Tema 5: Derivación

Def 1: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.
Decimos que $\exists f'(x_0) = l$ si:

i) $\exists \delta > 0$ tal que $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset A$

ii) $\exists \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.

Obs.1: Si f no está definida en x_0 no tiene sentido hablar de $f'(x_0)$.

Obs.2: La condición i) es necesaria para poder dar sentido a la condición ii). Si $A = [a,b]$ en los puntos $x=a$ y $x=b$, i) no se cumple. Sin embargo, a menudo se cumple que $\exists B \supset A$ de modo que $\left| \begin{array}{l} \exists \delta > 0 \text{ con } (a-\delta, a+\delta) \subset B \\ \exists \delta' > 0 \text{ con } (b-\delta', b+\delta') \subset B \end{array} \right.$ y

para cierta función $g: B \mapsto \mathbb{R}$ se cumple $f(x) = g(x)$ si $x \in A$. En este caso, entendemos $f'(a)$ como $g'(a)$. Alternativamente, así como en el tema anterior definimos continuidad lateral, pueden definirse derivadas laterales:

1)

Def 1)' i) Si $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y para $x_0 \in A$ existe $\delta > 0$ con $[x_0, x_0 + \delta) \subset A$, decimos

$$\exists f'_+(x_0) = l \text{ si } \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \text{ (derivada por la derecha)}$$

ii) Si $\exists \delta > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0] \subset A$, decimos

$$\exists f'_-(x_0) = l \text{ si } \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \text{ (derivada por la derecha).}$$

Ejemplos:

i) Si $f(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, $f'(x) = \begin{cases} n x^{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0. \end{cases}$

Dem: • Si $n = 0$, $f(x) = 1$ $\forall x$ y luego

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \overset{=0}{\frac{0}{y - x}} = 0$$

• Si $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$, $f(y) = (x + (y - x))^n =$

$$= x^n + n x^{n-1}(y - x) + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}{}' \binom{n}{j} x^{n-j} (y - x)^j}_{(= 0 \text{ si } n = 1).}$$

$$= \begin{cases} x + (y - x), & n = 1 \\ x + n x^{n-1}(y - x) + (y - x)^2 \sum_{j=2}^{n}{}' \binom{n}{j} x^{n-j} (y - x)^{j-2}, & n \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n x^{n-1} + (y - x) \sum_{j=2}^{n}{}' \binom{n}{j} x^{n-j} (y - x)^{j-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$(y \neq x)$

Tomando límites en (*), obtenemos:

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\begin{cases}1, & n=1\\ nx^{n-1}+0=nx^{n-1}, & n\geq 2,\end{cases}$$

pues si $n\geq 2$ y $2\leq j\leq n$, $(y-x)^{j-2}$ son funciones continuas, luego $\exists \lim_{y\to x}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}(y-x)^{j-2}$, (pues $j-2\geq 0$)

y como $\lim_{y\to x}(y-x)=0$, $\lim_{y\to x}\left[(y-x)\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}(y-x)^{j-2}\right]=0$ $\boxed{}$

ii) Si $f(x)=e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,

tenemos que para $|x|\leq 1/2$, $\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}|x|^n=\frac{|x|^2}{1-|x|}$
$\leq 2|x|^2$

- Si $x\neq 0$, entonces

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

y para $0<|x|\leq 1/2$, $\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|\leq\frac{1}{|x|}2|x|^2$
$=2|x|$.

Como $|x|\longrightarrow 0$ si $x\to 0$, $\exists\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=f'(0)$ (1)

• Si $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario e $y \neq x$,

$$e^{y} = e^{x+(y-x)} = e^{x} e^{y-x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{y}-e^{x}}{y-x} = e^{x} \frac{e^{y-x}-1}{y-x}. \qquad (2)$$

Pero $y-x \mapsto 0$ si $y \mapsto x$. Puesto que

entonces $\lim\limits_{y \mapsto x} \frac{e^{y-x}-1}{y-x} \underset{(1)}{=} \lim\limits_{t \to 0} \frac{e^{t}-1}{t} = f'(0) = 1 \quad (3),$

(2) y $(3) \Rightarrow \lim\limits_{y \mapsto x} \frac{e^{y}-e^{x}}{y-x} = e^{x} \cdot 1 = e^{x} = f'(x),$

esto es, $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• Interpretación de la derivada:

a) Significado geométrico:

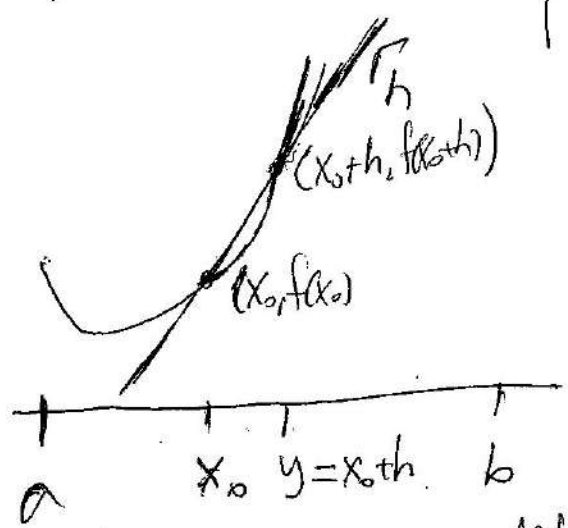
Sea $f: (a,b) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$

(obs: Tomando $A = Dom(f)$ como un intervalo abierto (a,b), la condición: $\forall x \in A \; \exists \delta > 0$ con $(x-\delta, x+\delta) \subset A$ se cumple en todos sus puntos).

Fijando $x_0 \in A$ e $y_0 \in A$ "próximo a x_0" (pero $\neq x_0$)

Tenemos $\dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} = \dfrac{\Delta_h f(x_0)}{h}$, siendo $h=y-x_0$

y $\Delta_h f(x_0) = f(x_0+h)-f(x_0)$ | h: "incremento de x" (en x_0)
$\Delta_h f(x_0)$: "incremento de f" (en x_0).



r_h: recta determinada por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$

$$y \quad r_h \equiv y - f(x_0) = \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}(x-x_0)$$

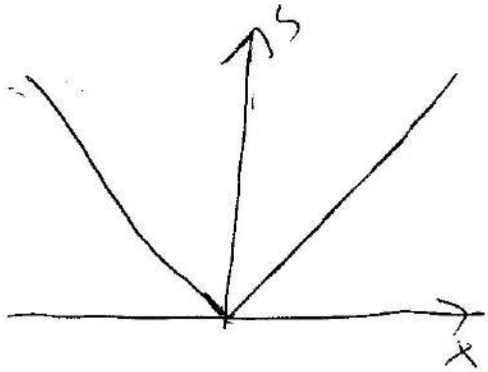
$$\Longleftrightarrow r_h \equiv y = \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}(x-x_0) + f(x_0)$$

Conforme $y \longmapsto x$ ($\Longleftrightarrow h = y-x \longmapsto 0$), la pendiente m_h de r_h, que es $\dfrac{\Delta_h f(x_0)}{h}$ tiende a $m = f'(x_0)$,

y conforme $h \longmapsto 0$, las rectas r_h cada vez se van acercando más a recta tangente r de la gráfica de $f(x)$ en $x=x_0$ (las rectas r_h son rectas "secantes").

(por supuesto, puede ocurrir que una función f no admita recta tangente, como ocurre con $f(x)=|x|$ en $x=0$)

$f(x) = |x|$:



· Si $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$ a)

· Si $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -1$ b)

$$\left.\begin{array}{l} a) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \\ b) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -1 \end{array}\right] \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

b) Significado físico:

Sea cierta magnitud $A = A(t)$ (aquí tomamos la variable de A como "tiempo", pero igual podría ser "espacio", etc). Entonces, fijando t_0 y $s \neq t_0$ otro instante, con $h = s - t_0$,

$$\frac{\Delta_h A}{h} = \frac{A(t_0+h) - A(t_0)}{h}$$

es la tasa de variación de A entre t_0 y t_0+h. El límite de estas tasas de variación es la tasa de variación instantánea, que entonces será justamente $A'(t_0)$ (siempre y cuando exista tal derivada).

c) Significado analítico:

Considerando $f: A\subset\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ para el cual $\exists f'(x_0)$, consideramos una recta $r \equiv y = a(x-x_0) + f(x_0)$ (recta que tome el valor $f(x_0)$ en $x=x_0$, y con pendiente a).

Entonces, si $a = f(x_0)$ se cumple, para

$$g(x) := f(x) - [a(x-x_0)+f(x_0)]$$
$$= f(x)-f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

y $g(x_0) = 0$.

Además, para $x\neq x_0$, $\dfrac{g(x)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)-f'(x_0) = 0$$

Por tanto, no sólo $g(x)$ se hace pequeña cerca de x_0 (pues como vemos, $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0 y además g también es continua en x_0, con $g(x_0)=0$), sino que además, $g(x)$ es pequeña, incluso comparándola con $x-x_0$ (que también se hace pequeña conforme $x\to x_0$).

Si tomáramos $a\neq f'(x_0)$, $\dfrac{g(x)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) - a \neq 0$$

lo cual quiere decir que la recta $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ representa la <u>mejor</u> aproximación local lineal de f cerca de $x=x_0$.

- <u>Propiedades de la derivada:</u>

<u>Prop 1</u>: Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ tales que $\exists f'(x_0)$, $\exists g'(x_0)$. Entonces:

i) $f+g$ es derivable en x_0 con $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$

ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot f$ es derivable en x_0 con $(af)'(x_0) = af'(x_0)$.

iii) f y g son continuas en x_0.

iv) $f \cdot g$ es derivable en x_0 con
$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$
(Regla de Leibnitz).

v) Si $g(x_0) \neq 0$, f/g es derivable en x_0 con
$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

<u>Dem</u>: i) e ii) son inmediatas

iii) Veamos que f es continua en x_0:

Como $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, por definición de límite $\exists \delta_0>0$ tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\subset A$ y para $x\in(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\}$, conforme $x\to x_0$,
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow f'(x_0)$. En particular, tomando $\varepsilon=1$, $\exists\ \delta_1\in(0,\delta_0]$ tal que si
$0<|x-x_0|\leq\delta_1 \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|\leq 1$,

luego $|f(x)-f(x_0)| = \left|(x-x_0)\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right]+f'(x_0)(x-x_0)\right|$

$\leq |x-x_0|\underbrace{\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|}_{\leq 1} + |f'(x_0)||x-x_0|$

$$\leq (1+|f'(x_0)|)|x-x_0| \qquad (1)$$

Ahora, dado $\varepsilon>0$, si tomamos $\delta=\min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{1+|f'(x_0)|}\right\}$,

para $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq(1+|f'(x_0)|)\underbrace{|x-x_0|}_{<\delta}$ (por (1))

$$\leq (1+|f'(x_0)|)\frac{\varepsilon}{1+|f'(x_0)|} = \varepsilon,$$

luego $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ y f es continua en x_0

q.e.d.

(obviamente, el mismo argumento vale para g).

iv) Sea $\delta_0 > 0$ tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$.
Para $0 < |x-x_0| < \delta_0$ tenemos:

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\,g'(x_0) - f'(x_0)\,g(x_0) =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(g(x)-g(x_0))}_{I} + \underbrace{\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right] g(x_0)}_{II}$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right] f(x_0)}_{III} = I + II + III.$$

- Puesto que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\mapsto x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ y $g(x) \underset{x\mapsto x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$
(donde hemos usado que $\exists f'(x_0)$ y Prop 1.(ii)),
deducimos que $I \underset{x\mapsto x_0}{\longmapsto} 0$.

- Puesto que ~~...~~ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ y
$\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)$ ambas tienden a 0 conforme $x\mapsto x_0$,
$II, III \mapsto 0$. Por tanto, $I + II + III \underset{x\mapsto x_0}{\longmapsto} 0$,
lo cual prueba iv)

10)

v) Si $g(x_0) \neq 0$, Prop. 1(iii) $\Rightarrow \exists\, \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que $|g(x)| \geq \frac{1}{2}|g(x_0)|$ si $|x - x_0| < \delta_1$. (1).

Por otra parte, cuando $f \equiv 1$ y $0 < |x - x_0| < \delta_1$,

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)\,g(x_0)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)\frac{1}{x - x_0} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{g(x_0)^2}\left\{g'(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right\}}_{I} + \underbrace{\frac{1}{g(x_0)}\left(\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{II}.$$

- Puesto que $I \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (pues $\exists\, g'(x_0)$) y $\frac{1}{g}$ es continua en x_0 (por ser $g(x_0) \neq 0$),

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad \text{y} \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} g'(x_0),$$

luego $II \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, de donde $I + II \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$,

lo cual dice $1/g$ es derivable en x_0 con $(1/g)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

El caso general se deduce de esto y de iv), usando que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow (f/g)'(x_0) = f(x_0)(1/g)'(x_0) + f'(x_0)(1/g)(x_0)$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Prop 3: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.
Son equivalentes:

i) $\exists f'(x_0) = m$

ii) Si $\varphi(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - mh$ (función φ definida en $(-\delta_0, \delta_0)$, donde $\delta_0 > 0$ es tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$), entonces $\lim_{h \mapsto 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$

Dem: i) $\Rightarrow$ ii); $\exists f'(x_0) = m$ equivale a afirmar: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right| < \varepsilon \quad (1)$$

(con $\delta_0 > 0$ tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$]. Tomando $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, luego (1) dice

$$\varepsilon > \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-mh}{h} \right| = \left| \frac{\varphi(h)}{h} \right| \quad (2)$$

si $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\Leftrightarrow 0 < |h| < \delta$], y como (2) es válido $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$

$ii) \Rightarrow i)$: Si $0 < |x - x_0| < \delta_0$, podemos escribir

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m = \frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{\varphi(x-x_0)}{x-x_0} \qquad (3)$$

Si $x \to x_0$, $x - x_0 \to 0$, luego $(3) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x-x_0)}{x-x_0} = 0$ (4),

y $(4) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right] = 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$$

$$\Rightarrow \exists f'(x_0) = m$$

La Prop. 3. es el ingrediente fundamental para probar el siguiente Teorema crucial:

Prop. 4 (Regla de la Cadena).

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto B \subset \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in A$

y $g: C \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivable en $f(x_0) \in C$.

Entonces:

i) $\exists \delta_0 > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta_0$, $x \in A$ y $f(x) \in C$

(ii) $g\circ f : (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \longmapsto \mathbb{R}$ es derivable en x_0 y

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

(Regla de la Cadena).

Dem: Puesto que g es derivable en $f(x_0)$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $(f(x_0)-\delta_1, f(x_0)+\delta_1) \subset C$. Tomando $\varepsilon = \delta_1$ en la continuidad de f en x_0 (que es cierta por existir $f'(x_0)$), $\exists \delta_0 > 0$ tal que $|x-x_0| < \delta_0 \Rightarrow x \in A$ y $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon = \delta_1$.

Por tanto, $g\circ f$ está definida en $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$.

Si $0 < |x-x_0| < \delta_0$, escribiendo $x = x_0+h$ con $0 < |h| < \delta_0$,

$$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0+h))$$
$$= g(f(x_0) + \underbrace{(f(x)-f(x_0))}_{:=k}) \quad (1).$$

Usando la Prop. 3, podemos escribir

$$g(f(x_0)+k) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\,k + \varphi(k), (2)$$

(siempre que $|k| < \delta_1$) y con $\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(k)}{k} = 0$

14)

Asimismo, podemos escribir

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \mu(h) \qquad (3)$$

(siempre que $|h|<\delta_0$) y con $\lim_{h\to 0} \frac{\mu(h)}{h} = 0$.

(3) y (4) $\Rightarrow$

$$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)) + \varphi(f(x)-f(x_0))$$

(con $x = x_0+h$)

$$\stackrel{\text{(3)}}{=} g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\left[f'(x_0)h + \mu(h)\right]$$

$$+ \varphi(f'(x_0)h + \mu(h))$$

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)h + R(h),$$

siendo $R(h) := g'(f(x_0))\mu(h) + \varphi(f'(x_0)h + \mu(h))$ (4).

Si probamos $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$, hemos terminado.

- $R(h) = I_h + II_h$; $I_h = g'(f(x_0))\mu(h)$, $II_h = \varphi(f'(x_0)h + \mu(h))$.

- $\frac{I_h}{h} \longmapsto 0$, pues $\frac{\mu(h)}{h} \longmapsto 0$ ~~(pues)~~

- Puesto que $\frac{\mu(h)}{h} \longmapsto 0$, $\exists\ \delta\in(0,\delta_0]$ tal que si $|h|<\delta$, $\left|\frac{\mu(h)}{h}\right| \leq 1 \Rightarrow |\mu(h)| \leq |h|$, luego $|f'(x_0)h+\mu(h)| \leq C|h|$ $(|h|<\delta)$ (con $C=1+|f'(x_0)|$) (5).

. Si $\varepsilon>0$ es arbitrario, como $\lim_{k\to 0}\frac{\varphi(k)}{k}=0$,
$\exists\ \delta'_\varepsilon\in(0,\delta_1] \Rightarrow |\varphi(k)|\leq\frac{\varepsilon}{C}|k|$. (6).

. Tomando $\delta_\varepsilon>0$ tal que si $|h|<\delta_\varepsilon$, $C|h|<\delta'_\varepsilon$
y $\delta_\varepsilon\leq\delta_0$ (por ejemplo, $\delta_\varepsilon=\min\{\frac{\delta'_\varepsilon}{C},\delta_0\}$), para
$0<|h|<\delta_\varepsilon$, (4), (5) y (6) $\Rightarrow$

$$|II_h|\leq\frac{\varepsilon}{C}|f'(x_0)+\mu(h)|\leq\frac{\varepsilon}{C}C|h| = \varepsilon|h|$$

$\Rightarrow\left|\frac{II_h}{h}\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{II_h}{h}=0$, y juntando
todo ésto, $\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h}=0 \Rightarrow \exists(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$ ∎

. Teoremas básicos sobre funciones derivables:

Def 2: Sea $f: A\subset\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. Decimos:

(i) $x_0\in A$ es un punto máximo (resp. mínimo) de f si $f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x\in A$ (resp.) $f(x_0)\leq f(x)$ $\forall x\in A$

(ii) $x_0\in A$ es un punto máximo local (resp. mínimo local) de f si ~~...~~ $\exists\ \delta_0>0$ tal que $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset A$

y x_0 es un punto máximo (resp. mínimo) de f en $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$.

<u>Prop. 5</u>: Si $f : A\subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tiene en $x_0 \in A$ un máximo ó mínimo local y $\exists f'(x_0)$, entonces $f'(x_0) = 0$.

<u>Dem</u>: Supongamos que x_0 es máximo local. Entonces $\forall x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$ (con $\delta_0 > 0$), $f(x) \leq f(x_0)$. Tomando $x \in (x_0-\delta_0, x_0)$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad (1)$$

(el límite $\lim\limits_{x\to x_0+} (\ldots)$ existe porque $\exists f'(x_0)$).

Del mismo modo, si $x \in (x_0, x_0+\delta_0)$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad (2)$$

Puesto que
$$\exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \end{cases}$$

se sigue que $f'(x_0) = 0$

(el caso x_0 mínimo local lo omito)

Def 3: (Puntos singulares).
Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. $x_0 \in A$ se denomina punto singular de f si $\exists f'(x_0) = 0$.

Obs: La Prop. 5 implica que todo máximo o mínimo local de una función derivable es un punto singular.

Prop. 6 (Teorema de Rolle).
Sea $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$. Entonces f tiene un punto singular en (a,b).

Dem: Puesto que f es continua en $[a,b]$, intervalo cerrado y acotado, $\exists x_0 \in [a,b]$ que es el máximo (global) de f y $\exists x_1 \in [a,b]$ que es el mínimo (global) de f, luego
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$.

- Si x_0 ó $x_1 \in (a,b)$, por la Prop. 5, $f'(x) = 0$ en el punto correspondiente.
- Si x_0 y $x_1 \notin (a,b)$, entonces x_0 y x_1 están en los extremos, pero como $f(a) = f(b)$, $f(x) = f(a) = f(b)$,

luego f es constante $\Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$. ∎

Prop. 7 (Teorema del Valor Medio [Derivadas]) (Lagrange)

Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $\exists\, X \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(X)$.

__Dem:__ Consideramos $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $(x \in [a,b])$. Entonces g es asimismo continua en $[a,b]$ (por serlo f) y derivable en (a,b) (por serlo f). Además
$$\left| \begin{array}{l} g(a) = f(a) \\ g(b) = f(a) - (f(b)-f(a)) = f(a) \end{array} \right.$$

luego el T. de Rolle $\Rightarrow \exists x \in (a,b)$ con

$$0 = g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ ∎

Prop. 8 (Relación entre el signo de la derivada y el crecimiento)

Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b). Entonces:

i) Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a,b)$, f es creciente (resp., decreciente) en $[a,b]$.

ii) Si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$) $\forall x \in (a,b)$, f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en $[a,b]$.

<u>Dem:</u> Si $f' \geq 0$ en (a,b) y $a \leq x < y \leq b$,
i), ii)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c), \; c \in (x,y) \subset (a,b)$$

$\geq 0 \rightarrow f$ creciente

Como $y - x > 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$. Si supusiéramos $f' > 0$ en (a,b), $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) > 0$ $(c \in (x,y) \subset (a,b))$

$\rightarrow f$ estrictamente creciente.

Los casos donde $f' \leq 0$ ó $f' < 0$ en (a,b) se tratan de manera similar. ∎

Prop. 9: Sea $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a,b)$. Entonces f es constante en $[a,b]$.

<u>Dem:</u> Sea $a \leq x < y \leq b$. Entonces $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = 0$ (con $c \in (x,y) \subset (a,b)$) $\Rightarrow f(x) = f(y)$ ∎

Prop. 10 (Teorema de la derivada de una función inversa)

Sea $f: (a,b) \longmapsto C \subset \mathbb{R}$ función biyectiva, continua y f derivable en $f^{(-1)}(c)$ (con $c \in C$) con $f'(f^{(-1)}(c)) \neq 0$. Entonces $f^{(-1)}$ es derivable en c con
$$(f^{(-1)})'(c) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(c))}$$

Dem: Si $c \in C$ y f es biyección entre (a,c) y C, existe $x \in (a,b)$ (único) con $c = f(x) \longleftrightarrow f^{(-1)}(c) = x$.

- Como f es biyectiva y continua en (a,b), es monótona, y $f((a,b)) = C = (a', b')$. La inversa $f^{(-1)}$ es asimismo una biyección continua de (a',b') a (a,b) (todo esto es consecuencia de los teoremas vistos en el tema anterior sobre funciones y continuidad.
- Sea $0 < |h| < \delta_0$ ($\exists\ \delta_0 > 0$ tal que $(c-\delta_0, c+\delta_0) \subset (a',b')$).

Si consideramos $c+h \in (a',b')$, hay un único $k = k(h)$ tal que $c+h = f(x+k)$. En tal caso,
$$f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c) = (x+k) - x = k \text{ y}$$
$$\frac{f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c)}{h} = \frac{k}{f(x+k)-c} = \frac{k}{f(x+k)-f(x)}$$

Puesto que $k = k(h) = f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c)$ y $f^{(-1)}$ es continua en c, $k(h) \underset{h\to 0}{\longmapsto} 0$.

(además $k(h) \neq 0$ si $h \neq 0$, por ser $f^{(-1)}$ inyectiva).

Por tanto, podemos escribir

$$\frac{f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c)}{h} = \left[\frac{f(x+k(h)) - f(x)}{k(h)}\right]^{-1} \quad (0<|h|<\delta_0). \quad (1).$$

Tomando en (1) el $\lim_{h\to 0}$, $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+k(h)) - f(x)}{k(h)} = f'(x) = f'(f^{(-1)}(c)) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists (f^{(-1)})'(c) = [f'(f^{(-1)}(c))]^{-1}$$

<u>Obs</u>: Si f es derivable en $f^{(-1)}(c)$, pero $f'(f^{(-1)}(c)) = 0$, $f^{(-1)}$ puede existir (como para $f(x) = x^3 \to f^{(-1)} = \sqrt[3]{x}$), pero no puede ser derivable.

<u>Ejemplos</u>:

i) $f(x) = \log x$ (ó $\ln x$), definida en $(0,\infty)$.

Entonces $f'(x) = 1/x$.

<u>Dem</u>: Puesto que $f = h^{-1}$, siendo $h: \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \mapsto e^x$

y ya hemos visto que $h' = h \neq 0$,

dado $x > 0$, $(\log x)' = \frac{1}{h'(h^{(-1)}(x))} = \frac{1}{h(\log x)}$

$= [\exp(\log x)]^{-1} = x^{-1} = 1/x$.

ii) Si $a \in \mathbb{R}$ es un exponente y $f_a(x) = x^a$ (para $x \in (0,\infty)$), $f_a(x)' = (x^a)' = a x^{a-1} = a f_{a-1}(x)$.

<u>Dem</u>: Sabemos que para $x > 0$, $f_a(x) = \exp(a \log x)$

$\Rightarrow f_a'(x) = \exp'(a \log x)\,(a \log x)'$ (Regla de la Cadena)

$= \exp(a \log x)\,\frac{a}{x}$

$= x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1} = a f_{a-1}(x)$.

• <u>Funciones trigonométricas</u>

<u>Def 4</u>) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos:

i) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \left(= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$

ii) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \left(= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)$

(<u>Obs</u>: es un ejercicio simple ver, con el Criterio del Cociente, que las series anteriores convergen absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$).

<u>Prop 11</u> (Propiedades fundamentales de sen y cos)

i) Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

• $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
• $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

(fórmulas de adición)

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

iii) sen y cos son derivables $\forall x \in \mathbb{R}$, con:

- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

iv) Si definimos $\frac{\pi}{2}$ como el primer 0 positivo de la función cos, sen y cos son funciones periódicas de periodo 2π, y $2 < \pi < 4$. Además, $0 \le \cos x \le 1$ si $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ y $0 < \operatorname{sen} x \le 1$ si $0 < x < \pi$.

<u>Dem:</u>

i) Puesto que las series que definen a sen x y cos x son absolutamente convergentes, podemos escribir

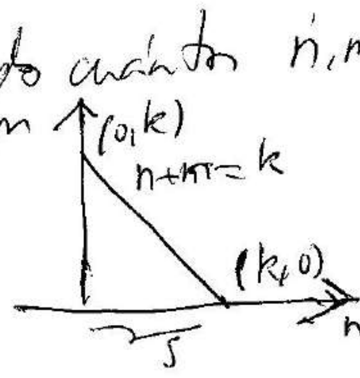
$$\operatorname{sen} x \cos y = \left({\sum_{n=0}^{\infty}}' \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) \left({\sum_{m=0}^{\infty}}' \frac{(-1)^m}{(2m)!} y^{2m} \right)$$

$$= {\sum_{n,m=0}^{\infty}}' \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!(2m)!} x^{2n+1} y^{2m}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = {\sum_{n,m=0}^{\infty}}' \overbrace{\boxed{\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!(2m)!} \left[x^{2n+1} y^{2m} + y^{2m+1} x^{2n} \right]}}^{z_{n,m}}$$

$$= {\sum_{k=0}^{\infty}}' \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} {\sum_{j=0}^{k}}' \frac{(2k+1)!}{(2j+1)!(2k-2j)!} \left[x^{2j+1} y^{2k-2j} + y^{2j+1} x^{2k-2j} \right]$$

(donde hemos agrupado los ~~t~~ sumandos $z_{n,m}$ $(n,m \ge 0)$ fijando $k = n+m$ y mirando cuántos n,m's tenemos si $n,m \ge 0$ y $n+m = k$)



(tal reagrupamiento de los sumandos es válido por ser las series involucradas absolutamente convergentes),

y entonces $\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2j+1} \left[x^{2j+1} y^{2k-2j} + y^{2j+1} x^{2k-2j}\right] \quad (1).$$

Por otra parte, $(x+y)^{2k+1} = \sum_{j=0}^{2k+1}{}' \binom{2k+1}{j} x^j y^{2k+1-j}$ (2k+2 sumandos)

$$= \sum_{l=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2l} x^{2l} y^{2k+1-2l} \quad \text{(términos con } j \text{ par)}$$

$$+ \sum_{l=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2l+1} x^{2l+1} y^{2k-2l} \quad \text{(términos con } j \text{ impar)}$$

Como $\sum_{l=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2l} x^{2l} y^{2k+1-2l} = \sum_{l=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2(k-l)+1} x^{2l} y^{2(k-l)+1}$

$$\underset{(\text{con } k-l=m)}{=} \sum_{m=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2m+1} x^{2(k-m)} y^{2m+1},$$

se sigue que $\sum_{j=0}^{k}{}' \binom{2k+1}{2j+1} \left[x^{2j+1} y^{2k-2j} + y^{2j+1} x^{2k-2j}\right] = (x+y)^{2k+1}$,

de dónde $\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x+y)^{2k+1} = \operatorname{sen}(x+y)$.

(La prueba de que $\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x+y)$ es un cálculo similar).

ii) Sea $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$. Es claro que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$. De i) se deduce inmediatamente que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

luego $h(x) = \cos(2x) + 2\operatorname{sen}^2 x$ (2)

Asumiendo iii) (que probaremos a continuación), la función en (2) es derivable $\forall x$, y

$h'(x) = -2 \operatorname{sen}(2x) + 4 \operatorname{sen} x \cos x$ (usando la Regla de la Cadena)

$= -2(2 \operatorname{sen} x \cos x) + 4 \operatorname{sen} x \cos x$

$= 0 \quad \forall x.$

Por tanto, $h(x)$ es constante. Como $h(0) = 1$, se sigue que $h(x) = 1 \quad \forall x$.

(iii) Veamos primero $(\operatorname{sen} 0)' = 1$, $(\cos 0)' = 0$:

— Sea $|x| \leq 1/2$. Entonces

$$\operatorname{sen} x = x + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{R(x)}.$$

$$|R(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{(2n+1)! \geq 3! = 6}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{6} = \frac{1}{6} \frac{|x|^3}{1-|x|^2} \quad (\text{pues } |x| < 1)$$

$$\leq \frac{|x|^3}{3} \quad \left(\text{pues } 1-|x| \geq \frac{1}{2}\right)$$

- $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} = \dfrac{\operatorname{sen}x\cos h + \operatorname{sen}h\cos x - \operatorname{sen}x}{h} =$

$$= \operatorname{sen}x\,\frac{\cos h-1}{h} + \cos x\,\frac{\operatorname{sen}h}{h} \qquad (3)$$

- Tomando en (3) $\lim\limits_{h\to 0}$, y usando que como hemos visto, $\dfrac{\cos h-1}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} 1$, deducimos que $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}\cos x$, esto es, $(\operatorname{sen}x)'=\cos x$.

- Del mismo modo,

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}h - \cos x}{h}$$
$$= \cos x\,\frac{\cos h-1}{h} - \operatorname{sen}x\,\frac{\operatorname{sen}h}{h}$$
$$\longrightarrow -\operatorname{sen}x,\quad h\to 0,$$

esto es, $(\cos x)' = -\operatorname{sen}x$.

iv) Veamos que $\cos x > 0$ si $0\le x\le 1$ y que $\cos 2 < 0$ (de esto se deduce inmediatamente que $\frac{\pi}{2}$ = 1er cero positivo de $\cos x$, está entre 1 y 2, luego $2<\pi<4$).

— Si $0<x\le 1$ y $x_n = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x_n > 0$

y $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x^2\dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = \dfrac{\overbrace{x^2}^{\le 1}}{\underbrace{(2n+1)(2n+2)}_{\ge 2\ (n\ge 0)}} \le \dfrac{1}{2} < 1$

Para $0<|x|\leq 1/2$,

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} = 1 + \frac{R(x)}{x} \quad ; \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} - 1 \right| \leq \frac{|R(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{3}x^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 \leq \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} - 1 \leq \frac{1}{3}x^2 . \quad (3)$$

Puesto que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2\right) = 0$, $(3) \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} - 1\right) = 0$

$$\Rightarrow \exists (\operatorname{sen} 0)' = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} = 1 .$$

Asimismo, $\cos x = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}_{= S(x)}$

$$\text{y } |S(x)| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}}_{(2n)! \geq 2! = 2} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}{}' x^{2n} = \frac{x^2}{2(1-x^2)}$$
$(\because x^2<1)$

$$\leq x^2 \quad (\text{pues } 1-x^2 \geq \tfrac{1}{2}) .$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos x - \cos 0}{x} \right| \leq x^2 \quad (0<|x|\leq 1/2)$$

$\Rightarrow -x^2 \leq \frac{\cos x - \cos 0}{x} \leq x^2$, y de modo similar a lo anterior, concluimos que $\exists (\cos 0)' = 0$.

- Usando las fórmulas de adición, si $x\in\mathbb{R}$ y $h\neq 0$, tenemos:

• Por tanto, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ es una suma alternada $\sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^n y_n$ $\left(y_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$, con $y_n > 0$ y decreciente. Usando las estimaciones para las sumas parciales de la serie que define el coseno, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$.

• En cambio, si $x = 2$, $\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^n z_n$,

con $z_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. $z_n > 0$, $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{4}{\underbrace{(2n+1)(2n+2)}_{\geq 3\cdot 4\ (n\geq 1)}} \leq \frac{1}{3} < 1$ $(n \geq 1)$.

$$y \quad \cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}{}'(-1)^n z_n}_{S} = -1 + S.$$

De nuevo, usando las estimaciones para sumas alternadas, $S \leq z_2 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2^4}{4\cdot 3\cdot 2} = \frac{2^4}{3\cdot 2^3} = \frac{2}{3} < 1$

$\Rightarrow \cos 2 = -1 + S \leq -1 + \frac{2}{3} < -\frac{1}{3} < 0$.

• Entonces $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ y $\operatorname{sen}\pi = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

De la definición de $\frac{\pi}{2}$, se deduce que $\cos x > 0$ si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, y como $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\operatorname{sen} x)' > 0$ si $0 \leq x < \pi/2$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x$ es creciente estrictamente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} > \operatorname{sen} 0 = 0$.

Puesto que $\text{sen}^2\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ y

$0 < \text{sen}\,x \le \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ si $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

Si $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$, $\text{sen}\,x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x'\right)$; $x' = x - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow \text{sen}\,x = \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)\cos x' + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\,x'$

$= \cos x' > 0$ (pues $0 \le x' < \pi/2$).

- Del mismo modo, $\text{sen}(2\pi) = 2\,\text{sen}\,\pi\cos\pi = 0$

$\cos(2\pi) = \cos^2\pi - \text{sen}^2\pi = \cos^2\pi = 1$

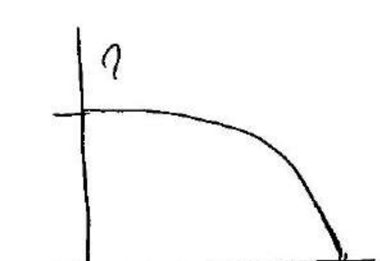
(pues $\text{sen}\,\pi = 0$)

- Veamos ahora que $\begin{cases} \text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}\,x & \forall x \\ \cos(x+2\pi) = \cos x & \forall x \end{cases}$:

- $\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}\,x \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \cos x \underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{=0} = \text{sen}\,x$

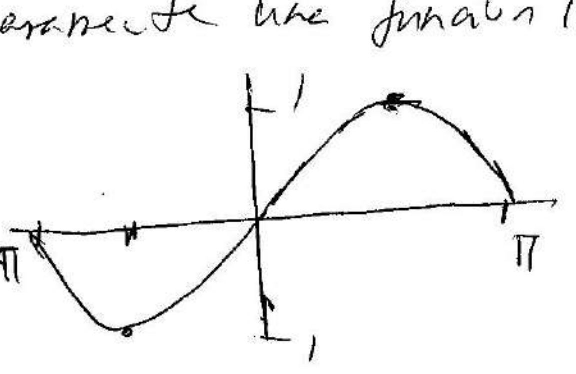
- $\cos(x+2\pi) = \cos x \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \text{sen}\,x \underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{=0} = \cos x$

$\cos x$:



$\text{sen}\,x$:

Puesto que $\text{sen}\,x$ es claramente una función impar, también tenemos: $\text{sen}\,x$:



· De eso se deduce que el periodo natural de $\operatorname{sen} x$ es 2π (no hay ningún periodo menor T que haga que $\operatorname{sen}(x+T)$ coincida con $\operatorname{sen} x$). Puesto que $\cos x = \operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})$, lo mismo vale para $\cos x$ ∎

· Algunos ejemplos de valores ~~de~~ $\operatorname{sen} x$ ~~y~~ $\cos x$.

a) Si $x = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen} x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dem: Puesto que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{sen} x, \cos x$,

y como $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$.

Finalmente, usando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pues $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} > 0$).

b) Si $x = \frac{\pi}{6}$, $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1/2 \\ \cos x = \sqrt{3}/2 \end{cases}$

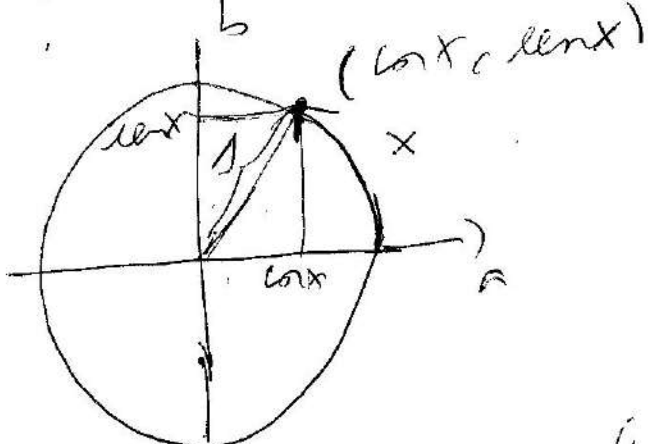
Dem: $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{6}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$.

Puesto que $\cos\frac{\pi}{6} > 0$, se sigue que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 1/2$

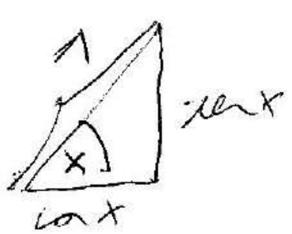
$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (por ser $\cos\frac{\pi}{6} > 0$).

c) Si $x = \frac{\pi}{3}$, $\left| \begin{array}{l} \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$

• Dado un ángulo $x \in [0, 2\pi)$, el punto $(\cos x, \operatorname{sen} x) \in C = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$



Geométricamente, la tangente de x (con $0 \leq x \leq \pi$) es la razón $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ de los lados del triángulo rectángulo



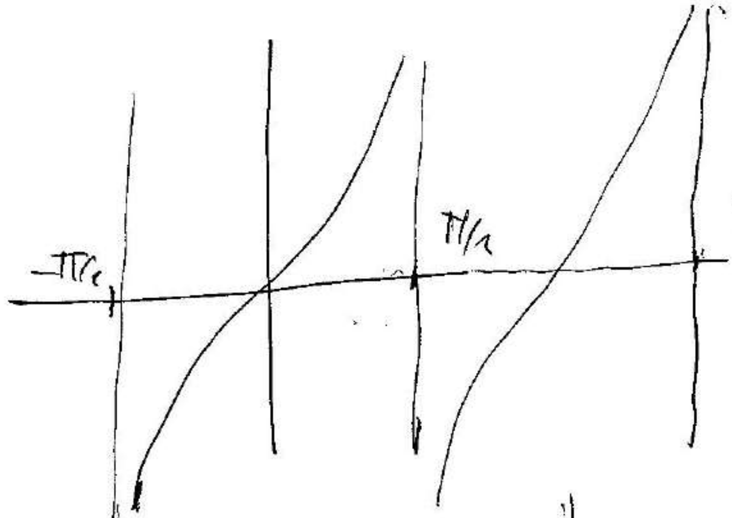
; $\tan x$ (también $\operatorname{tg} x$) $= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

- La función $f(x) = \tan x$ está definida siempre que $\cos x \neq 0$, o sea, en $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y es una función periódica de periodo π (no 2π), pues $\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x$

• Entonces $(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$,

luego si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $(\tan x)' \geq 1$

(pues $0 < \cos^2 x \leq 1$), y si $\begin{cases} x \to \frac{\pi}{2}- \Rightarrow \tan x \to \infty \\ x \to -\frac{\pi}{2}+ \Rightarrow \tan x \to -\infty \end{cases}$



: $\tan x$

• Análogamente, $\operatorname{cotan} x$ (cotangente de x ó $\operatorname{ctg} x$)

es $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, y es periódica de periodo π.

$(\operatorname{cotan} x)' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \geq 1$:

con $\begin{cases} x \to 0+ \Rightarrow \operatorname{cotan} x \to -\infty \\ x \to \pi- \Rightarrow \operatorname{cotan} x \to \infty. \end{cases}$

(análogamente, se definen la secante x: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

y cosecante $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$).

• Es interesante determinar las funciones trigonométricas inversas.

- Función arcsen$x$ ($= \operatorname{sen}^{(-1)} x$):

Puesto que $f(x) = \operatorname{sen} x$, cuando $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es continua con derivada $f'(x) = \cos x > 0$, f es estrictamente creciente y aplica $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$. Definimos entonces arcsen, con dominio $[-1, 1]$ como la inversa de tal función. Si $x \in (-1, 1)$, entonces $x = \operatorname{sen} y$ con $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \quad (1).$$

Observamos que $1 = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)$
$= \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + x^2$

$\Rightarrow \cos^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - x^2 > 0 \quad (x \in (-1, 1))$

Como $\cos(\operatorname{arcsen} x) > 0$ (por ser $\operatorname{arcsen} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$),

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

la imagen por $\tan x$ de $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ en $\mathbb{R}$,
y entonces $\arctan : ~~(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})~~ \mathbb{R} \longmapsto (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

· Para $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ con $x = \tan y$,

luego $(\arctan x)' = \dfrac{1}{h'(h^{(-1)}(x))}$

· $h'(h^{(-1)}(x)) = \sec^2(\arctan x) = \dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)}$

$\Rightarrow (\arctan x)' = \cos^2(\arctan x)$. (1)

· Por otra parte, $x^2 = \tan^2(\arctan x) = \dfrac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}$

$$= \frac{1-\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)} = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} - 1$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + x^2$ (2).

(1) y (2) $\Rightarrow (\arctan x)' = \cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

– <u>Derivadas de orden superior:</u>

Sea $f : (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ y supongamos que $\exists f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$ (tomo intervalos abiertos para que la condición: $\forall x_0 \in Dom(f)\ \exists \delta_0 > 0$ con $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset Dom(f)$)

- Función arccos ($= \cos^{(-1)} x$):

Si $g(x) = \cos x$, $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, luego g es continua y estrictamente decreciente en $[0,\pi]$.

Entonces $g^{(-1)} = \arccos$ es continua en $[-1,1]$, con imagen $[0,\pi]$ ($[-1,1]$ es la imagen por $\cos x$ de $[0,\pi]$). Si $x \in (-1,1)$, $x = \cos y$ con $y \in (0,\pi)$ y

$$(\arccos x)' = \frac{1}{g'(g^{(-1)}(x))} = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos x)}$$

y razonando como antes, obtenemos

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1).$$

- Función arctan ($= \tan^{(-1)} x$).

Si $h(x) = \tan x$, $h'(x) = \sec^2 x \geq 1$ si $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, luego h es continua y estrictamente creciente en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Como

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} h(x) = -\infty \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \infty \end{array} \right.$$

existen puede definirse $f': (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f'(x).$$

Si esta nueva función es a su vez derivable en $x_0 \in (a,b)$, hablamos de $f''(x_0)$, y si $(f')'(x)$ existe $\forall x \in (a,b)$, escribimos $(f')'(x) = f''(x)$.

- De modo análogo definimos $f^{(j)}$, para $j = 0, 1, 2$ con
$$\left|\begin{array}{l} j=0 : f^{(0)} = f \\ j=1 : f^{(1)} = f' \\ j=2 : f^{(2)} = f'' \end{array}\right.$$
etc.

(En el próximo tema estudiaremos el significado de f'').