

BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL.

TEMA 5

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES

EJERCICIOS PROPUESTOS

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map of the city of Cartagena. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Ejercicio 1 Dados los vectores de \mathbb{R}^3 $\vec{u} = (4, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -3)$, expresar, si se puede, los siguientes vectores como combinación lineal de ellos.

a) $\vec{w} = (14, 1, -9)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ Son Linealmente Dependientes \Rightarrow El tercer vector se puede escribir como combinación lineal de los dos primeros:

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 14 \\ -a + b &= 1 \quad ; \quad b = 3 \quad a = 2 \quad \Rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \\ -3b &= -9 \end{aligned}$$

b) $\vec{w} = (0, 3, -6)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ Son LD

Escribimos el tercer vector como combinación lineal de los dos primeros:

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 0 \\ -a + b &= 3 \quad ; \quad b = 2 \quad a = -1 \quad \Rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v} \\ -3b &= -6 \end{aligned}$$

c) $\vec{w} = (10, -1, 5)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 48 \neq 0 \Rightarrow$ Son Linealmente Independientes \Rightarrow Ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros

Ejercicio 2 Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes vectores de \mathbb{R}^4 .

a) $\{(1, 2, -4, 0), (-2, 4, -8, 0), (2, 3, 0, 1)\}$

Solución:

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Son LI}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

c) $\{(2,0,3,0), (0,1,-3,0), (1,-2,0,8)\}$

Solución:

$$\text{rg}A = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Son LI}$$

Ejercicio 3 Dado el siguiente subespacio vectorial de \mathbb{R}^4

$$S = \left\{ (x, y, z, t) \ / \ \begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ 3x + 5y + z - t = 0 \\ 5x + y + 3z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinar:

a) $\text{Dim}(S)$

Solución:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Las ecuaciones no son redundantes} \Rightarrow \text{Dim}(S) = 4 - 3 = 1$$

b) Las ecuaciones cartesianas del subespacio

Solución:

Son las del enunciado

c) Una base del subespacio

Solución:

Basta encontrar un vector, solucionando el sistema;

$$(x = -3/11 t, y = 4/11 t, z = 0, t = t)$$

Para $t = 1$ tenemos $(-3/11, 4/11, 0, 1)$

d) Las ecuaciones paramétricas del subespacio

Solución:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{11}\lambda \\ y &= \frac{4}{11}\lambda \\ z &= 0 \\ t &= \lambda \end{aligned}$$

Ejercicio 4 Dado el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por los vectores,

$$S = L\{(1, 2, -4, 1), (2, 4, -8, 2), (2, 3, 1, 1)\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

b) Una base del subespacio

Solución:

Basta escoger dos vectores LI, por ejemplo; (1, 2, -4, 1) y (2, 3, 1, 1)

c) Las ecuaciones cartesianas del subespacio

Solución:

Necesitamos $4 - \dim(S) = 2$ ecuaciones no redundantes

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & -4 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & -4 & 1 \end{pmatrix} = 0; 14x - 9y - z = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0; -x + y - t = 0$$

Ejercicio 5 Determinar si los siguientes vectores son sistema generador y/o base de \mathbb{R}^3

a) $\{(3, -1, -1), (1, 0, -2), (0, 4, 3), (2, -1, 1)\}$

Solución:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La cuarta columna es combinación de las dos primeras, se obtiene restando las dos primeras

Las tres primeras columnas son independientes, $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 23$

Los vectores por tanto son sistema generador pero no base, la base está formada por tres vectores linealmente independientes

b) $\{(1, -2, 1), (4, 1, -1)\}$

Solución:

No son sistema generador no base, para que formaran un sistema generador debería haber como mínimo tres vectores linealmente independientes. Y para formar base exactamente tres vectores linealmente independientes.

c) $\{(2, -1, 0), (4, -1, 5), (0, -1, 2)\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Solución:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -7 \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto el rango de la matriz es menor que tres, los tres vectores son linealmente dependientes y no forman una base, tampoco son sistema generador

Ejercicio 6 Dados los siguientes cuatro vectores de \mathbb{R}^4 , encontrar el máximo número de vectores linealmente independientes: $\{(2, 0, 1, 3), (0, 2, -1, 2), (2, 2, 0, -1), (1, 3, 0, -2)\}$

Solución:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 24$$

Por tanto el rango de la matriz es 4 y los cuatro vectores son linealmente independientes

Ejercicio 7 Sean el siguientes subespacio de \mathbb{R}^3 :

$$S = L\{(2, -1, -1), (3, 1, 0)\}$$

Calcular la dimensión y ecuaciones cartesianas del subespacio S

Solución:

$$rg \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

La dimensión del subespacio es por tanto 2, y una base está formada por los dos vectores dados

El subespacio está determinado por una única ecuación cartesiana que se obtiene resolviendo

$$\det \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ y & -1 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

La ecuación cartesiana que define el subespacio es: $x - 3y + 5z = 0$

Ejercicio 8 Calcular la matriz asociada a las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f(x, y) = (2x - y, 3y, x)$

Solución:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

c) $l(x, y, z, t) = (x + y - z, 5t, 2y + z, 0)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $h(x, y, z) = (3x + 2y - z, 6x - y, z - x - y)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9 Dada la siguiente aplicación lineal

$$f(x, y, z) = (7x + 4y - z, 4x + 7y - z, -4x - 4y + 4z)$$

Comprobar cuál de los siguientes vectores son un autovector de la aplicación y averiguar, en caso afirmativo, su autovalor asociado.

a) $(1, 0, 4)$

Solución:

$f(1, 0, 4) = (3, 0, 12)$ Sí son proporcionales \Rightarrow Es autovector asociado al autovalor $\lambda = 3$

b) $(1, 1, 8)$

Solución:

$f(1, 1, 8) = (3, 3, 3)$ No son proporcionales \Rightarrow No es autovector

c) $(-2, -2, 2)$

Solución:

$f(-2, -2, 2) = (-24, -24, -24) = 12(-2, -2, -2) \Rightarrow$ Es autovector asociado al autovalor $\lambda = 12$

d) $(0, -1, 6)$

Solución:

$f(0, -1, 6) = (-10, -13, 20)$ No son proporcionales \Rightarrow No es autovector

Ejercicio 10 Calcular el polinomio característico y los autovalores de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



$$\text{Det}(E-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(3-4\lambda+\lambda^2)] = 0; \lambda=0; \lambda=1; \text{ y } \lambda=3$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{Det}(F-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0; \lambda=1$$

Ejercicio 11 De las matrices anteriores indicar cuáles son diagonalizables.

Solución:

En todos los casos todos los autovalores son reales

Si todos los autovectores son distintos la matriz será diagonalizable, por tanto A y E diagonalizables

Para que F sea diagonalizable la dimensión del Subespacio Vectorial asociado a $\lambda=1$ debe ser 3.

$$\text{Rg}(F-1 \cdot I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Dim}(S_{\lambda=1}) = 3-2 = 1 \neq 3 \Rightarrow F \text{ No es diagonalizable.}$$

Ejercicio 12 Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que la matriz es diagonalizable

Solución:

$$\text{Det}(A-\lambda I) = (-7-\lambda)(10-\lambda) + 72 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \lambda=1 \text{ y } \lambda=2.$$

Todos los autovalores son reales y distintos \Rightarrow F diagonalizable.

b) Calcular la matriz diagonal semejante

Solución:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Calcular A^{34} (utilizando la matriz diagonal semejante)

Solución:

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \Delta \Rightarrow \Delta = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P \Rightarrow \Delta^{34} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1^{34} & 0 \\ 0 & 2^{34} \end{pmatrix} P$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$A^{34} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que la matriz es diagonalizable

Solución:

$$\text{Det}(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)[(4-5\lambda+\lambda^2)] = 0; \lambda = 1; \lambda = 3; \text{ y } \lambda = 4$$

Autovalores reales y distintos $\Rightarrow A$ diagonalizable

b) Calcular la matriz diagonal semejante

Solución:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Calcular A^{20} (utilizando la matriz diagonal semejante)

Solución:

$$S_{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}: \begin{matrix} 2x - y = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{matrix} \Rightarrow (1, 2, 1) \text{ es una base}$$

$$S_{\lambda=3}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}: \begin{matrix} -y = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{matrix} \Rightarrow (1, 0, -1) \text{ es una base}$$

$$S_{\lambda=4}: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}: \begin{matrix} -x - y = 0 \\ -y - z = 0 \end{matrix} \Rightarrow (1, -1, 1) \text{ es una base}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{20} = P^{-1} D^{20} P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14 Sea la siguiente aplicación lineal de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$$

Calcular:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) + 2(2-\lambda)$$

Calculando las raíces del polinomio, obtenemos los autovalores

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) - 2(2-\lambda) &= 0 \\ (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] &= 0 \\ (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo los autovalores son $\lambda = 3, \lambda = 2$ (multiplicidad 2)

b) Calcular una base de cada uno de los subespacios de autovectores asociados a cada autovalor.

Solución:

$$S_{\lambda=2} = \left\{ (x, y, z) / \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

Base de $S_{\lambda=2} = \{(1, 0, 0)\}$

$$S_{\lambda=3} = \left\{ (x, y, z) / \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{\lambda=3} = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{array}{l} x = y \\ z = -2y \end{array} \right\}$$

Base de $S_{\lambda=3} = \{(1, 1, -2)\}$

c) ¿Es diagonalizable la matriz asociada a la aplicación anterior?

Solución:

No es diagonalizable ya que $\dim(S_{\lambda=2}) + \dim(S_{\lambda=3}) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**