

# INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

## RESUMEN

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, cloud-like background that tapers to the right. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 1.- INTRODUCCIÓN.

### 1.1 Definición de Primitiva

F es función primitiva de f  $\Leftrightarrow$  Para todo elemento del Dom(f)  $\Rightarrow F'(x)=f(x)$

### 1.2 Representación de Primitivas

Si F es función primitiva de f en un intervalo I



G es función primitiva de f en un intervalo I  $\Leftrightarrow G(x)=F(x) + C$  para C= constante y para todo x de I

### 1.3 Notación Integral para las primitivas

Integral indefinida de f(x) respecto de x  $\Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$  para C=cte.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 1.4 Reglas básicas de integración

<u>Derivación</u>	<u>Integración</u>
$\frac{d(C)}{dx} = 0$	$\int 0dx = C$
$\frac{d(kx)}{dx} = k \quad k \neq 0$	$\int kdx = kx + C \quad k \neq 0$
$\frac{dkf(x)}{dx} = kf'(x)$	$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$
$\frac{d(f(x) \mp g(x))}{dx} = f'(x) \mp g'(x)$	$\int (f(x) \mp g(x))dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$
$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$



**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2.- INTEGRAL DEFINIDA.

### 2.1 Partición de un intervalo. Norma de una partición.

- Una partición  $\Delta$  del intervalo cerrado  $[a,b]$  es un conjunto finito de puntos  $\Delta = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  tal que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$
- La diferencia máxima entre dos puntos consecutivos de la partición se llama norma de la partición y se denota por  $\|\Delta\|$ , es decir:

$$\|\Delta\| = \max\{x_j - x_{j-1}\} \text{ para } j=1\dots n$$

- Si todos los intervalos de la partición son iguales, decimos que la partición es regular y, entonces:

$$\|\Delta\| = \frac{b - a}{n}$$

En general, para cualquier partición, la norma está relacionada con el número de subintervalos de  $[a,b]$  como sigue:

$$\frac{b - a}{\|\Delta\|} \leq n$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

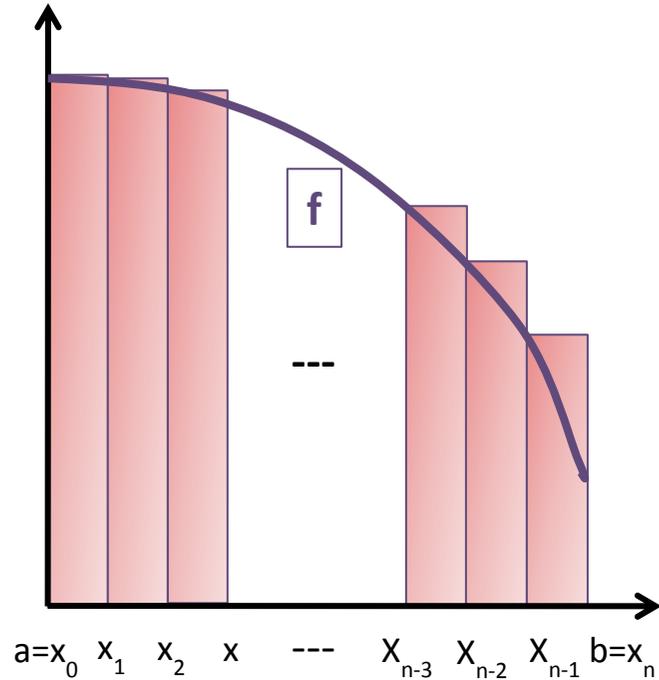
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2.2 Sumas inferiores y superiores

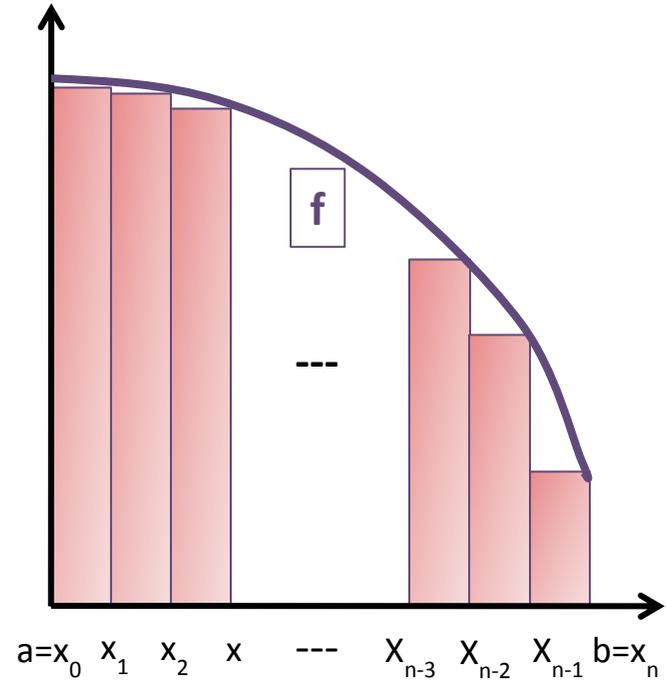
Sea  $f$  una función definida en  $[a,b]$  acotada y  $\Delta = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a,b]$



Suma superior de  $f$  respecto de  $\Delta$ :

$$S(f, \Delta) = \sum_{j=1}^n s_j (x_j - x_{j-1}) \text{ para } s_j = \text{supremo de } [x_j, x_{j-1}]$$

La suma superior disminuye a medida que se refina la partición



Suma inferior de  $f$  respecto de  $\Delta$ :

$$I(f, \Delta) = \sum_{j=1}^n i_j (x_j - x_{j-1}) \text{ para } i_j = \text{ínfimo de } [x_{j-1}, x_j]$$

La suma inferior aumenta a medida que se refina la partición  $\Delta$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2.3 Integral de RIEMANN. Definición de Integral Definida.

- Integral Superior =  $\inf \{S(f, \Delta) \text{ para } \Delta = \text{partición de } [a, b]\}$
- Integral Inferior =  $\sup \{I(f, \Delta) \text{ para } \Delta = \text{partición de } [a, b]\}$
- Si Integral Superior = Integral Inferior se dice que la función  $f$  es RIEMANN integrable y la integral de RIEMANN de  $f$  sobre  $[a, b]$  se denota por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

siendo:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(c_j) \Delta_{x_j}$  **la INTEGRAL DEFINIDA de  $f$  entre  $a$  y  $b$ .**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is in a dark green color. The logo is set against a light blue and orange background with a wavy, water-like effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 2.4 La continuidad implica integrabilidad.

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$   $\Rightarrow$   $f$  es integrable en  $[a, b]$

## 2.5 Integral definida como área de una región.

$f$  continua en  $[a, b]$

^

$f$  no negativa en  $[a, b]$

$\Rightarrow$  El área de la región comprendida entre  $f$ ,  $X$ ,  $x=a$  y  $x=b$  viene dada por:

$$\text{área} = \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is in a dark teal color. The logo is set against a background of light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2.6 Propiedades de las integrales definidas.

f definida en x=a: $\int_a^a f(x)dx = 0$	f integrable en $[a, b]$ : $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$	f integrable en $[a, b]$ , $[a, c]$ y $[c, b]$ : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
f y g integrables en $[a, b]$ y k=cte: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx</math></li> <li>▪ <math>\int_a^b (f(x) \mp g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx</math></li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math> f </math> integrable: <math>\left  \int_a^b f(x)dx \right  \leq \int_a^b  f(x) dx</math></li> <li>▪ Si f y g es integrables Riemann en <math>[a,b]</math> / <math>0 \leq g(x) \leq f(x)</math> en <math>[a,b]</math>: <math>\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx</math></li> </ul>

## 2.7 Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable.

Definimos  $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  /  $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a, b]$

**Entonces:** 1º.- F es continua en  $[a, b]$

^

2º.- Si f es continua en "c" para  $c \in (a, b) \Rightarrow F$  es derivable en "c" y  $F'(c) = f(c)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2.8 Evaluación de la integral: Regla de Barrow.

Relaciona el cálculo integral con el cálculo diferencial.

1º.- Si  $f$  es una función integrable Riemann definida en  $[a, b]$

^

2º.-  $F$  es primitiva de  $f$  en  $[a, b]$  ( $F'(x)=f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ )

Entonces:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

## 2.9 Integral de Riemann para funciones no positivas.

Sea  $f$  una función real “no positiva” definida en el intervalo  $[a, b]$ . Descomponemos  $f$  en dos funciones  $f^+(x)$  y  $f^-(x)$  definidas como sigue:

$$f^+(x) = \max \{ f(x), 0 \} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max \{ -f(x), 0 \}$$

Ambas funciones son positivas y  $f$  se puede definir en base a ellas del siguiente modo:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Así que el problema se reduce a calcular la integral de dos funciones positivas. Tenemos, por tanto, que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

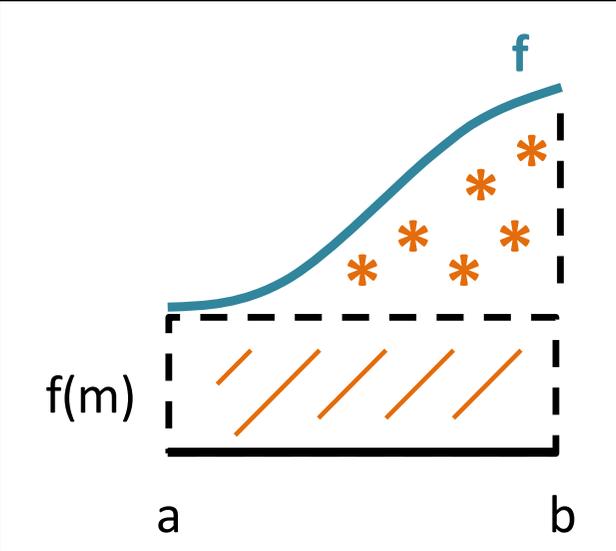
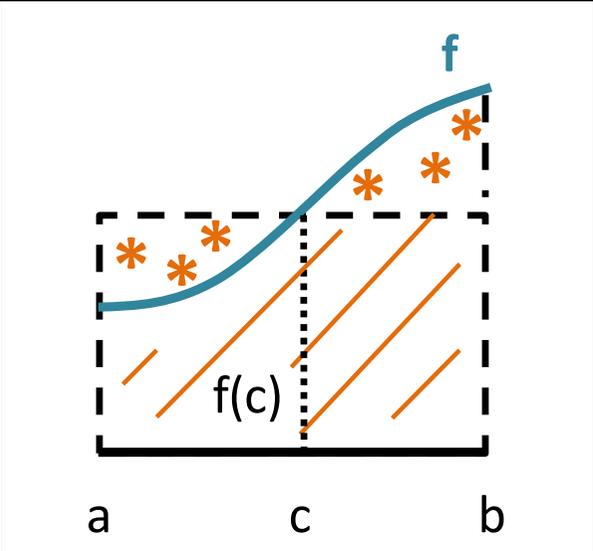
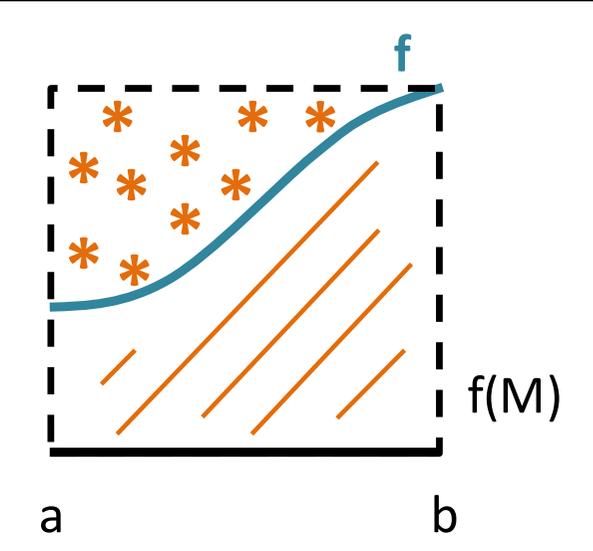
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, bold font. The "C" is large and blue, while "artagena99" is in a dark teal color. The number "99" is significantly larger than the rest of the text. The logo is set against a light blue and white background with a subtle wave pattern.

## 2.10 Teorema del Valor Medio para Integrales.

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

		
<p>&lt; Rectángulo inscrito &gt; Área menor que la de la región.</p>	<p>&lt; Rectángulo del valor medio &gt; Área igual que la de la región.</p>	<p>&lt; Rectángulo circunscrito &gt; Área mayor que la de la región.</p>
$\int_a^b f(m)dx = f(m)(b - a)$	$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$	$\int_a^b f(M)dx = f(M)(b - a)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 2.11 Definición del Valor Medio de una Función.

Si  $f$  es integrable en  $[a,b]$ : Valor medio de  $f$  en  $[a,b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

## 2.12 Primitiva de una función compuesta.

Sean  $f$ ,  $g$  y  $g \circ f$  continuas en un intervalo  $I$ .

Si  $F$  es una primitiva de  $f$  en  $I$ :  $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes, including a large, faint '99' behind the main text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### 3.- TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN. (REPASO).

- Integración por sustitución.
- Integración por partes.
- Método tabular: aplicación repetida de la integración por partes.
- Integración de funciones trigonométricas:
  - Integrales que contienen potencias del seno positivas e impares.
  - Integrales que contienen potencias del coseno positivas e impares.
  - Integrales que contienen potencias del seno no negativas y pares.
  - Integrales que contienen potencias del coseno no negativas y pares.
  - Integrales que contienen secantes y tangentes: Potencia de la secante positiva y par.
- Integración de funciones racionales:
  - Descomposición: Factores lineales diferentes.
  - Descomposición: Factores lineales repetidos.

**(ejercicios 1 a 26 resueltos y taller)**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange wavy shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70