Tema 5: Derivación

Def 1: Sea $f: A\subset\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0\in A$.

Decimos que $\exists f'(x_0) = l$ si:

i) $\exists \delta>0$ tal que $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset A$

ii) $\exists \lim\limits_{x\mapsto x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.

Obs. 1: Si f no está definida en x_0 no tiene sentido hablar de $f'(x_0)$.

Obs. 2: La condición i) es necesaria para poder dar sentido a la condición ii). Si $A=[a,b]$ en los puntos $x=a$ y $x=b$, i) no se cumple. Sin embargo, a menudo se cumple que $\exists B\supset A$ de modo que

$$\begin{cases} \exists \delta>0 \text{ con } (a-\delta, a+\delta)\subset B \\ \exists \delta'>0 \text{ con } (b-\delta', b+\delta')\subset B \end{cases}$$

y para cierta función $g: B\mapsto\mathbb{R}$ se cumple

A. En este caso, entendemos $f'(a)$

definida

Def 1)' i) Si $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y para $x_0 \in A$ existe $\delta > 0$ con $[x_0, x_0+\delta) \subset A$, decimos

$$\exists f'_+(x_0) = l \text{ si } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \quad \text{(derivada por la derecha)}$$

ii) Si $\exists \delta > 0$ con $(x_0-\delta, x_0] \subset A$, decimos

$$\exists f'_-(x_0) = l \text{ si } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \quad \text{(derivada por la derecha).}$$

Ejemplos:

i) Si $f(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, $f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0. \end{cases}$

Dem: • Si $n=0$, $f(x) = 1$ $\forall x$ y luego

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y \to x} \frac{\overset{=0}{0}}{y-x} = 0$$

• Si $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$, $f(y) = (x+(y-x))^n =$

$$= x^n + nx^{n-1}(y-x) + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}(y-x)^j}_{(=0 \text{ si } n=1).}$$

$$= \begin{cases} x + (y-x), & n=1 \\ \ldots \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}(y-x)^{j-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\ldots \left(nx \ldots + (y-x) \sum_{j=2} \binom{n}{j} \ldots \right) \quad (y \neq x)$$

Tomando límites en (*), obtenemos:

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ nx^{n-1}+0=nx^{n-1}, & n\geq 2, \end{cases}$$

pues si $n\geq 2$ y $2\leq j\leq n$, $(y-x)^{j-2}$ son funciones continuas, luego $\exists \lim_{y\to x} \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}(y-x)^{j-2}$,
(pues $j-2\geq 0$)

y como $\lim_{y\to x}(y-x)=0$, $\lim_{y\to x}\left[(y-x)\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}(y-x)^{j-2}\right]=0$ $\boxed{\#}$

ii) Si $f(x)=e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,

tenemos que para $|x|\leq 1/2$, $\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}|x|^n=\frac{|x|^2}{1-|x|}$
$\leq 2|x|^2$

- Si $x\neq 0$, entonces

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$x\to 0$ x

• Si $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario e $y \neq x$,

$$e^{y} = e^{x+(y-x)} = e^{x} e^{y-x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{y}-e^{x}}{y-x} = e^{x}\,\frac{e^{y-x}-1}{y-x}. \qquad (2) \quad C$$

Pero $y-x \mapsto 0$ si $y \mapsto x$. Puesto que

entonces $\lim_{y \mapsto x} \frac{e^{y-x}-1}{y-x} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{t}-1}{t} = f'(0) = 1$ (3),

(1)

(2) y (3) $\Rightarrow \lim_{y \mapsto x} \frac{e^{y}-e^{x}}{y-x} = e^{x} \cdot 1 = e^{x} = f'(x)$,

esto es, $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• Interpretación de la derivada:

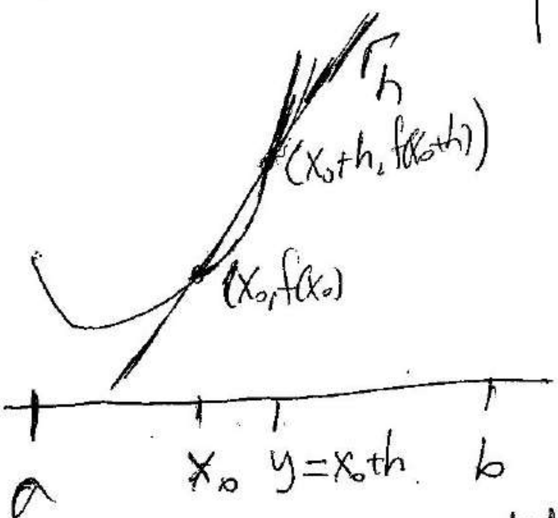
a) Significado geométrico:

Sea $f: (a,b) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$

(obs: Tomando $A = Dom(f)$ como un intervalo abierto (a,b), Tenemos $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} = \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}$, siendo $h = y - x_0$

y $\Delta_h f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$ | h: "incremento de x" (en x_0)

$\Delta_h f(x_0)$: "incremento de f" (en x_0).



r_h: recta determinada por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$

y $r_h \equiv y - f(x_0) = \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}(x - x_0)$

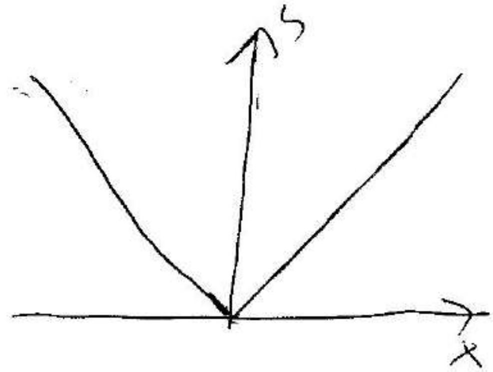
$\iff r_h \equiv y = \frac{\Delta_h f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$

Conforme $y \to x$ ($\iff h = y - x \to 0$), la pendiente m_h de r_h, que es $\frac{\Delta_h f(x_0)}{h}$ tiende a $m = f'(x_0)$,

y conforme $h \to 0$, las rectas r_h cada vez se van ... a la tangente r de la gráfica ...

... no admite recta tangente, como pasa con $f(x) = |x|$ ...

$f(x) = |x|$:



- Si $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ a)
- Si $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -1$ b)

$$\left.\begin{array}{l} a) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \\ b) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -1 \end{array}\right] \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

b) Significado físico:

Sea cierta magnitud $A = A(t)$ (aquí tomamos la variable de A como "tiempo", pero igual podría ser "espacio", etc). Entonces, fijando t_0 y $s \neq t_0$ otro instante, con $h = s - t_0$,

$$\frac{\Delta_h A}{h} = \frac{A(t_0+h) - A(t_0)}{h}$$

es la tasa de variación de A entre t_0 y $t_0 + h$. El límite de

c) Significado analítico:

Considerando $f: A\subset\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ para el cual $\exists f'(x_0)$, consideramos una recta

$r \equiv y = \cancel{\quad} a(x-x_0) + f(x_0)$ (recta que tome el valor $f(x_0)$ en $x=x_0$, y con pendiente a).

Entonces, si $a = f'(x_0)$ se cumple que para

$$g(x) := f(x) - [a(x-x_0)+f(x_0)]$$
$$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

y $g(x_0) = 0$.

Además, para $x\neq x_0$, $$\frac{g(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

Por tanto, no sólo $g(x)$ se hace pequeña cerca de x_0 (pues como vemos, $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0 y [illegible] g también es continua en x_0, con $g(x_0)=0$), sino

Si [illegible] $x-x_0$ [illegible] $x-x_0$

$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) - a \neq 0$

lo cual quiere decir que la recta $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ representa la mejor aproximación local lineal de f cerca de $x = x_0$.

• Propiedades de la derivada:

Prop 1: Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ tales que $\exists f'(x_0)$, $\exists g'(x_0)$. Entonces:

i) $f+g$ es derivable en x_0 con $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot f$ es derivable en x_0 con $(af)'(x_0) = a f'(x_0)$.

iii) f y g son continuas en x_0.

iv) $f \cdot g$ es derivable en x_0 con

$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)$

(Regla de Leibnitz).

v) Si $g(x_0) \neq 0$, f/g es derivable en x_0

iii) Veamos que f es continua

Como $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, por definición de límite $\exists \delta_0 > 0$ tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$ y para $x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \setminus \{x_0\}$, conforme $x \to x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow f'(x_0).$$

En particular, tomando $\varepsilon = 1$, $\exists\, \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que si

$$0 < |x-x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| \leq 1,$$

luego

$$|f(x)-f(x_0)| = \left| (x-x_0)\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right] + f'(x_0)(x-x_0) \right|$$

$$\leq |x-x_0| \underbrace{\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right|}_{\leq 1} + |f'(x_0)||x-x_0|$$

$$\leq (1+|f'(x_0)|)\,|x-x_0| \qquad (1)$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{1+|f'(x_0)|}\right\}$,

$\ldots |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq (1+|f'(x_0)|)\,|x-x_0|$ (por (1))

luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ldots$

(obviamente, el mismo argumento vale para g).

iv) Sea $\delta_0 > 0$ tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$.
Para $0 < |x-x_0| < \delta_0$ tenemos:

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\,g'(x_0) - f'(x_0)\,g(x_0) =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(g(x)-g(x_0))}_{I} + \underbrace{\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right] g(x_0)}_{II}$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right] f(x_0)}_{III} = I + II + III.$$

- Puesto que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\mapsto x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ y $g(x) \underset{x\mapsto x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$

(donde hemos usado que $\exists f'(x_0)$ y Prop 1.(ii)),

deducimos que $I \underset{x\mapsto x_0}{\longmapsto} 0$.

- Puesto que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ y

II, III ...

lo cual prueba (iv).

v) Si $g(x_0) \neq 0$, Prop. 1(iii) $\Rightarrow \exists\, \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que $|g(x)| \geq \frac{1}{2}|g(x_0)|$ si $|x - x_0| < \delta_1$. (1).

Por otra parte, cuando $f \equiv 1$ y $0 < |x - x_0| < \delta_1$,

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)\,g(x_0)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right)\frac{1}{x - x_0} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{g(x_0)^2}\left\{g'(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right\}}_{I} + \underbrace{\frac{1}{g(x_0)}\left(\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{II}.$$

• Puesto que $I \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (pues $\exists\, g'(x_0)$) y $\frac{1}{g}$ es continua en x_0 (por ser $g(x_0) \neq 0$),

$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ y $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} g'(x_0)$,

luego $II \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, de donde $I + II \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$,

que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Prop 3: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.
Son equivalentes:
i) $\exists f'(x_0) = m$
ii) Si $\varphi(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - mh$
(función φ definida en $(-\delta_0, \delta_0)$, donde $\delta_0 > 0$ es tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$),
entonces $\lim_{h \mapsto 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$

Dem: i) $\Rightarrow$ ii); $\exists f'(x_0) = m$ equivale a afirmar: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in (0, \delta_0]$ tal que
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right| < \varepsilon$ (1)
(Con $\delta_0 > 0$ tal que $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$). Tomando
$h = x - x_0$, $x = x_0 + h$, luego (1) dice
$\Rightarrow \varepsilon > \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - mh}{h} \right| = \left| \frac{\varphi(h)}{h} \right|$ (2)

ii) $\Rightarrow$ i): Si $0<|x-x_0|<\delta_0$, podemos escribir

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m=\frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{\varphi(x-x_0)}{x-x_0} \qquad (3)$$

Si $x\to x_0$, $x-x_0\to 0$, luego (3) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x-x_0)}{x-x_0}=0$ (4),

y (4) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right]=0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m$$

$$\Rightarrow \exists f'(x_0)=m$$

La Prop. 3. es el ingrediente fundamental para probar el siguiente Teorema crucial:

Prop. 4 (Regla de la Cadena).

Si $f: A\subset \mathbb{R}\to B\subset\mathbb{R}$ derivable en $x_0\in A$

$f(x)\in C$

(ii) $g \circ f : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \longmapsto \mathbb{R}$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \, f'(x_0)$$

(Regla de la Cadena).

<u>Dem:</u> Puesto que g es derivable en $f(x_0)$, $\exists \, \delta_1 > 0$ tal que $(f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1) \subset C$. Tomando $\varepsilon = \delta_1$ en la continuidad de f en x_0 (que es cierta por existir $f'(x_0)$), $\exists \, \delta_0 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow x \in A$ y $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \delta_1$.

Por tanto, $g \circ f$ está definida en $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subset A$.

Si $0 < |x - x_0| < \delta_0$, escribiendo $x = x_0 + h$ con $0 < |h| < \delta_0$,

$$(g \circ f)(x_0 + h) = g(f(x_0 + h))$$

$$= g(f(x_0) + \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{= k}) \quad (1).$$

(siempre que $|k| ...$) y con $\lim_{k \to 0} \frac{...}{k} = 0$

Asimismo, podemos escribir

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \mu(h) \qquad (3)$$

siempre que $|h|<\delta_2$) y con $\lim_{h\to 0} \frac{\mu(h)}{h} = 0$.

(3) y (4) $\Rightarrow$

$$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)) + \varphi(f(x)-f(x_0))$$

(con $x = x_0+h$)

$$\overset{(3)}{=} g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\left[f'(x_0)h + \mu(h)\right] + \varphi(f'(x_0)h+\mu(h))$$

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\,f'(x_0)\,h + R(h),$$

siendo $R(h) := g'(f(x_0))\,\mu(h) + \varphi(f'(x_0)h + \mu(h))$ (4).

Si probamos $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$, hemos terminado.

- $R(h) = I_h + II_h$; $I_h = g'(f(x_0))\,\mu(h)$, $II_h = \varphi(f'(x_0)h + \mu(h))$.

$|h|<\delta$, $\left|\frac{\mu(h)}{h}\right| \le 1 \Rightarrow |\mu(h)| \le |h|$

luego $|f'(x_0)h+\mu(h)| \leq C|h|$ $(|h|<\delta)$ (con $C=1+|f'(x_0)|$)

(5).

· Si $\varepsilon>0$ es arbitrario, como $\lim_{k\to 0}\frac{\varphi(k)}{k}=0$,

$\exists\ \delta'_\varepsilon\in(0,\delta_1] \Rightarrow |\varphi(k)|\leq\frac{\varepsilon}{C}|k|$. (6).

· Tomando $\delta_\varepsilon>0$ tal que si $|h|<\delta_\varepsilon$, $C|h|<\delta'_\varepsilon$

y $\delta_\varepsilon\leq\delta_0$ (por ejemplo, $\delta_\varepsilon=\min\{\frac{\delta'_\varepsilon}{C},\delta_0\}$, para

$0<|h|<\delta_\varepsilon$, (4), (5) y (6) $\Rightarrow$

$$|II_h|\leq\frac{\varepsilon}{C}|f'(x_0)+\mu(h)|\leq\frac{\varepsilon}{C}C|h|=\varepsilon|h|$$

$\Rightarrow \left|\frac{II_h}{h}\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{II_h}{h}=0$, y juntando

todo ésto, $\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h}=0 \Rightarrow \exists(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$ ☒

— · Teorema básicos sobre funciones derivables:

D... f ... $A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Decimos:

de f si $\exists\ \delta_0>0$ tal que $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset A$

y x_0 es un punto máximo (resp. mínimo) de f en $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$.

Prop. 5: Si $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tiene en $x_0 \in A$ un máximo ó mínimo local y $\exists f'(x_0)$, entonces $f'(x_0)=0$.

Dem: Supongamos que x_0 es máximo local. Entonces $\forall x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset A$ (con $\delta_0>0$), $f(x) \leq f(x_0)$. Tomando $x \in (x_0-\delta_0, x_0)$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \quad (1)$$

(el límite $\lim_{x \to x_0+} (-)$ existe porque $\exists f'(x_0)$).

Del mismo modo, si $x \in (x_0, x_0+\delta_0)$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad (2)$$

Puesto que $\exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

(el caso x_0 mínimo local lo omito)

Def 3: (Puntos singulares).

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. $x_0 \in A$ se denomina punto singular de f si $\exists f'(x_0) = 0$.

Obs: La Prop. 5 implica que todo máximo o mínimo local de una función derivable es un punto singular.

Prop. 6 (Teorema de Rolle).

Sea $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$. Entonces f tiene un punto singular en (a,b).

Dem: Puesto que f es continua en $[a,b]$, intervalo cerrado y acotado, $\exists x_0 \in [a,b]$ que es el máximo (global) de f y $\exists x_1 \in [a,b]$ que es el mínimo (global) de f, luego

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$.

en los extremos, pero como $f(a) = f(b)$, $f(x) = \ldots$

luego f es constante $\Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Prop. 7 (Teorema del Valor Medio [Derivadas])
(Lagrange)

Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $\exists \ x \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x).$$

Dem: Consideramos $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $(x \in [a,b])$. Entonces g es asimismo continua en $[a,b]$ (por serlo f) y derivable en (a,b) (por serlo f). Además

$$\left| \begin{array}{l} g(a) = f(a) \\ g(b) = f(a) - (f(b) - f(a)) = f(a) \end{array} \right.$$

luego el T. de Rolle $\Rightarrow \exists x \in (a,b)$ con

$$0 = g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Prop. 8 (Relación entre el signo de la derivada y el crecimiento)

f es creciente (resp. decreciente) en (a,b).

ii) Si $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) $\forall x \in (a,b)$, f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en $[a,b]$.

Dem: i), ii) Si $f' \geq 0$ en (a,b) y $a \leq x < y \leq b$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c),\ c \in (x,y) \subset (a,b)$$

$\geq 0 \rightarrow f$ creciente

Como $y - x > 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$. Si supusiéramos $f' > 0$ en (a,b), $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) > 0$ $(c \in (x,y) \subset (a,b))$

$\rightarrow f$ estrictamente creciente.

Los casos donde $f' \leq 0$ ó $f' < 0$ en (a,b) se tratan de manera similar. ∎

Prop. 9: Sea $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Prop. 10 (Teorema de la derivada de una función inversa)

Sea $f: (a,b) \mapsto C \subset \mathbb{R}$ función biyectiva, continua y f derivable en $f^{(-1)}(c)$ (con $c \in C$) con $f'(f^{(-1)}(c)) \neq 0$. Entonces $f^{(-1)}$ es derivable en c con

$$(f^{(-1)})'(c) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(c))}$$

Dem: Si $c \in C$ y f es biyección entre (a,b) y C, existe $x \in (a,b)$ (único) con $c = f(x) \Leftrightarrow f^{(-1)}(c) = x$.

· Como f es biyectiva y continua en (a,b), es monótona, y $f((a,b)) = C = (a', b')$. La inversa $f^{(-1)}$ es asimismo una biyección continua de (a',b') a (a,b) (todo esto es consecuencia de los teoremas vistos en el tema anterior sobre funciones y continuidad).

· Sea $0 < |h| < \delta_0$ ($\exists\, \delta_0 > 0$ tal que $(c-\delta_0, c+\delta_0) \subset (a',b')$).

$$\frac{f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c)}{h} = \frac{k}{f(x+k) - c} = \frac{\;}{f(x+k) - f(x)}$$

Puesto que $k = k(h) = f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c)$ y $f^{(-1)}$ es continua en c, $k(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Además $k(h) \neq 0$ si $h \neq 0$, por ser $f^{(-1)}$ inyectiva.

Por tanto, podemos escribir

$$\frac{f^{(-1)}(c+h) - f^{(-1)}(c)}{h} = \left[\frac{f(x+k(h)) - f(x)}{k(h)}\right]^{-1} \quad (0<|h|<\delta_0). \quad (1).$$

Tomando en (1) el $\lim_{h\to 0}$, $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+k(h))-f(x)}{k(h)} = f'(x) = f'(f^{(-1)}(c)) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists (f^{(-1)})'(c) = [f'(f^{(-1)}(c))]^{-1}$$ ☒

Obs: Si f es derivable en $f^{(-1)}(c)$, pero $f'(f^{(-1)}(c)) = 0$, $f^{(-1)}$ puede existir (como para $f(x) = x^3 \to f^{(-1)} = \sqrt[3]{x}$), pero no puede ser derivable.

Ejemplos:

i) $f(x) = \log x$ (o $\ln x$), definida en $(0,\infty)$.

Entonces $f'(x) = 1/x$.

Dem: Puesto que $f = h^{-1}$, siendo $h: \mathbb{R} \mapsto (0,\infty)$, $x \mapsto e^x$

$= [\exp(\log x)] = x$

ii) Si $a \in \mathbb{R}$ es un exponente y $f_a(x) = x^a$ (para $x \in (0,\infty)$), $f_a(x)' = (x^a)' = a x^{a-1} = a f_{a-1}(x)$.

<u>Dem</u>: Sabemos que para $x > 0$, $f_a(x) = \exp(a \log x)$

$$\Rightarrow f_a'(x) = \exp'(a \log x)\,(a \log x)' \quad \text{(Regla de la Cadena)}$$
$$= \exp(a \log x)\,\frac{a}{x}$$
$$= x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1} = a f_{a-1}(x).$$

- <u>Funciones trigonométricas.</u>

<u>Def 4</u>) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos:

i) $$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \left(= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)$$

ii) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \left(= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)$$

(<u>Obs</u>: es un ejercicio simple ver, con el Criterio del Cociente, que las series anteriores convergen absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$).

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

iii) sen y cos son derivables $\forall x \in \mathbb{R}$, con:

- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

iv) Si definimos $\frac{\pi}{2}$ como el primer 0 positivo de la función cos, sen y cos son funciones periódicas de periodo 2π, y $2 < \pi < 4$.
Además, $0 \le \cos x \le 1$ si $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ y $0 < \operatorname{sen} x \le 1$ si $0 < x < \pi$.

Dem:

i) Puesto que las series que definen a sen x y cos x son absolutamente convergentes, podemos escribir

$$\operatorname{sen} x \cos y = \left(\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^m}{(2m)!} y^{2m}\right)$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!\,(2m)!} x^{2n+1} y^{2m} \qquad z_{n,m}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = \sum_{n,m=0}^{\infty}{}' \boxed{\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!(2m)!}\left[x^{2n+1} y^{2m} + y^{2m+1} x^{2n}\right]}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{(2k+1)!}{(2j+1)!\,(2k-2j)!}\left[x^{2j+1} y^{2k-2j} + y^{2j+1} x^{2k-2j}\right]$$

$(k,0)$

(tal reagrupamiento de los sumandos es válido por ser las series involucradas absolutamente convergentes).

y entonces sen x cos y + cos x sen y =

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} \left[x^{2j+1}y^{2k-2j} + y^{2j+1}x^{2k-2j}\right] \quad (1).$$

Por otra parte, $(x+y)^{2k+1} = \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} x^{j} y^{2k+1-j}$ (2k+2 sumandos)

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{2k+1}{2l} x^{2l} y^{2k+1-2l} \quad \text{(términos con } j \text{ par)}$$

$$+ \sum_{l=0}^{k} \binom{2k+1}{2l+1} x^{2l+1} y^{2k-2l} \quad \text{(términos con } j \text{ impar)}$$

Como $\sum_{l=0}^{k} \binom{2k+1}{2l} x^{2l} y^{2k+1-2l} = \sum_{l=0}^{k} \binom{2k+1}{2(k-l)+1} x^{2l} y^{2(k-l)+1}$

$= \sum_{m=0}^{k} \binom{2k+1}{2m+1} x^{2(k-m)} y^{2m+1}$,

(con $k-l=m$)

se sigue que $\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} \left[x^{2j+1}y^{2k-2j} + y^{2j+1}x^{2k-2j}\right] = (x+y)^{2k+1}$,

(se procede de igual forma ... cos x cos y − sen x sen y ... cálculos similares) (3)

(ii) Sea $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$. Es claro que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$. De (i) se deduce inmediatamente que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

luego $h(x) = \cos(2x) + 2\operatorname{sen}^2 x$ (2)

Asumiendo (iii) (que probaremos a continuación), la función en (2) es derivable $\forall x$, y

$h'(x) = -2 \operatorname{sen}(2x) + 4 \operatorname{sen} x \cos x$ (usando la Regla de la Cadena)

$= -2(2 \operatorname{sen} x \cos x) + 4 \operatorname{sen} x \cos x$

$= 0 \quad \forall x$.

Por tanto, $h(x)$ es constante. Como $h(0) = 1$, se sigue que $h(x) = 1 \quad \forall x$.

(iii) Veamos primero $(\operatorname{sen} 0)' = 1$, $(\cos 0)' = 0$:

—. Sea $|x| \leq 1/2$. Entonces

$$\operatorname{sen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

$\leq \frac{\cdot}{3}$ (pues $1-|x| \geq \frac{}{2}$

• $\dfrac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}\,x}{h} = \dfrac{\text{sen}\,x\cos h + \text{sen}\,h\cos x - \text{sen}\,x}{h} =$

$$= \text{sen}\,x\,\frac{\cos h-1}{h} + \cos x\,\frac{\text{sen}\,h}{h} \qquad (3)$$

• Tomando en (3) $\lim\limits_{h\to 0}$, y usando que como hemos visto, $\dfrac{\cos h-1}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\dfrac{\text{sen}\,h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} 1$, se deduce que $\dfrac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}\,x}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}\cos x$, esto es, $(\text{sen}\,x)'=\cos x$.

• Del mismo modo,

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,h - \cos x}{h}$$

$$= \cos x\,\frac{\cos h-1}{h} - \text{sen}\,x\,\frac{\text{sen}\,h}{h}$$

$$\longmapsto -\text{sen}\,x,\quad h\to 0,$$

esto es, $(\cos x)' = -\text{sen}\,x$.

iv) Veamos que $\cos x > 0$ si $0\le x\le 1$ y que $\cos 2 < 0$ (de esto se deduce ... punto de $\cos x$,

y $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!} \cdots = \dfrac{\cdots}{(2n+1)(2n+2)}$ $\ge 2 \; (n\ge 0)$ ... $\le 6)$

Para $0 < |x| \leq 1/2$,

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} = 1 + \frac{R(x)}{x} \quad ; \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} - 1 \right| \leq \frac{|R(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{3} x^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 \leq \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} - 1 \leq \frac{1}{3}x^2 . \qquad (3)$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3}x^2\right) = 0$, $(3) \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} - 1\right) = 0$

$$\Rightarrow \exists (\operatorname{sen} 0)' = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x} = 1 .$$

Asimismo, $\cos x = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}_{= S(x)}$

$$\text{y } |S(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{2(1-x^2)}$$

$(x^2 < 1)$

$(2n)! \geq 2! = 2$

$$\leq x^2 \quad \left(\text{pues } 1 - x^2 \geq \frac{1}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos x - \cos 0}{x} \right| \leq x^2 \quad (0 < |x| \leq 1/2)$$

• Usando

» Por tanto, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ es una suma alternada $\sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n y_n$ $\left(y_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$, con $y_n > 0$ y decreciente. Usando las acotaciones para las sumas parciales de la serie que define el coseno, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$.

» En cambio, si $x = 2$, $\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n z_n$,

con $z_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. $z_n > 0$, $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{4}{\underbrace{(2n+1)(2n+2)}_{\geq 3\cdot 4 \, (n \geq 1)}} \leq \frac{1}{3} < 1$ $(n \geq 1)$.

$$y \quad \cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}{}' (-1)^n z_n}_{S} = -1 + S.$$

De nuevo, usando las acotaciones para sumas alternadas, $S \leq z_2 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2^4}{4\cdot 3\cdot 2} = \frac{2^4}{3\cdot 2^3} = \frac{2}{3} < 1$

$\Rightarrow \cos 2 = -1 + S \leq -1 + \frac{2}{3} < -\frac{1}{3} < 0$.

» $\ldots{}^2 \pi = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$ y $\operatorname{sen} \pi = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$\Rightarrow$ sen ... estrictamente ...

Puesto que $\text{sen}^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ y

$0 < \text{sen}\,x \le \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ si $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

Si $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$, $\text{sen}\,x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x'\right)$; $x' = x - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow \text{sen}\,x = \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)\cos x' + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\,x'$

$= \cos x' > 0$ (pues $0 \le x' < \pi/2$).

- Del mismo modo, $\text{sen}(2\pi) = 2\,\text{sen}\,\pi \cos\pi = 0$

  $\cos(2\pi) = \cos^2\pi - \text{sen}^2\pi = \cos^2\pi = 1$

  (pues $\text{sen}\,\pi = 0$)

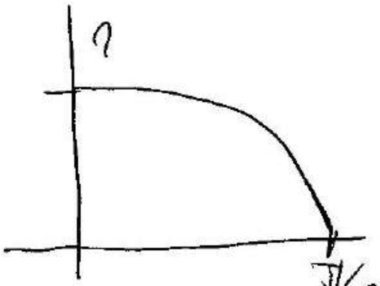
- Veamos ahora que $\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}\,x \quad \forall x$:

  $\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \forall x$

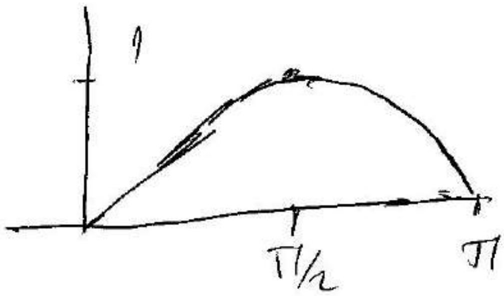
- $\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}\,x \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \cos x \underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{=0} = \text{sen}\,x$

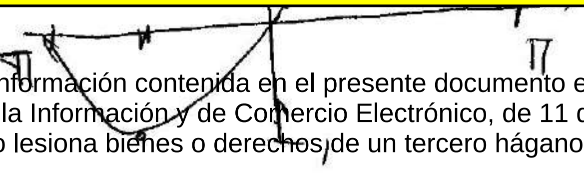
- $\cos(x+2\pi) = \cos x \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \text{sen}\,x \underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{=0} = \cos x$

$\cos x$:



$\text{sen}\,x$:





· De eso se deduce que el periodo natural de $\operatorname{sen} x$ es 2π (no hay ningún periodo menor T que haga que $\operatorname{sen}(x+T)$ coincida con $\operatorname{sen} x$). Puesto que $\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$, lo mismo vale para $\cos x$. ∎

· Algunos ejemplos de valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

a) Si $x = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen} x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dem: Puesto que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{sen} x, \cos x$,

y como $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$.

Finalmente, usando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pues $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} > 0$).

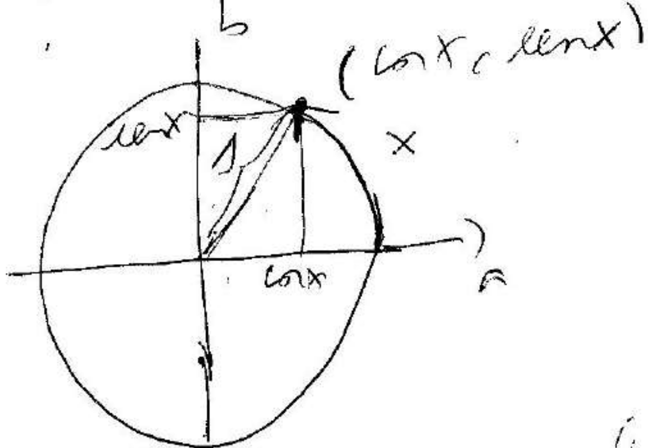
b) Si $x = \frac{\pi}{6}$, $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1/2 \\ \cos x = \sqrt{3}/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (por ser $\cos\frac{\pi}{6} > 0$).

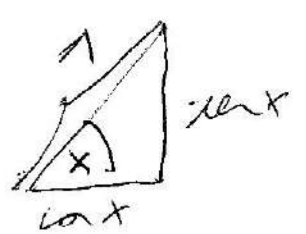
c) Si $x = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

• Dado un ángulo $x \in [0, 2\pi)$, el punto $(\cos x, \operatorname{sen} x) \in C = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$



Geométricamente, la tangente de x (con $0 \leq x \leq \pi$) es la razón $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ de los lados del triángulo rectángulo



; $\tan x$ (también $\operatorname{tg} x$) $= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

• La función $f(x) = \tan x$ está definida siempre

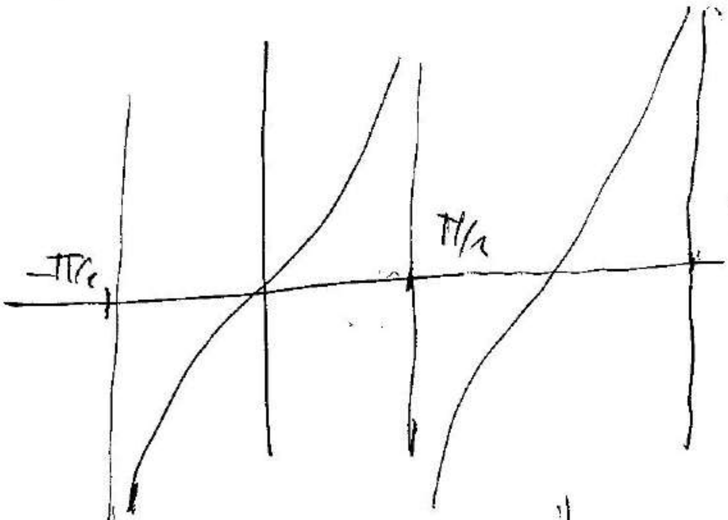
... π) ... $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

pues ... $\cos(x+\pi)$

• Entonces $(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$,

luego si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $(\tan x)' \geq 1$

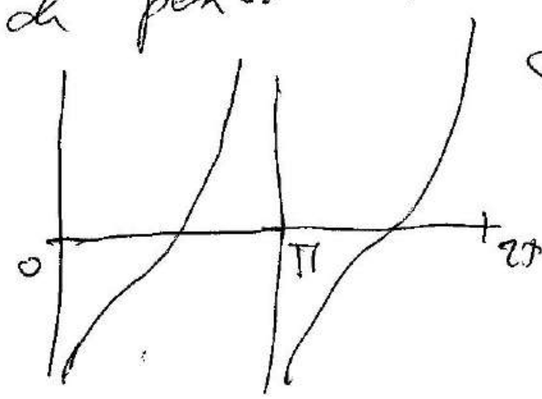
(pues $0 < \cos^2 x \leq 1$), y si $\begin{cases} x \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \tan x \to \infty \\ x \to -\frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \tan x \to -\infty \end{cases}$



: tan x

• Análogamente, cotan x (cotangente de x ó ctg x)

es $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, y es periódica de periodo π.



cotan x

$(\operatorname{cotan} x)' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \geq 1$:

con $\begin{cases} x \to 0^+ \Rightarrow \operatorname{cotan} x \to -\infty \\ x \to \pi^- \Rightarrow \operatorname{cotan} x \to \infty \end{cases}$.

• Análogamente se definen la secante: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

un gonométrica inversa

(32)

- Función arcsen x ($= \operatorname{sen}^{(-1)} x$):

Puesto que $f(x) = \operatorname{sen} x$, cuando $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

es continua con derivada $f'(x) = \cos x > 0$,

f es estrictamente creciente y aplica $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

en $[-1, 1]$. Definimos entonces arcsen,

con dominio $[-1, 1]$ como la inversa de tal

función. Si $x \in (-1, 1)$, entonces $x = \operatorname{sen} y$

con $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \quad (1).$$

Observamos que $1 = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)$

$= \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + x^2$

$\Rightarrow \cos^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - x^2 > 0 \quad (x \in (-1, 1))$

la imagen por $\tan x$ de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en $\mathbb{R}$,

y entonces $\arctan$: $\mathbb{R} \longmapsto (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

· Para $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ con $x = \tan y$,

luego $(\arctan x)' = \dfrac{1}{h'(h^{(-1)}(x))}$

· $h'(h^{(-1)}(x)) = \sec^2(\arctan x) = \dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)}$

$\Rightarrow (\arctan x)' = \cos^2(\arctan x)$. (1)

· Por otra parte, $x^2 = \tan^2(\arctan x) = \dfrac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}$

$$= \frac{1 - \cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)} = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} - 1$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + x^2$ (2).

(1) y (2) $\Rightarrow$ $(\arctan x)' = \cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

abierto para que la condición: $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$ ...

- Función arccos ($= \cos^{(-1)} x$):

Si $g(x) = \cos x$, $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, luego g es continua y estrictamente decreciente en $[0,\pi]$.

Entonces $g^{(-1)} = \arccos$ es continua en $[-1,1]$, con imagen $[0,\pi]$ ($[-1,1]$ es la imagen por $\cos x$ de $[0,\pi]$). Si $x \in (-1,1)$, $x = \cos y$ con $y \in (0,\pi)$ y

$$(\arccos x)' = \frac{1}{g'(g^{(-1)}(x))}$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos x)}$$

y razonando como antes, obtenemos

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1).$$

- Función arctan ($= \tan^{(-1)} x$).

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = \infty$$

cualquiera puede definirse $f': (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto f'(x)$.

Si esta nueva función es a su vez derivable en $x_0 \in (a,b)$, hablamos de $f''(x_0)$, y si $(f')'(x)$ existe $\forall x \in (a,b)$, escribimos $(f')'(x) = f''(x)$.

- De modo análogo definimos $f^{(j)}$, para $j = 0, 1, 2$ con
$$\begin{cases} j=0: & f^{(0)} = f \\ j=1: & f^{(1)} = f' \\ j=2: & f^{(2)} = f'' \end{cases}$$
etc.

(En el próximo tema estudiaremos el significado de f'').