $\boxed{B}$

Obs: Si A, B son conjuntos arbitrarios, el argumento anterior funciona sin ningún cambio (y lo mismo para la definición de gráfico, inversa, inyectividad, sobreyectividad).

El siguiente es un criterio muy usual para determinar que una función es biyectiva:

Prop. Sean A, B dos conjuntos arbitrarios y $f: A \to B$ función para la cual existe otra función $g: B \to A$ que cumple:

$$g \circ f = Id_A \quad (*)$$

$$f \circ g = Id_B \quad (**)$$

Entonces f es biyectiva y $g = f^{(-1)}$.

Dem:

–. f inyectiva: Sean $x, x' \in A$ con $f(x) = f(x')$.

Entonces $g(f(x)) = g(f(x'))$.

Pero
$$\left| \begin{array}{l} x \overset{(\text{por } (*))}{=} (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ x' \overset{(*)}{=} (g \circ f)(x') = g(f(x')) \end{array} \right.$$
luego $x = x'$.

–. f sobreyectiva: Si $y \in B$, sea $x = g(y) \in A$.

Entonces $(**) \Rightarrow y = (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x)$,

luego $y \in Im(f)$.

–. $g = f^{(-1)}$: puesto que f es inyectiva y sobreyectiva, existe $f^{(-1)}$, pero $(*)$ define exactamente a tal inversa.

Límites y continuidad de funciones

Def 4 (Límites y límites laterales de una función en un punto).

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto

i) Decimos $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l$ si existe $\delta_0 > 0$ tal que f está definida en $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\}$ ($A \supset (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\}$) y dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

ii) Decimos $\lim_{x \to x_0+} f(x) = l$ (límite lateral de f en x_0 por la derecha) si existe $\delta_0 > 0$ tal que $(x_0, x_0+\delta_0) \subset A$ y dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

iii) Decimos $\lim_{x \to x_0-} f(x) = l$ (límite lateral de f en x_0 por la izquierda) si existe $\delta_0 > 0$ tal que $(x_0-\delta, x_0) \subset A$ y dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Obs: En ninguno de estos casos se impone a priori que f esté definida en $x = x_0$.

Obs: $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\} = \{x : 0 < |x-x_0| < \delta\}$

Def S (Continuidad y continuidad lateral de una función en un punto).

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.

i) Si existe $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = l$ y $l = f(x_0)$, decimos que f es continua en x_0.

ii) Si existe $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} f(x) = l$ y $l = f(x_0)$, decimos que f es continua por la derecha en x_0.

iii) Si existe $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ y $l = f(x_0)$, decimos que f es continua por la izquierda en x_0.

Prop S (Propiedades básicas de los límites).

Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ funciones. Entonces:

i) Si $f \equiv cte$ en A y $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \setminus \{x_0\} \subset A$,

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cte$

ii) Si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l' \Rightarrow l = l'$.

iii) Si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = r$, entonces

iii.1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + r$

iii.2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot r$

iv) Si $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que cumple:

$\exists N$ t.q $n \geq N \Rightarrow x_n \in A \setminus \{x_0\}$ y además $x_n \to x_0$,

si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x_0) = l$, entonces $\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

v) Si dado x_0, existe $\delta_1 > 0$ tal que $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \subset A$ y $f(x) = g(x)$ para $0 < |x - x_0| < \delta_1$, f tiene límite en x_0 sii g lo tiene, y son iguales.

vi) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ y $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

Dem:

i) Si $f(x) = c$ $\forall x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta_0$, dado $\varepsilon > 0$, $|f(x) - c| = 0 < \varepsilon$, luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

ii) Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tuviese dos posibles valores l y l' con $l \neq l'$, tomando $\varepsilon = |l - l'| > 0$ tendríamos a su vez $\delta, \delta' > 0$ tales que:

- $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2$
- $0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon/2$

Tomando $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$, $0 < \delta'' \leq \delta, \delta'$, luego para $0 < |x - x_0| < \delta''$, $\varepsilon = |l - l'| = |(l - f(x)) + (f(x) - l')| \leq$ $\leq \underbrace{|f(x) - l|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|f(x) - l'|}_{< \varepsilon/2} < 2\,\varepsilon/2 = \varepsilon$ (contradicción).

iii.1) Usando que $|(f+g)(x)-(l+r)| =$
$= |(f(x)-l) + (g(x)-r)|$
$\leq |f(x)-l| + |g(x)-r|$,

y tomando δ / $\delta>0$ t.q. $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon/2$
$\delta'>0$ ... $0<|x-x_0|<\delta' \Rightarrow |g(x)-r|<\varepsilon/2$,

$\delta''=\min\{\delta,\delta'\}$, para $0<|x-x_0|<\delta''$,

$|f(x)-l|+|g(x)-r| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$,

luego $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = l+r$.

iii.2) Para $(f\cdot g)(x)$ usamos
$|(f\cdot g)(x)-l\cdot r| = |f(x)g(x) - l g(x) + l g(x) - l\cdot r|$
$= |g(x)(f(x)-l) + l(g(x)-r)|$
$\leq |g(x)||f(x)-l| + |l||g(x)-r|$.

Por ~~otra~~ otra parte, como $\lim_{x\to x_0} g(x) = r$, $\exists\delta>0$
tal que $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(x)-r|<1$.
$\Rightarrow |g(x)| = |(g(x)-r)+r| \leq |g(x)-r|+|r| \leq |r|+1$.

Para tal δ, si $0<|x-x_0|<\delta$,
$|(f\cdot g)(x)-lr| \leq (|r|+1)|f(x)-l| + |l||g(x)-r|$
$\leq M\{|f(x)-l|+|g(x)-r|\}$; $M=\max\{|r|+1,|l|\}$

Ahora, dado $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta_\varepsilon>0$ t.q:

$$0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |f(x)-l| < \dfrac{\varepsilon}{2M} \\ |g(x)-l| < \dfrac{\varepsilon}{2M} \end{cases}$$

y entonces, para $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$,

$$|(f\cdot g)(x)-lr| \leq M\{\underbrace{|f(x)-l|}_{<\varepsilon/2M}+\underbrace{|g(x)-r|}_{<\varepsilon/2M}\}$$

$$< M\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\varepsilon.$$

iv) Si para una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se cumple que para $n\geq N$, $x_n\in A\setminus\{x_0\}$, $f(x_n)$ está bien definida (recordemos que no pedimos a priori que $f(x_0)$ exista). y si además $x_n \mapsto x_0$, dado $\delta>0$ $\exists N_\delta>0$ t.q $n\geq N_\delta \Rightarrow |x_n-x_0|<\delta$. Como además $x_n\neq x_0$, tomando $N'_\delta=\max\{N, N_\delta\}$, para $n\geq N'_\delta$, $0<|x_n-x_0|<\delta$. Si suponemos $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, dado $\varepsilon>0$ $\exists \delta=\delta_\varepsilon$ tal que $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

Tomando N'_δ como antes, para $n\geq N'_\delta$, ~~|f(x_n)~~

$|f(x_n)-l|<\varepsilon$, luego $f(x_n)\mapsto l$.

13)

v) La afirmación es casi evidente:

si $f(x) = g(x)$ en $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\setminus\{x_0\} \subset A$,

y $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ t.q si

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Tomando $\delta' = \min\{\delta_\varepsilon, \delta\}$, $0 < \delta' \leq \delta_\varepsilon, \delta$, luego

$g(x)$ está bien definida y para $0 < |x - x_0| < \delta'$,

$|g(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \varepsilon$

vi) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell| > 0$,

$\exists \delta_1 > 0$ t.q $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$.

Entonces
$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |(f(x) - \ell) + \ell| \\
&\geq -\underbrace{|f(x) - \ell|}_{< \frac{|\ell|}{2}} + |\ell| \\
&\geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2} > 0.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f(x) \neq 0.$

Así pues, $\frac{1}{f(x)}$ está bien definida para $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

y $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x) - \ell|}{\underbrace{|f(x)||\ell|}_{\geq \frac{|\ell|}{2}}} \leq \frac{2}{\ell^2}|f(x) - \ell|.$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0$ t.q. si

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{l^2 \varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta' = \min\{\delta_\varepsilon, \delta_1\}$, $0 < \delta' \leq \delta_\varepsilon, \delta_1$, y

para $0 < |x - x_0| < \delta'$, $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| \leq \frac{2}{l^2} \underbrace{|f(x) - l|}_{< \frac{l^2 \varepsilon}{2}} < \varepsilon$. $\boxed{}$

<u>Obs</u>: Hay versiones de la Prop. 5 si tomamos límites laterales en lugar de límites simplemente cambiando en cada de las afirmaciones anteriores "$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$" por "$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$", etc.

<u>Prop 6</u>: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y x_0 un punto para el cual $\exists\, \delta_0 > 0$ y $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \subset A$.

Entonces $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ sii

(i) $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$, $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$

(ii) $l_1 = l_2$.

<u>Dem</u>: $\Rightarrow$): Si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0$

t.q. $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

Pero entonces, si $0<x-x_0<\delta$ ó $0<x_0-x<\delta$, $|f(x)-l|<\varepsilon$, lo cual quiere decir que $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, y ambos son l.

$\Leftarrow$) : Si $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = l$, afirmamos que $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$:

Dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta_1, \delta_2 > 0$ tales que:

- Si $0<x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ (pues $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=l$)
- Si $0<x_0-x<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ (pues $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=l$).

Tomando $\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $0<\delta_3\leq\delta_1,\delta_2$, luego si $0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow (0<x-x_0<\delta \vee 0<x_0-x<\delta)$, $|f(x)-l|<\varepsilon$, luego $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ∎

<u>Def 6</u> (Discontinuidades evitables e inevitables).

Sea $f: A\subset\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$. Dado un $x_0\in A$, si $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, pero $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, decimos que f presenta una <u>discontinuidad evitable</u> en x_0. En caso contrario, decimos que la discontinuidad es <u>inevitable</u>

Prop 7: Sea $f: A\subset\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ que presenta una discontinuidad evitable en $x_0\in A$. Definamos

$$g(x)=\begin{cases} f(x) : & x\in A\setminus\{x_0\} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) : & x=x_0 \end{cases}.$$

Entonces $g(x)$ es continua en x_0.

Dem: Según la Prop 5.v), como $f(x)$ y $g(x)$ coinciden $\forall x\neq x_0$, $\exists\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g(x_0)$, luego g es continua en x_0.

Def 7: Sea $f: A\subset\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ y $x_0\in A$ para el cual:

i) $\exists\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=l_1$, $\exists\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=l_2$

ii) $l_1\neq l_2$.

Entonces se dice que f presenta una <u>discontinuidad de salto</u> en x_0, (con salto de magnitud $|l_1-l_2|$).

Obs: Según la Prop. 7 toda discontinuidad de salto es inevitable.

Obs: Si f presenta discontinuidad inevitable en $x_0\in A=\mathrm{dom}(f)$, y tomamos $g(x)=\begin{cases} f(x) : x\in A\setminus\{x_0\} \\ c : x=x_0\end{cases}$, sea cual sea el valor de c, g seguirá teniendo discontinuidad inevitable en x_0.

<u>Prop 8</u>: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con I un intervalo y f monótona (creciente o decreciente). Entonces $\forall x \in \mathring{I}$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ $(:= f(x_+))$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ $(:= f(x_-))$, siendo $\mathring{I}$ (interior de I) $= \{x \in I : \exists \delta > 0$ con $(x-\delta, x+\delta) \subset I\}$ y además:

(i) $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ si f es creciente

(ii) $f(x_-) \geq f(x) \geq f(x_+)$ si f es decreciente.

<u>Obs</u>: Según la Prop. 8, para una función monótona, las únicas posibles discontinuidades son de salto.

<u>Dem</u>: Fijemos $x \in \mathring{I}$ y supongamos que f es creciente. Fijando $\delta_0 > 0$ t.q. $(x - \delta_0, x + \delta_0) \subset I$, consideremos

$$\begin{cases} x_n = x + \frac{\delta_0}{2n}, & n = 1, 2, \ldots \\ x'_n = x - \frac{\delta_0}{2n}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Entonces $x_0 - \delta_0 < x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_n < x < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < x_0 + \delta_0$

$$\Rightarrow f(x'_1) \leq f(x'_2) \leq \ldots \leq f(x'_n) \leq f(x) \leq f(x_n) \leq \ldots \leq f(x_2) \leq f(x_1) \qquad (1)$$

De (1) se sigue que $(f(x'_n))_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente por $f(x)$, y que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, y acotada inferiormente ~~por~~ por $f(x)$.

Por tanto,
$$\left| \begin{array}{l} \exists\, l_+ = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ \exists\, l_- = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) \end{array} \right. \quad \text{y } l_- \leq f(x) \leq l_+$$

–. Afirmo que
$$\left| \begin{array}{ll} \exists \lim_{x\to x_0+} f(x) = l_+ & 2.1) \\ \exists \lim_{x\to x_0-} f(x) = l_- & 2.2) \end{array} \right.$$

Veamos 2.1): Dado $\varepsilon>0$, $\exists\, N$ t.q. $n \geq N \Rightarrow$
$\Rightarrow l_+ \leq f(x_n) < l_+ + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq f(x_n) - l_+ < \varepsilon$.

Para $x < y < x_N$, $f(x) \leq f(y) \leq f(x_N) < l_+ + \varepsilon$

pero como $x_n \to x$, $x_n \leq y$ para $n \geq N_1$,
luego $f(y) \geq f(x_n) \geq l_+$, luego $l_+ \leq f(y) < l_+ + \varepsilon$
$\Rightarrow 0 \leq f(y) - l_+ < \varepsilon$

Tomando $\delta = x_N - x > 0$, si $x < y < x+\delta$, $|f(y) - l_+| < \varepsilon$,
luego $\lim_{x\to x_0+} f(x) = l_+$. El argumento para 2.2) es similar

<u>Obs</u>: Si $I = [a,b]$, el mismo tipo de argumento proporciona

- $\begin{cases} f(a) \leq \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a+) \\ f(b) \geq \lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b-) \end{cases}$; f creciente en $[a,b]$.

- $\begin{cases} f(a) \geq \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a+) \\ f(b) \leq \lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b-) \end{cases}$; f decreciente en $[a,b]$.

<u>Prop 9</u>: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Si f es continua en $x_0 \in A$ y g es continua en $g(x_0) \in B$, entonces $g \circ f$ está definida en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para cierto $\delta > 0$ y $g \circ f$ es continua en x_0.

<u>Dem</u>: i) Puesto que g es continua en $f(x_0) \in B$, $\exists\, \delta_0 > 0$ tal que ~~$|g(x) - g(x_0)|$~~ g está definida en $(f(x_0) - \delta_0, f(x_0) + \delta_0)$. Puesto que f es continua en $x_0 \in A$, tomando $\varepsilon = \delta_0$ en la definición de continuidad de f, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que si ~~[illegible]~~ $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_0$, lo cual quiere decir que $f(x) \in (f(x_0) - \delta_0, f(x_0) + \delta_0)$,

luego $g \circ f$ está definida en $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset A$.

(ii) Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $f(x_0)$, $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ t.q $|y - f(x_0)| < \delta \Rightarrow$ $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. Podemos imponer además $\delta \leq \delta_0$.

Tomemos ese $\delta = \delta_\varepsilon$ en la definición de continuidad de f. Entonces $\exists \delta' > 0$ t.q $|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \leq \delta_0$, luego $(g \circ f)(x)$ está definido y con $y = f(x)$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ cumple $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ ☒

Queremos estudiar ahora qué propiedades se deducen de la continuidad de una función real f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Para ello desempeña un papel crucial el siguiente resultado (correspondería al tema 2 de sucesiones, pero lo enuncio y pruebo aquí porque es donde se verá su importancia):

Prop 10:

i) Sea $s=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada.

Entonces s tiene una subsucesión $s'=(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente

ii) Si $s=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contenida en un intervalo $[a,b]$ cerrado y acotado (con $-\infty<a\leq b<\infty$), entonces s tiene una subsucesión $s'=(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x_0\in[a,b]$.

Obs: La ~~Propien~~ Prop. 10 ii) se suele expresar diciendo que el intervalo $[a,b]$ es compacto.

Dem: ii) Nuestra hipótesis es $x_n\in[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ $a\leq x_n\leq b$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Puesto que $I_1=[a,b] = I_1^2\cup I_2^2$,

con $I_1^2=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, $I_2^2=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, podemos escribir $\mathbb{N} = A_1^1\cup A_2^1$, con $A_i^1=\{n\in\mathbb{N}: x_n\in I_i^2\}$, $i=1,2$.

Puesto que $\mathbb{N}$ es infinito, al menos uno entre A_1^1 y A_2^1 debe ser infinito (de lo contrario, su unión $\mathbb{N}$ sería finita) índices $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ y términos x_{n_k} de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $x_{n_k} \in I_k$ $\forall k = 1, 2, \dots$

Haciendo ésto para cada $k \in \mathbb{N}$, hemos obtenido una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Afirmo que ésta subsucesión converge a un $x_0 \in [a,b]$.

Sea $y_k = x_{n_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ y si $1 \leq k \leq l$, como $y_l \in I_l \subset I_k$, $y_k, y_l \in I_k \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_k - y_l| \leq \operatorname{long}(I_k) = 2^{1-k}(b-a) \longmapsto 0$, lo cual implica que $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy, luego convergente a cierto x_0. Además $x_0 \in [a,b]$, pues $a \leq y_k \leq b$ $\forall k \Rightarrow a \leq \lim_{k \to \infty} y_k = x_0 \leq b$

$\Rightarrow x_0 \in [a,b]$.

i) Es un caso particular de ii), pues si $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, $\exists C > 0$ tal que $|x_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x_n \in [-C, C]$ $\forall n$ y aplicamos entonces ii) $\boxtimes$

Si $A^1_{i_1}$ es infinito, escribimos $B_1 = A^1_{i_1}$ y en el intervalo $I^2_{i_1}$ hay infinitos términos de la sucesión x_n. $B_1 \neq \phi$ (es de hecho infinito).

Sea $n_1 = \min B_1$ y $x_{n_1} \in I^2_{i_1}$; escribimos $I_2 = I^2_{i_1}$ y tenemos $I_2 \subset I_1$ con $long(I_2) = \frac{1}{2} long(I_1)$

Con I_2 procedemos como con I_1, y si $I_2 = [a_1, b_1]$, escribimos $I_2 = I^3_1 \cup I^3_2 \mid I^3_1 = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], I^3_2 = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$.

Tenemos $x_n \in I_2 \ \forall n \in B_1$ con B_1 infinito.

$B_1 = A^2_1 \cup A^2_2$ con $A^2_i = \{n \in B_1 : x_n \in I^3_i\}$.

Como B_1 es infinito, al menos uno entre A^2_1 y A^2_2 es infinito, y si llamamos B_2 a $A^2_{i_2}$ (que sea infinito), e $I_3 = I^3_{i_2}$, tenemos $I_3 \subset I_2$ con $long(I_3) = \frac{1}{2} long(I_2)$

Sea $n_2 = \min\{n \in B_2 ; n > n_1\}$. Entonces $x_{n_2} \in I_3$ con $n_2 > n_1$.

Prosiguiendo este proceso hasta k pasos ($k = 1, 2, \ldots$), obtenemos intervalos $[a,b] = I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k$ con $long(I_k) = 2^{1-k} long(I_1) = 2^{1-k}(b-a)$

Prop 11) i) Sea $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) > 0$. Entonces $\exists \delta > 0$ tal que $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ y $f(x) > 0$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

ii) Sea f y x_0 como en i), pero ahora $f(x_0) < 0$. Entonces $\exists \delta > 0$ con $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ y $f(x) < 0$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

iii) Si $f : [a,b) \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ con $f(a) > 0$ $\exists \delta > 0$ con $[a, a+\delta) \subset [a,b)$ y $f(x) > 0$ en $[a, a+\delta)$ (si $f(a) < 0$, $f(x) < 0$ en $[a, a+\delta)$) (por continuidad de f en $x=a$ entendemos continuidad por la derecha).

iv) Si $f : (a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $x = b$ (continua por la izquierda) con $f(b) > 0$ $\exists \delta > 0$ con $(b-\delta, b] \subset (a,b]$ y $f(x) > 0$ en $(b-\delta, b]$ (si $f(b) < 0$, $f(x) < 0$ en $(b-\delta, b]$).

Dem: i) Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Como f es continua en $x_0 \in (a,b)$ podemos elegir $\delta \in (0, \underbrace{\min\{b-x_0, x_0-a\}}_{>0}]$ de modo que si $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(observamos que con tal elección de δ, $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$)

Entonces $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$

$$\geq f(x_0) - \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{< \frac{1}{2} f(x_0)} > f(x_0) - \frac{1}{2} f(x_0) = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$$

ii) Lo omito (muy similar a i))

iii) Si $f : [a,b) \mapsto \mathbb{R}$ es continua por la derecha en $x=a$ con $f(a) > 0$, tomo $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a) > 0$ y por la continuidad de f en a, podemos elegir $\delta \in (0, b-a]$ de modo que si $a \leq x < a+\delta$ ($\Leftrightarrow 0 \leq x-a < \delta$) se cumple $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$. Pero entonces

$$f(x) = f(a) + (f(x) - f(a))$$
$$\geq f(a) - \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{< \frac{1}{2} f(a)} > f(a) - \frac{1}{2} f(a) = \frac{1}{2} f(a) > 0.$$

(El caso $f(a) < 0$ es completamente similar)

iv) Lo omito (muy similar a iii)). ∎

Def 6 (Acotación local)

Si $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. f se dice localmente acotada en x_0 si $\exists \delta > 0$ y $\exists C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.

Obs: No se impone necesariamente que f esté definida en $x = x_0$

Prop 17: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$. Entonces f está localmente acotada en x_0

Dem: Tenemos que $\exists \delta_0 > 0$ tal que f está definida en $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}$. Como $\exists \lim_{x \to x_0} f(x_0) = l$, tomando $\varepsilon = 1$, podemos elegir $\delta \in (0, \delta_0]$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1$. Pero entonces

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |l + (f(x) - l)| \\
&\leq |l| + |f(x) - l| \\
&= |l| + 1
\end{aligned}
$$

Tomando $C = |l| + 1 > 0$ ya lo tenemos ☒

Obs: Si imponemos que $\exists \lim_{x \to x_0+} f(x)$, entonces f está localmente acotada a la derecha de x_0 ($\exists \delta > 0$ $\exists C > 0$ tales que $|f(x)| \leq C$ en $(x_0, x_0 + \delta) \cap A$), y si imponemos que $\exists \lim_{x \to x_0-} f(x)$, entonces f está localmente acotada a la izquierda de x_0 ($\exists \delta > 0$ $\exists C > 0$ tales que $|f(x)| \leq C$ en $(x_0 - \delta, x_0) \cap A$).

Prop 13 (Teorema de Bolzano)

Sea $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en todo $x \in [a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ ó $f(a) > 0 > f(b)$ (esto es, f toma valores de signo opuesto y no-nulos en los extremos de $[a,b]$). Entonces $\exists\, x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) = 0$.

Dem: Supongamos $f(a) < 0 < f(b)$ y sea $A = \{x \in [a,b] : f \leq 0 \text{ en } [a,x]\}$. Tenemos que $A \neq \emptyset$ (pues $a \in A$); A es acotado superiormente (b es cota superior de A). De esto se deduce que $\exists\, x_0 = \sup A$ y $a \leq x_0 \leq b$ ($a \leq x_0$ por ser $a \in A$; $x_0 \leq b$ por ser b cota superior de A). Así pues, $x_0 \in [a,b]$.

- Veamos que, de hecho, $a < x_0 < b$:

Como $f(a) < 0$ y f es continua en $x = a$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $f < 0$ en $[a, a+\delta]$ (por la Prop 11. y las observaciones tras ella). Por tanto, $\sup A \geq a + \delta > a$

Asimismo, $x_0 < b$, pues $x_0 = b$, esto implicaría que $f \leq 0$ en $[a,x]$ $\forall x < b$. Tomando $x_n = b - \frac{b-a}{n}$ $(n=1,2,\dots)$, $x_n \in [a,b]$ $\forall n$, $x_n < b$ $\forall n$ y $x_n \longrightarrow b$. Por ser f continua en b, se seguiría $f(b) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\leq 0 \, \forall n} \leq 0$, lo cual contradice $f(b) > 0$.

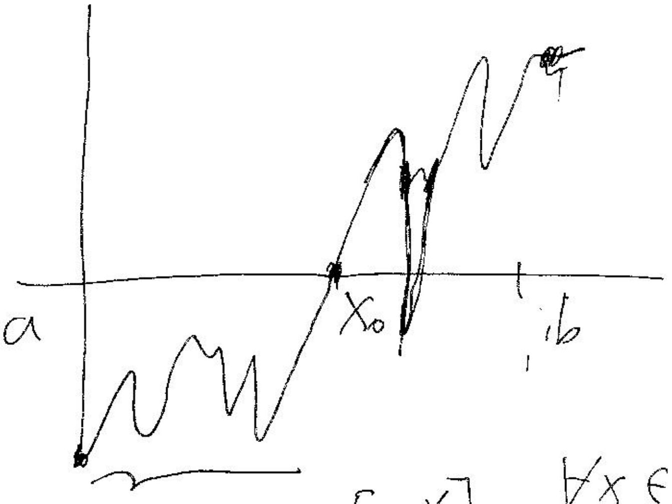
-. Veamos que $f(x_0) = 0$:

-. Si fuera $f(x_0) > 0$, por la Prop. 11 $\exists \delta > 0$ tal que $f > 0$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$. Luego si $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ no se cumple $f \leq 0$ en $[a,x]$, de donde $\sup A = x_0 \leq x_0 - \delta$ (contradicción).

-. Si fuera $f(x_0) < 0$, usando de nuevo la Prop. 11, $\exists \delta > 0$ tal que $f < 0$ en $\cancel{[x_0, x_0+\delta] \subset [a,b]}$. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b]$. Como $f \leq 0$ en $[a, x_0 - \frac{\delta}{2}]$ $(x_0 - \frac{\delta}{2} \in [a,b]$ y $x_0 - \frac{\delta}{2} < x_0)$, tendríamos $f \leq 0$ en $[a, x_0 - \frac{\delta}{2}] \cup [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = [a, x_0 + \delta]$

$\Rightarrow$ $x_0 = \sup A \geq x_0 + \delta > x_0$ (contradicción).

-. Por tanto, la única posibilidad que queda es $f(x_0) = 0$.



$f \leq 0$ en $[a,x]$ $\forall x \in [a, x_0)$.

(el caso $f(a) > 0 > f(b)$ se omite) $\boxed{\text{B}}$

Prop 14) (Teorema de Weierstrass)

Sea $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en todo $x \in [a,b]$.
Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en $[a,b]$.
En particular, f es acotada en todo $[a,b]$.

Dem:

i) Veamos que f es acotada superiormente en $[a,b]$. Si no fuese así, $\forall n = 1, 2 \ldots$ el conjunto $A_n = \{x \in [a,b] : f(x) \geq n\} \neq \phi$. Entonces, para cada $n = 1, 2 \ldots$ elegimos $x_n \in A_n$ y consideramos $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, que es una sucesión en $[a,b]$.
Por la Prop. 10, s posee una subsucesión $y_k = x_{n_k}$

$(k=1,2,\ldots)$ convergente a cierto $x_0 \in [a,b]$.

Puesto que $n_k \geq k \ \forall k \Rightarrow f(y_k) = f(x_{n_k}) \geq n_k \geq k$, de donde $f(y_k) \longmapsto \infty$. Pero como f es continua en x_0, f está acotada localmente en x_0, $\exists C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$ (ésto incluye el posible caso de que x_0 ~~sea~~ uno de los extremos a ó b).

Puesto que $y_k \longmapsto x_0 \Rightarrow \exists K$ tal que $k \geq K$ $\Rightarrow y_k \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$, de donde $|f(y_k)| \leq C$, lo cual contradice que $f(y_k) \to \infty$.

(ii) Razonando de forma similar a i), se deduce que f está acotada inferiormente en $[a,b]$.

(iii) De i) e ii) se deduce que hay constantes $C_1 \leq C_2$ tales que $C_1 \leq f(x) \leq C_2$ $\forall x \in [a,b]$, y de esto se deduce que:

$$\exists M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

$$\exists m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

(esto es, $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$, siendo m y M las constantes óptimas en esta desigualdad).

iv) Afirmo que $\exists\, x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) = M$ y $\exists\, x_1 \in [a,b]$ con $f(x_1) = m$ (sólo probaré lo primero):

Para ello, observamos que si $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon < M$ no es el supremo de ~~{x ∈ [a,b] : f~~ $\{f(x) ; x \in [a,b]\}$, luego $A_\varepsilon = \{x \in [a,b] : M - \varepsilon \le f(x) \le M\} \neq \emptyset$

Para $n = 1, 2, \ldots$, elegimos $x_n \in A_{1/n}$, luego $M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M$. Si $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, s es una sucesión en $[a,b]$ y podemos determinar una subsucesión suya $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, ($y_k = x_{n_k}$) convergente a un $x_0 \in [a,b]$. Puesto que

$$M - \frac{1}{n_k} \le f(y_k) \le M \quad \forall k = 1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

tomando límites en $(*)$ (y usando $0 < \frac{1}{n_k} \le \frac{1}{k}$, luego $\frac{1}{n_k} \to 0$),

$$M = \lim_{k \to \infty} \left(M - \frac{1}{n_k}\right) \le \lim_{k \to \infty} f(y_k) = M \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(y_k) = M.$$

Pero como f es continua en $x_0 \in [a,b]$ e $y_k \to x_0$,

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = M. \quad \blacksquare$$

Prop 1.15 (Teorema de los Valores intermedios; 1ª Versión).

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en todo $x \in [a,b]$.

Entonces $f([a,b]) = [m, M]$, siendo

- $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} = \inf\{f(x) ; x \in [a,b]\}$
- $M = \max\{f(x) ; x \in [a,b]\} = \sup\{f(x) ; x \in [a,b]\}$

Dem: Por el Teorema de Weierstrass, $m \leq f(x) \leq M$

- $\forall x \in [a,b]$. Si $m = M$, entonces f es constante, y el Teorema es trivial.
- Supongamos que $m < M$ y tomemos $y \in (m, M)$. Afirmo que $\exists x \in [a,b]$ con $f(x) = y$. Sea $g(x) = f(x) - y$. Entonces $\exists x_0 \in [a,b]$ con $g(x_0) < 0$, pues de lo contrario, $f(x) \geq y \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \geq y$, lo cual contradice que $y > m$.

Del mismo modo, $\exists x_1 \in [a,b]$ con $g(x_1) > 0$, pues de lo contrario, $f(x) \leq y \;\; \forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq y$, lo cual contradice $y < M$

-. Tenemos $x_0 < x_1$ ó $x_1 < x_0$ (no pueden ser iguales, pues $g(x_0) < 0 < g(x_1)$), y ya sea uno u otro caso, usando el Teorema de Bolzano se sigue que $\exists\, x_2$ entre x_0 y x_1 con $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = y$ $\boxed{\text{ቑ}}$

<u>Prop 16</u>: Sea $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en todo $x \in [a,b]$ e inyectiva. Entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente con

$$f([a,b]) = \begin{cases} [f(a), f(b)] : f \text{ creciente} \\ [f(b), f(a)] : f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

y en general, si $f([a,b]) = [c,d]$, la inversa $f^{(-1)} : [c,d] \subset \mathbb{R} \longmapsto [a,b]$ es continua (creciente si f es creciente, y decreciente si f es decreciente).

<u>Dem</u>: Puesto que $f(a) \neq f(b)$, o bien $f(a) < f(b)$ ó bien $f(b) < f(a)$. Veamos que si $f(a) < f(b)$,

f es estrictamente creciente en $[a,b]$. Para ello, veamos primero que si $a<c<b \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a) < f(c) < f(b)$: Si no fuera así, ó bien $f(c) \leq f(a)$ ó bien $f(c) \geq f(b)$.

- Si $f(c) \leq f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) \in [f(c), f(b)]$, y por el Teorema de Valores intermedios, $\exists c' \in [c,b]$ con $f(c') = f(a)$, lo cual contradice la inyectividad de f.
- Si $f(c) \geq f(b) > f(a) \Rightarrow f(b) \in [f(a), f(c)]$ $\Rightarrow \exists c'' \in [a,c]$ con $f(c'') = f(b)$, y de nuevo contradecimos la inyectividad de f.
- Sean ahora $a < c < c' < b$ y queremos ver que $f(c) < f(c')$. Pero usando que f es continua en $[c,b]$, usando el argumento anterior, $f(c) < f(c') < f(b)$.

- Veamos ahora que $f^{(-1)}: [f(a), f(b)] \subset \mathbb{R} \to [a,b]$ es estrictamente creciente y continua:

Sean $f(a) \leq y < y' \leq f(b)$. ~~$\left[\begin{array}{l} x' = f(x) \\ y' = f(y) \end{array}\right.$ con $x,y \in [a,b]$. $\left(\begin{array}{l} x' = f^{(-1)}(y) \\ y' = f^{(-1)}(y') \end{array}\right)$~~

35)

Si fuera $x = f^{(-1)}(y) \geq x' = f^{(-1)}(y')$
$\Rightarrow y = f(x) \geq y' = f(x')$, en contra de que es estrictamente creciente, luego $f^{(-1)}$ también lo es.

Además, dados $x \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$ tenemos:

- Si $x = a$, $f([a, a+\varepsilon]) = [f(a), f(a+\varepsilon)]$ (para $0 < \varepsilon \leq b-a$). Si $y \in [f(a), f(a+\varepsilon)]$,
$a \leq f^{(-1)}(y) \leq a+\varepsilon \Rightarrow 0 \leq f^{(-1)}(y) - a \leq \varepsilon$,
lo cual quiere decir que si $y \in [f(a), f(a)+\delta]$, con $\delta = f(a+\varepsilon) - f(a) > 0 \Rightarrow 0 \leq f^{(-1)}(y) - a) \leq \varepsilon$, luego $f^{(-1)}$ es continua (por la derecha) en $y = f(a)$.
(un argumento similar proporciona que $f^{(-1)}$ es continua (por la izquierda) en $y = f(b)$).
- Si $x \in (a,b)$ y $0 < \varepsilon \leq \min\{x-a, b-x\}$ (de modo que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset [a,b]$, $f([x-\varepsilon, x+\varepsilon]) = [f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)]$,
luego si $y \in [f(x)-\delta, f(x)+\delta]$, con
$0 < \delta = \min\{f(x) - f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon) - f(x)\}$
(entonces $[f(x)-\delta, f(x)+\delta] \subset [f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)]$,
$f^{(-1)}(y) \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, luego si $|y - f(x)| \leq \delta \Rightarrow |f^{(-1)}(y) - x| \leq \varepsilon$,

luego $f^{(-1)}$ es continua en $y = f(x)$. ■

<u>Obs:</u> Si en lugar de considerar $f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con I un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ consideramos intervalos abiertos (c,d) (donde puede ser $c = -\infty$ y $d = \infty$) con $f : (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ inyectiva y continua, tenemos que f es asimismo inyectiva y continua en $[a,b]$ siempre que $c < a \leq b < d$. Usando la Prop. 16,

$f((c,d)) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\right)$ (tomando a_n, b_n sucesiones monótonas con $\begin{cases} a_n \to c & (a_n \text{ creciente}) \\ b_n \to d & (b_n \text{ decreciente}) \end{cases}$

y $f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n])$, obtenemos

$$f((c,d)) = (c', d') \text{ siendo } \begin{cases} d' = \lim\limits_{n \mapsto \infty} f(b_n) \\ c' = \lim\limits_{n \mapsto \infty} f(a_n) \end{cases} \text{ (f creciente)}$$

ó bien $\begin{cases} d' = \lim\limits_{n \mapsto \infty} f(a_n) \\ c' = \lim\limits_{n \mapsto \infty} f(b_n) \end{cases}$ (f decreciente).

<u>Def 7</u>: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

Decimos:

i) $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = \infty$ si $\exists \delta_0 > 0$ tal que f está definida en $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}$ (es decir, este conjunto $\subset A$) y $\forall R > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq R$.

ii) $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = -\infty$ si $\exists \delta_0 > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \subset A$ y $\forall R > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, $\Rightarrow f(x) \leq -R$.

iii) $\lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \infty$ si $\exists \delta_0 > 0$ con $(x_0, x_0 + \delta_0) \subset A$ y $\forall R > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) \geq R$

iv) $\lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) = -\infty$ si $\exists \delta_0 > 0$ con $(x_0, x_0 + \delta_0) \subset A$ y $\forall R > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) \leq -R$

v) $\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x) = \infty$ si $\exists \delta_0 > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0) \subset A$ y $\forall R > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) \geq R$

vi) $\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x) = -\infty$ si $\exists \delta_0 > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0) \subset A$ y $\forall R > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) \leq -R$.

Def 8) Sea $f: I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ con I un intervalo no-acotado, luego $I \supset [a,\infty)$ para cierto $a \in \mathbb{R}$ ó $I \subset (-\infty, a]$ para cierto $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

i) Si $I \supset [a,\infty)$, decimos $\lim_{x \mapsto \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists R \geq a$ tal que si $x \geq R \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

ii) Si $I \supset [a,\infty)$, decimos $\lim_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$ si $\forall R > 0\ \exists R' \geq a$ tal que si $x \geq R' \Rightarrow f(x) \geq R$.

iii) Si $I \supset [a,\infty)$, decimos $\lim_{x \mapsto \infty} f(x) = -\infty$ si $\forall R > 0\ \exists R' \geq a$ tal que si $x \geq R' \Rightarrow f(x) \leq -R$.

iv) Si $I \supset (-\infty, a]$, decimos $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists R \leq a$ tal que si $x \leq R \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

v) Si $I \supset (-\infty, a]$, decimos $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \infty$ si $\forall R > 0\ \exists R' \leq a$ tal que si $x \leq R' \Rightarrow f(x) \geq R$

vi) Si $I \supset (-\infty, a]$, decimos $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall R > 0\ \exists R' \leq a$ tal que si $x \leq R' \Rightarrow f(x) \leq -R$.

Prop 17: Sea $f(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Entonces

i) f es creciente ~~...~~ estrictamente y continua en todo $x \in \mathbb{R}$, con $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$

ii) Está bien definida la inversa $f^{(-1)}$ de e^x (y la llamaremos $\log x$), con dominio $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ y $\log : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ es creciente estrictamente y continua, con $\log(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$.

iii) Para $a \in \mathbb{R}$ exponente fijo, la función $f_a(x) = x^a$, con dominio $\mathbb{R}_+$ es continua y además:

iii.1) Si $a > 0$, $f_a(x)$ es estrictamente creciente, con singularidad evitable en $x = 0$. En tal caso, tomando $f_a(x) = \begin{cases} x^a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, f es continua en $[0,\infty)$ y $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \mapsto \infty} x^a = \infty$

iii.2) Si $a = 0$, $f_a(x) \equiv 1$

iii.3) Si $a < 0$, $f_a(x)$ presenta una singularidad inevitable en $x = 0$ con $\begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 0+} x^a = \infty \\ \lim\limits_{x \mapsto \infty} x^a = 0 \end{cases}$

(por "singularidad" entendemos discontinuidad). ~~BI~~ 40)

Dem:

i) Sabemos que $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente en su dominio $\mathbb{R}$. Además, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Serie absolutamente convergente) y $f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Si $|x| < 1$, $|f(x) - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ (pues $n! \geq 1$ $\forall n$)

$= \frac{|x|}{1+|x|}$.

. Si además $|x| \leq 1/2 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq 2|x|$.

Si ahora $\varepsilon > 0$, tomando $|x| < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| \leq 2|x| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} e^x = 1 = e^0$, luego $f(x)$ es continua en $x=0$.

. Sea ahora $x \in \mathbb{R}$ y supongamos $|x-y| < \delta$ ($\Leftrightarrow$ $y \in (x-\delta, x+\delta)$). Entonces $|e^x - e^y| =$

$= |e^x(1 - e^{y-x})| = e^x|1 - e^{y-x}| \left(= f(x)|1 - f(y-x)|\right)$

Puesto que $f(x) > 0$ $\forall x$, si ahora $\varepsilon > 0$,

~~$e^x|1-e^{y-x}| < \varepsilon$ si $|1-e^{y-x}| < \varepsilon e^{-x}$~~

~~Si además $\delta < 1/2$, $|1 - e^{y-x}| \leq 2|y-x| < 2\delta$,~~

3/9

y $0<\delta<1/2$, $e^x|1-e^{y-x}| \leq e^x 2|y-x| < 2\delta e^x$,

y podemos hacer esto $<\varepsilon$ tomando $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon e^{-x}\} > 0$.

Usando la Prop 16 y la observación tras ella, deducimos que ~~$f(\mathbb{R}_+)$~~ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ es una biyección continua cuya inversa $y = \log x$ es biyección continua de $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}$.

ii) Consecuencia inmediata de lo establecido en i).

iii) Fijando $a\in\mathbb{R}$ y $f_a(x) = x^a$ con dominio $\mathbb{R}_+$, como $f_a(x) = \exp(a\log x)$, f_a está bien definida en su dominio y por ser composición de funciones continuas, es continua (Prop. 9)

iv) 1) Si $a>0$, f_a es la composición de las funciones exp (estrictamente creciente) y $a\log x$ (también), luego f_a asimismo lo será.

- Si $x \mapsto 0+$, $\log x \mapsto -\infty$ (esta afirmación equivale a afirmar $\lim_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$, por ser log la inversa de la exponencial; la última afirmación es obvia).

Entonces, si $a>0$ y $x \mapsto 0+$, $a \log x \mapsto -\infty$

y como $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \mapsto 0+} \exp(a \log x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = 0$.

~~- Si $x \mapsto \infty$, $1/x \mapsto 0+$ y como $x^a = (1/x^a)^{-1}$~~

- Si $x \mapsto \infty$, $\log x \mapsto \infty$ (esto equivale a afirmar $\lim\limits_{x \mapsto \infty} e^x = \infty$, lo cual de nuevo es obvio).

$\Rightarrow$ $a \log x \mapsto \infty$ $(x \mapsto \infty)$, por ser $a>0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \exp(a \log x) = \lim\limits_{x \mapsto \infty} e^x = \infty$.

(iii.2) Si $a=0$, $x^a = \exp(a \log x) = e^0 = 1$ $\forall x>0$.

(iii.3) Si $a<0$, $f_a(x) = x^a = (x^{-a})^{-1}$ (para $x>0$)

$= (x^{|a|})^{-1}$ (pues $a<0$).

Usando lo visto en iii.1), como $\lim\limits_{x \mapsto 0+} x^{|a|} = 0$

y $x^a > 0$ $\forall x>0$, se sigue que $\lim\limits_{x \mapsto 0+} (x^{|a|})^{-1} = \infty$.

Si $x \mapsto \infty$, $x^{|a|} \mapsto \infty$ por iii.1), y entonces

$x^a = (x^{|a|})^{-1} \mapsto 0$, $x \to \infty$.

3/3)

Es importante observar que un teorema fundamental como que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ alcanza un máximo y mínimo y, en consecuencia, está acotada, falla cuando consideramos intervalos que no sean así. Veamos varios ejemplos.

Ejemplo 1: Sea $f:(0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$.

Puesto que $0 \notin (0,1]$, f es continua en todo su dominio. Sin embargo, no está acotada, pues si $x_n = 1/n$ $(n = 1,2,\ldots)$, $f(x_n) = n$, que puede hacerse tan grande como se quiera.

Ejemplo 2: Sea $f(x) = x$ con $Dom(f) = (0,1)$.

Entonces f es continua en todo $(0,1)$ y está claramente acotada (inferiormente por 0, y superiormente por 1), pero no alcanza ni máximo ni mínimo:

Si $x_0 \in (0,1)$ fuera un punto donde f alcanzara un máximo, como $x_0 < 1$, considerando $x_1 = \frac{1+x_0}{2}$,

$x_0 < x_1 < 1$ y entonces $x_0 = f(x_0) < x_1 = f(x_1)$,

lo cual contradice que x_0 sea el máximo. Por parecido motivo, f no alcanza un mínimo

- También, el Teorema de Bolzano falla si eliminamos la continuidad (aunque para este Teorema no es importante que su dominio sea un intervalo cerrado y acotado; lo único crucial es continuidad y que el dominio sea un intervalo).

<u>Ejemplo 3</u>: Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$, con $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Entonces f es continua en todo $x \in Dom(f)$, positiva si $x < 0$ y negativa si $x > 0$. Claramente no se anula (aquí falla que el dominio ~~no~~ es un intervalo).

<u>Ejemplo 4</u>: Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, con $Dom(f) = [-1,1]$.

El dominio de f es un intervalo y no se anula. Falla la continuidad de f

Asimismo, el Teorema de Valores intermedios falla si eliminamos la continuidad de f:

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ (parte entera de x). $= \min\{n \in \mathbb{Z} : n > x\}$.

Veamos primero que esta función está bien definida.

<u>Lema</u>: El conjunto $\mathbb{Z}$ no está acotado superior ni inferiormente en $\mathbb{R}$.

<u>Dem</u>: Puesto que claramente $\mathbb{Z} \neq \emptyset$, si estuviera acotado superiormente, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 = \sup \mathbb{Z}$, luego tendríamos:

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x_0$.
- Como $x_0 - 1 < x_0$, $x_0 - 1$ <u>no</u> es el supremo de $\mathbb{Z}$, luego $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ con $x_0 - 1 < n_0$.

Entonces $x_0 = (x_0 - 1) + 1 < n_0 \leq x_0 \Rightarrow x_0 < x_0$ (Contradicción).

El argumento para ver que no está acotado inferiormente es muy similar.

Entonces, dado $x \in \mathbb{R}$, como x no es cota superior de $\mathbb{Z}$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ con $n > x$.

Por tanto, $\{n \in \mathbb{Z} ; n > x\} \neq \emptyset$.

–. Si además $x \geq 0$, $\{n \in \mathbb{Z} ; n > x\} = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$

(pues si $n \in \mathbb{Z}$ con $n \leq 0$, n no es $> x$)

Ahora usamos el principio de que si $A \subset \mathbb{N}$ es no-vacío, A tiene un 1er elemento n_0 ($= \min A$), esto es, $\exists n_0 \in A$ con $n_0 \in A$ / $n_0 - 1 \notin A$ y n_0 es el menor elemento con esta propiedad.

Por tanto, si $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > x\}$,

tenemos $n_0 > x$ (pues $n_0 \in \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$) y

$n_0 - 1 \leq x$ (pues $n_0 - 1 \notin \{n \in \mathbb{N}, n > x\}$).

esto es, $n_0 - 1 \leq x < n_0$. Entonces $[x] = n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$.

–. Si $x < 0$, $-x > 0$ y por el apartado anterior, $\exists k \in \mathbb{Z}$ (con $k = [-x]$) con $k \leq -x < k+1$

$\Rightarrow -(k+1) < x \leq -k$. Para terminar, si $x \in \mathbb{Z}$, entonces debe ser $x = -k = [x]$, y si $x \notin \mathbb{Z}$, $x \neq -k$, luego $-(k+1) < x < -k \Rightarrow [x] = -(k+1) \in \mathbb{Z}$.

La función $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ cumple claramente
$x \longmapsto [x]$

$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$ (de hecho, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, pues como $\mathbb{Z} = f(\mathbb{Z}) \subset f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$),

luego todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ no está en la imagen de f.

Aquí falla que f tiene discontinuidades de salto en cada entero:

→ Propiedades de $[x]$:

i) $[x]$ es creciente

ii) $[x] \leq x < [x] + 1 \quad \forall x$.

iii) Si $x = k \in \mathbb{Z}$, $[x]$ presenta una discontinuidad de salto de magnitud 1

Dem: i) Sean $x \leq y$. Puesto que $[x] \leq x$, $[x] \leq y$, y como $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leq \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} = [y]$.

ii) Consecuencia inmediata de la definición.

iii) Si $x = k \in \mathbb{Z}$ tenemos:

$$[x] = \begin{cases} k-1, & k-1 \leq x < k \quad a) \\ k, & k \leq x < k+1 \quad b) \end{cases}$$

con salto $k-(k-1) = 1$

a) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to k^-} [x] = k-1$; b) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to k+1} [x] = k$, Def 9 (Funciones periódicas).

i) Sea $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Decimos que $T>0$ es un período de f si $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Sea $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Decimos que $T>$ es el período de f si T es un período de f y si $S>0$ es otro período de f, $S \geq T$.

Prop 18) i) Sea $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que admite un período $T>0$. Entonces $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f(x+kT) = f(x)$.

(ii) Si $f \not\equiv cte$ admite un período $T>0$, entonces $\exists T_0 > 0$ período de f, si además f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Dem;

i) Pongamos $k \in \mathbb{N}$ y veamos que $f(x+kT) = f(x)$ $\forall k = 1, 2, \ldots$

(i.1) Para $k=1$ esto es así por ser T período de f.

(i.2) Si para un $k \geq 1$, $f(x+kT) = f(x)$ $\forall x$, para $k+1$ tenemos

$$f(x+(k+1)T) = f((x+kT)+T)$$
$$= f(x+kT) \quad (\text{Caso } k=1)$$
$$= f(x) \quad (\text{Caso } k \geq 1).$$

(i.3) Para $k=0$ es obvio que $f(x+kT)=f(x)$ $\forall x$.

(i.4) Sea ahora $k \in \mathbb{Z}$ con $k<0$.

(i.5) Si $k=-1$, $f(x-T) = f((x-T)+T)$ (por ser T periodo de f)
$= f(x)$.

(i.6) Si para $k \in \mathbb{Z}$ con $k \leq -1$ se cumple $f(x-kT)=f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

para $k-1$, $f(x-(k-1)T) = f((x-(k-1)T)+T)$ (T es periodo de f)
$= f(x-kT)$
$= f(x)$.

(ii) Si $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no admite un periodo mínimo $T_0 > 0$, existirá una sucesión de periodos $T_1 \geq T_2 \geq \ldots \geq T_n > 0$ con $T_n \longmapsto 0$. Si damos un $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, y fijamos también $n = 1, 2, \ldots$, podremos encontrar enteros k tales que $kT_n \leq x_0 < (k+1)T_n$ (*) y por la periodicidad de f, $f(0) = f(kT_n)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.
Como f es continua en x_0, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si ~~...~~ $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, y como

---

(*): El $k \in \mathbb{Z}$ que tomemos es justamente $[x_0/T_n]$

$0 \leq x_0 - kT_n < T_n$ (con $T_n \to 0$) $\forall n \in \mathbb{N}$

Puesto que $T_n \to 0$, $\exists N$ tal que si $n \geq N$, $T_n < \delta$.

Entonces $|f(x_0) - f(kT_n)| < \varepsilon$, pero como $f(kT_n) = f(0)$,

$|f(x_0) - f(0)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies f(x_0) = f(0)$,

lo cual contradice que $f \not\equiv$ cte.

Por tanto, $T_0 = \inf\{T > 0 : T$ es periodo de $f\} > 0$.

Veamos que T_0 es asimismo periodo de f:

Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$ y queremos probar $f(x_0) = f(x_0 + T_0)$.

Pero por definición de T_0, para $n = 1, 2, \ldots$, $\exists T_n \geq T_0$

periodo de f con $T_n \to T_0$.

Por tanto, $x_0 + T_n \to x_0 + T_0$, y como

f es continua en $x_0 + T_0$,

$$f(x_0 + T_0) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{f(x_0 + T_n)}_{= f(x_0)} \quad \forall n, \text{ por ser } T_n \text{ periodo de } f$$

$$= \lim_{n \to \infty} f(x_0)$$

$$= f(x_0)$$

Observación: La continuidad de f es esencial en el argumento anterior, pues si f es la "Función de Dirichlet" dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$,

si $q > 0$ es cualquier racional, $f(x+q) = f(x)$ $\forall x$

(si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow x+q \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si $q \in \mathbb{Q}$, luego $1 = f(x) = f(x+q)$, y si $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+q \in \mathbb{Q}$, luego $0 = f(x) = f(x+q)$).

En este caso, $\inf\{T > 0 : T$ es periodo de $f\} = 0$, aunque $f \not\equiv$ cte.

- Empalme de funciones continuas:

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ de modo que

$$f(x) = \begin{cases} g(x) : & x \in A \text{ y } x < x_0 \\ f(x_0) : & x = x_0 \\ h(x) : & x \in A \text{ y } x > x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Nos preguntamos cuándo una función así admite una discontinuidad evitable en $x = x_0$ ($f(x)$ es función obtenida del ~~emp~~ empalme de g y h)

Prop 18: Sea f como en (*). Entonces:

i) f presenta una discontinuidad evitable en x_0 sii $\lim_{x \to x_0-} g(x) = \lim_{x \to x_0+} h(x)$.

ii) f es continua en x_0 sii

$$\lim_{x \to x_0-} g(x) = \lim_{x \to x_0+} h(x) = f(x_0).$$

Dem i) Puesto que f presenta una discontinuidad evitable en x_0 quiere decir (por definición) que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ y tal límite existe sii $\exists \lim_{x \to x_0-} f(x)$, $\exists \lim_{x \to x_0+} f(x)$ y estos son iguales, como además $f(x) = g(x)$ si $x \in A$ y $x < x_0$,

$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0-} g(x)$, y del mismo modo, como $f(x) = h(x)$ si $x \in A$ y $x > x_0$,

$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} h(x)$.

ii) Por i), $\lim_{x \to x_0-} g(x) = \lim_{x \to x_0+} h(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} g(x)$. ~~Y~~ $f(x)$ es asimismo continua en x_0 sii $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

- Ejemplos de funciones periódicas:

1.) $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ (ya veremos su definición precisa).

2.) Sea $f(x) = \{x\} := x - [x]$ "parte fraccionaria de x".

Veamos que f es periódica, y de período (mínimo) 1

Dem: Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $[x] \leq x < [x]+1$

$\Rightarrow [x]+1 \leq x+1 < ([x]+1)+1$

$\Rightarrow [x]+1 = [x+1]$ (pues $[x]+1 \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow \{x+1\} = x+1-[x+1] = x+1-([x]+1) = x-[x] = \{x\}$.

. Si $0<T<1$, T no es período de f: Considerando $x=0$, $0=\{0\}$, pero $\{0+T\} = \{T\} = T$, por ser $0\leq T<1$.
Como $T>0$, $\{0+T\} \neq \{0\}$.

- Ejemplos de empalmes de funciones continuas:

a) Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 1+x, & x \leq 0 \end{cases}$, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Sea $h(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, h es continua en todo $\mathbb{R}$ (coincide con $|x|$).

c) Sea, para $a \geq 0$, $f_a(x) = \begin{cases} x^a, & x \geq 0 \\ (-x)^a, & x \leq 0 \end{cases}$ $(= |x|^a)$

d) Sea, para $a > 0$, $g_a(x) = \begin{cases} x^a, & x \geq 0 \\ -(-x)^a, & x \leq 0 \end{cases}$ $(= |x|^a \operatorname{sgn}(x))$

· En ~~ello~~ el caso c):

$$\lim_{x \to 0+} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}, \text{ y}$$

$$\lim_{x \to 0-} (-x)^a = \lim_{y \to 0+} y^a$$ (haciendo $y = -x$, y observando $x < 0 \Leftrightarrow y > 0$)

$$= \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x \to 0+} x^a .$$

· En el caso d):

$\lim_{x \to 0+} x^a = 0$ y $\lim_{x \to 0-} (-(-x)^a) = -\lim_{y \to 0+} y^a = -0 = 0$,

— Sabemos que si x_n, y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ son sucesiones con $\begin{cases} x_n \longmapsto 0 \\ (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ acotada} \end{cases}$, entonces

$x_n y_n \longmapsto 0$ (aunque y_n no tiene porqué tener límite).

Hay una versión para funciones del anterior resultado de manera.

Prop 19: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\exists \delta_0 > 0$ $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \subset A$ y

y $f(x) = g(x) h(x)$ en

$g(x)$, $h(x)$ cumplen:

(i) $\lim_{x \mapsto x_0} g(x) = 0$.

(ii) h está localmente acotada en x_0.

Entonces $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Dem: Puesto que h está localmente acotada en x_0, $\exists\ \delta_1 \in (0, \delta_0]$ ~~tal~~ y $\exists C > 0$ tal que $|h(x)| \leq C$ si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

Entonces, para $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta_1$, $|f(x)| \leq C |g(x)|$.

Como $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_1]$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Entonces $|f(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$,

luego $\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = 0$. $\blacksquare$

Prop 20: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ para } x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \setminus \{x_0\} \subset A$$

(para un cierto $\delta_0 > 0$ y funciones g y h). Si $\exists \lim_{x \to x_0} g(x)$, $\exists \lim_{x \to x_0} h(x)$ y estos coinciden, entonces

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x).$$

Obs: Hay versiones de este resultado cambiando límites por límites laterales, y también se pueden tomar límites con $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Dem: Tenemos $0 \leq f(x) - g(x) \leq$ ~~h(x)~~ $h(x) - g(x)$ ~~si~~ si $0<|x-x_0|<\delta_0$.

Como $\lim_{x \to x_0} (h(x) - g(x)) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que

$0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow$ $h(x) - g(x) < \varepsilon$, y entonces

$0 \leq f(x) - g(x) < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.

Como $f(x) = g(x) + (f(x) - g(x))$ y $\begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0} g(x) \\ \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0 \end{cases}$,

se sigue que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$.

Ejemplos:

1) Sea $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$. Entonces

f tiene una discontinuidad evitable en $x=0$

si $a \neq 0$ y f es continua en $x=0$ si $a=0$.

Dem.: a) $f(x) = g(x) h(x)$ (para $x \neq 0$) con $g(x)=x$ y $h(x) = \operatorname{sen} 1/x$. Claramente, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq 1$, luego aplicando la Prop 19, $\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0$, de modo que si $a=0$, f es continua en $x=0$

~~2) Sea f(x)=~~

b) (Otra forma) $|f(x)| = |x| \left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right|$ $(x \neq 0)$

$\leq |x|$, $(x \neq 0)$.

luego $\underbrace{-|x|}_{g(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{|x|}_{h(x)}$,

Como $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0$, $\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(Usando la Prop 20).

2) Probar que $\exists \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Solución: Sabemos que $e^x = 1+x+\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow e^x - 1 = x + \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^x-1}{x} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{x^{n-1}}{n!} \quad (x\neq 0).$$

Ahora queda el problema de estimar $\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{x^{n-1}}{n!}$:

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{x^{n-1}}{n!}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{|x|^{n-1}}{n!}$$. Si $n\ge 2$, $n! \ge 2$,

y si consideramos $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, podemos asumir $|x|\le 1/2$.

Entonces $$\sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{|x|^{n-1}}{n!} \le \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty}{}' |x|^{n-1} = \frac{1}{2} \frac{|x|}{1-|x|} \qquad 1-|x| \ge \frac{1}{2}$$

$$\le \frac{1}{2} \frac{|x|}{1/2} = |x|$$

Por tanto, $\left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| \le |x|$ $(0<|x|\le 1/2)$

$$\Rightarrow -|x| \le \frac{e^x-1}{x} - 1 \le |x| \quad (0<|x|\le 1/2)$$

$$\Rightarrow 1-|x| \le \frac{e^x-1}{x} \le 1+|x| \quad (0<|x|\le 1/2)$$

$\downarrow 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

- Material adicional:

- Relación entre continuidad puntual y sucesiones

Prop 24: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.

Son equivalentes:

i) $f(x)$ es continua en $x = x_0$

ii) Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en A con $x_n \longmapsto x_0$,

entonces $f(x_n) \longmapsto f(x_0)$.

Dem: Sabemos (Prop XII Notas de Clase), que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $A \setminus \{x_0\}$ con $x_n \longmapsto x_0$, $\cancel{f(x_n) \longmapsto f(x_0)}$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Si además f está definida en $x = x_0$, podemos tomar cualquier sucesión en A con $x_n \longmapsto x_0$. $\exists!$ l, f continua en $x_0 \Leftrightarrow l = f(x_0)$, de donde i) $\Rightarrow$ ii)

- Veamos ii) $\Rightarrow$ i): Si suponemos que se cumple ii) pero no i), fijamos $\varepsilon > 0$ tal que

f está definida en $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$.

Tomemos $\delta_k = \frac{\delta_0}{k}$ $(k=1,2,\ldots)$ y entonces, con ~~...~~ $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que ninguno de estos δ_k's funcionan en la definición de continuidad en $x=x_0$, esto es, hay algún x_k con $|x_k - x_0| < \frac{\delta_0}{k}$ y sin embargo $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ $\forall k = 1,2,\ldots$,

Pero como $|x_k - x_0| < \frac{\delta_0}{k}$ $\forall k \Rightarrow x_k \longmapsto x_0$, luego $f(x_k) \longmapsto f(x_0)$. En particular, $\exists K$ tal que $k \geq K \Rightarrow |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ (contradicción) $\boxtimes$

Observación: Como criterio para determinar límites Prop 21 (ii) es poco práctico, pero casi siempre para establecer probar la continuidad de f en x_0. Hacerlo directamente con la definición suele ser bastante difícil (de ahí precisamente toda la teoría de este capítulo, que permite abordar este cuestión mediante los teoremas estudiados

61)

-. Paridad de funciones

Def 10 (Funciones pares e impares)

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, donde $A \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto par (esto es, $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$). Decimos

i) f es par si $\forall x \in A$, $f(x) = f(-x)$.

ii) f es impar si $\forall x \in A$, $f(x) = -f(-x)$.

Prop 22: Sea $A \subset \mathbb{R}$ subconjunto par y $f, g: A \longmapsto \mathbb{R}$. Entonces:

i) Si f, g son ambas pares o impares y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ es asimismo par (respectivamente, impar).

ii) Si f, g son ambas pares o ambas impares, fg es par.

iii) Si una de estas funciones es par y la otra impar fg es impar.

iv) Si ~~f~~ $B \subseteq \mathbb{R}$ es subconjunto par $g: B \longmapsto \mathbb{R}$ es par y $\mathrm{Im}(f) \subset B$, entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es par,

si f es o bien par o bien impar.

ii) Si $g : B \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (con B subconjunto par) es impar e $Im(f) \subset B$ con f par, entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es par

iii) Si $g : B \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (con B subconjunto par) es impar e $Im(f) \subset B$ con f impar, entonces $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es impar.

Dem: i) (ii) iii) = Inmediata (ejercicio).

i) Sea $x \in A$, $(g \circ f)(-x) = g(f(-x))$

$= g(\pm f(x))$ (f par o impar)

$= g(f(x))$ (por ser g par)

$= (g \circ f)(x)$.

ii) Sea $x \in A$: $(g \circ f)(-x) = g(f(-x))$

$= g(f(x))$ (f par)

$= (g \circ f)(x)$

iii) Sea $x \in A$: $(g \circ f)(-x) = g(f(-x))$

$= g(-f(x))$ (f impar)

$= -g(f(x))$ (g impar)

$= -(g \circ f)(x)$