Tema 6: Teorema de L'Hôpital, concavidad/convexidad, polinomios de Taylor

· **Prop 1** (Teorema del Valor Medio de Cauchy)

Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en todo $[a,b]$ con $g'(x) \neq 0$ en (a,b) y f, g continuas a $[a,b]$. Entonces $\exists\, \xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (*)$$

(Obs: es parte del Teorema que los dos miembros de la igualdad en (*) están bien definidos).

Dem: i) Veamos primero que $g(b)-g(a) \neq 0$.
De no ser así, por el Teorema de Rolle $\exists\, c \in (a,b)$ con $g'(c) = 0$, lo cual contradice $g' \neq 0$ en (a,b). Por tanto, $\exists\, \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

y es ...

$$h'(x) = (f(b)-f(a))\, g'(x) - (g(b)-g(a))\, f'(x). \quad (1)$$

Asimismo:

$$h(a) = (f(b)-f(a))\,g(a) - (g(b)-g(a))\,f(a)$$
$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = (f(b)-f(a))\,g(b) - (g(b)-g(a))\,f(b)$$
$$= f(b)g(a) - g(b)f(a) \qquad (2)$$
$$= h(a)$$

Usando (1) y (2) junto con el Teorema de Rolle,

$\exists\, \xi \in (a,b)$ con $h'(\xi) = 0 \iff$

$$\iff 0 = (f(b)-f(a))\,g'(\xi) - (g(b)-g(a))\,f'(\xi)$$

$$\iff \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad (\text{pues } g(b)-g(a) \neq 0) \quad \blacksquare$$

El Teorema del Valor Medio es el ingrediente fundamental de las diversas versiones del Teorema

Sean ...

2)

diferenciables en (a,b), con $g' \neq 0$ en (a,b) y $f(a) = g(a) = 0$. Entonces, si $\exists \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también $\exists \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ y ambos límites son iguales. · L'Hôpital

Obs: i) Puesto que el Teorema de ~~[illegible]~~ se refiere al límite $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, basta con que las condiciones del Teorema se cumplan en $[a, a+\delta]$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

ii) En la conclusión del Teorema de L'Hôpital se permite que $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sea $\pm\infty$.

Dem:

i) Supongamos primero que $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$:

Dado $x \in (a,b]$, puesto que $f(a) = g(a) = 0$, del Teorema del Valor Medio de Cauchy deducimos

Puesto que $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, dado $\varepsilon > 0$,

$\exists \delta \in (0, b-a]$ tal que si $a < x \leq a+\delta$,

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

En tal caso, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right|$; $\xi \in (a,x)$

Pero $\xi \in (a,x) \Rightarrow \xi \in (a, a+\delta)$, luego

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon, \; x \in (a, a+\delta)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

ii) Si $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, dado $R > 0$ $\exists \delta \in (0, b-a]$

tal que si $a < x < a+\delta$,

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq R$. Tomando entonces tal x,

$\frac{f(x)}{\ldots} \quad \frac{f'(\xi)}{\ldots} \quad (\xi \in (a,x))$

Corolario (Teorema de L'Hôpital, 2ª Versión)

Sean $f, g : (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$. Entonces, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g' \neq 0$ en (a,b) y $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

y son iguales

Obs: i) De nuevo, basta con que las hipótesis se cumplan en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño

ii) Los casos $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm \infty$ están permitidos

Dem:
i) Primero, observamos que una pequeña variación del Teorema de L'Hôpital en su primera versión también permite concluir:

• "Si $f, g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ son continuas en $[a,b]$,

y son iguales (omito la prueba)

ii) Usando i), si $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, esto equivale a:

$\exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y son iguales

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos son iguales a $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (por i))

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, y es igual a $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\blacksquare$

Prop 3 (Teorema de L'Hôpital, 2º Caso)
Sean $f, g : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$, diferenciables en (a, b) con $g' \neq 0$ en (a, b), y $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a+} g(x)$ son ambos $\pm\infty$.
Entonces, si $\exists \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon$

$a<x<a+\delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon/2$.

Escribimos entonces, usando el Teorema del Valor Medio de Cauchy,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} \, \frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)} \, \frac{f(x)}{f(x)-f(a+\delta)}$$

$$= \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \left[1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1} \quad (1)$$

(para cierto $\xi_x \in (x, x+\delta)$)

(La fórmula (1) es válida siempre que $f(x)-f(a+\delta)\neq 0$, pero como $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, fijando $\delta>0$ y tomando $\delta_1 \in (0,\delta]$ de forma apropiada, si $a<x<a+\delta_1$ (1) se cumple).

Entonces, para $a<x<a+\delta_1$, (1) implica que

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \ell = \left[\left(\frac{f'}{g'}\right)(\xi_x) - \ell\right]\left[1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1}$$

siendo:

$$\therefore I = \underbrace{\left|\left(\frac{f'}{g'}\right)(\xi_x) - l\right|}_{<\varepsilon/2} \underbrace{\left|1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right|}_{\downarrow 1,\ x \to a^+} \underbrace{\left|1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right|^{-1}}_{\downarrow 1\ x \to a^+}$$

Por tanto, $\exists\ \delta_2 \in (0, \delta_1]$ tal que si

$a < x < a + \delta_2$, $I < \frac{3}{4}\varepsilon$ $\left(\frac{\varepsilon}{2} < \frac{3}{4}\varepsilon\right)$

(para ver que $\left|1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right| \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} 1$, usamos el

hecho de que $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$, y lo mismo

con $\left|1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right|^{-1}$)

Del mismo modo, como $\lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right) = 1$,

$\exists\ \delta_3 \in (0, \delta_1]$ tal que $a < x < a + \delta_3 \Longrightarrow$

$II < \left|1 - \left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right)\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right)^{-1}\right| |l| < \frac{\varepsilon |l|}{4(|l|+1)}$.

$\frac{}{4(|l|+1)}$

ii) Si $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, la ecuación (1) sigue siendo válida para $a<x<a+\delta$,

pero como $\lim_{x\to a+} \left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1} = 1$,

si para un $R>0$ hemos elegido $\delta\in(0,b-a]$ tal que $a<x<a+\delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 2R$, también podemos encontrar $\delta_1\in(0,\delta]$ tal que si

$$a<x<a+\delta_1 \Rightarrow \left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1} \geq \frac{1}{2},$$

en cuyo caso, para $a<x<a+\delta$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\left(\frac{f'}{g'}\right)(\xi_x)}_{\geq 2R} \underbrace{\left[1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right]\left[1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right]^{-1}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 2R\cdot\frac{1}{2} = R.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad \blacksquare$$

Entonces, si f y g son diferenciables en I con $g'\neq 0$ en I tenemos:

i) Si $I \supset [a,\infty)$ y $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos son iguales

ii) Si $I \supset (-\infty,a]$ y $\exists \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos son iguales.

(Obs: se permite que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sean $\pm\infty$)

Dem: Pongamos que $I \subset [1,\infty)$, y consideramos

$$\begin{cases} f_1(x) = f(1/x) \\ g_1(x) = g(1/x) \end{cases} ; \quad 0 < x \leq 1.$$

Puesto que f_1 y g_1 son diferenciables en $(0,1)$ si f y g lo son en $(1,\infty)$ con

$f_1'(x) = -f'(1/x)\, x^{-2}$ $\quad 0 < x \leq 1$

y si $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tomando $t = 1/x$, Por tanto, si $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también

$\exists \lim\limits_{t\to 0+} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}$, (y son iguales).

Usando el 1er caso del Teorema de L'Hôpital,

$\exists \lim\limits_{t\to 0+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)}$ (y es igual a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$)

Pero $t \to 0+ \iff x = 1/t \to \infty$, luego

si $\exists \lim\limits_{t\to 0+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)}$, también existe $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

(y son iguales), luego $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplos de uso del Teorema de L'Hôpital

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = "\frac{0}{0}"$.

$f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x \neq 0$ $(x \neq 0)$,

$= 2$

ii) Veamos que si $a>0$, $\lim_{x\to 0^+} (x^a \log x) = 0$:

Tenemos $\lim_{x\to 0^+} (x^a \log x) =$ "$0 \cdot \infty$", que no es exactamente del tipo al que puede aplicarse directamente el Teorema de L'Hôpital, pero para $x>0$, $x^a \log x = \dfrac{\log x}{x^{-a}}$ y entonces

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{x^{-a}} =$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$", dónde sí puede aplicarse:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{a} x^a\right) = 0,$$

por ser $a>0$.

iii) Veamos que si $a>0$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^a} = 0$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$":

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{a} x^{-a}\right) = 0,$$

por ser $a>0$.

iv) Veamos que $\forall p \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} (x^p e^{-x}) = 0$:

Si $p \le 0$, $x \ge 1$, $0 < x^p e^{-x} \le e^{-x} \to 0$, ...

... y usando L'Hôpital

para $x>0$, $x^p e^{-x} = \dfrac{x^p}{e^x}$, ...

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} \left(= \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{p x^{p-1}}{e^x} =$$

$$= \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-k)\, x^{p-k}}{e^x}$$ suponiendo (p-k+1>0)

L'Hôpital k veces consecutivas) y siempre que p

Sea cual sea $p \in \mathbb{R}$, podemos encontrar k entero tal que $p-k \leq 0$ pero $p-k+1>0$. Entonces, usando que para $p \leq 0$, $\lim_{x\to\infty} (x^p e^{-x}) = 0$, se deduce el caso general.

V) Veamos que $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ "1^∞":

Si $l = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\log l = \log\left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

(Suponemos $l>0$ y usamos que $\log x$ es continua

$= \lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1} = 1$, luego $l = e^1 > 0$ (y

13

por tanto, a posteriori, los cálculos anteriores están justificados.

vi) Veamos que si $\exists f''$ en $(x-\delta, x+\delta)$ con $\delta > 0$ y f'' es continua en x,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x):$$

Usando el Teorema de L'Hôpital,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \left(= \text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} \left(= \text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h)+f''(x+h)}{2} = \frac{2f''(0)}{2} = f''(0).$$

- Concavidad y convexidad

Def 1: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ con I un intervalo. Decimos:

i) f es convexa en I si dados $x, y \in I$

$\ldots t) \le (1-t)f(x)+tf(y)$

Observaciones:

i) Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $x, y \in I$, $(1-t)x + ty \in I$ (por ejemplo, si $0 \leq t \leq 1$, si $I = [a,b]$ y $x, y \in I \Leftrightarrow a \leq x, y \leq b$, tomando $0 \leq t \leq 1$, luego si además $x \leq y$, pues

$$x \leq (1-t)x + ty \leq y,$$

$$\begin{cases} (1-t)x + ty - x = \underbrace{t}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0. \\ (1-t)x + ty - y = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}\underbrace{(x-y)}_{\leq 0} \leq 0 \end{cases})$$

$x \qquad (1-t)x+ty \qquad y$

conforme t aumenta de 0 a 1, $(1-t)x+ty$ crece desde x hasta y.

ii) Si $f(x) = ax + b$, f es a la vez cóncava como convexa.

iii) Si en la definición 1 sustituimos: "dados $x, y \in I$ y

$0 \leq t \leq 1$, $f((1-t)x + ty) > (1-t)\ldots$

se denomina estrictamente cóncava (en I)

Prop 5: i) Sea $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y convexa en (a,b). Entonces f' es creciente en (a,b) (si f es estrictamente convexa, f' es estrictamente creciente).

ii) Recíprocamente, si $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable en (a,b) y f' es creciente en (a,b), f es convexa en (a,b) (si f' es estrictamente ~~convexa~~ creciente, f es estrictamente convexa).

Dem: i) Fijemos $x, y \in (a,b)$ con $a < x < y < b$.

Si $z \in (x,y) \Leftrightarrow z = (1-t)x + ty$ con $t \in (0,1)$.

Entonces

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f((1-t)x+ty) - f(x)}{t(y-x)} \quad ; \quad t(y-x) > 0$$

$$\leq \frac{[(1-t)f(x) + t f(y)] - f(x)}{t(y-x)} \quad (f \text{ convexa})$$

(pues f' es diferenciable en todo $x \in (a,b)$), luego

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \forall x \in (a,b) \ \forall y \in (x,b) \ (2)$$

Razonando de forma similar:

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-x} = \frac{f(y)-f((1-t)x+ty)}{(1-t)(y-x)} \ ; \ (1-t)(y-x)>0$$

$$\geq \frac{f(y)-[(1-t)f(x)+tf(y)]}{(1-t)(y-x)}$$

$$= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad (3)$$

y tomando a (3), $z \to y^-$, $\frac{f(y)-f(z)}{y-x} \mapsto f'(y)$,

luego $f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ \forall y \in (a,b) \ \forall x \in (a,y)$ (4).

(4) y (5) $\Rightarrow f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x)$, de donde

f' es creciente en (a,b).

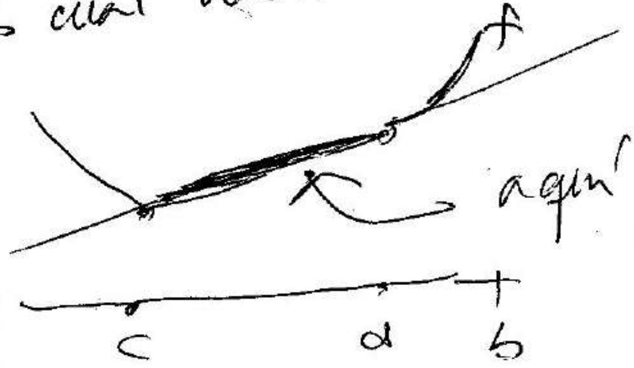
· Por último, si f es estrictamente ~~creciente~~

si … derivable si f' no fuera

$f'(x) - \ldots$

Entonces $g(x) = f(x) - \alpha x$ será continua en $[c,d]$

con $g'(x) = f'(x) - \alpha = 0$ en $[c,d]$, luego g sería constante: $\exists \beta$ con $g(x) = \beta$, $\forall x \in [c,d]$, de donde $f(x) = \alpha x + \beta$ si $x \in [c,d]$, luego la gráfica de f tendría un segmento rectilíneo, lo cual contradice la convexidad estricta de f.



(ii) Supongamos que f' es creciente en (a,b), y sean $x, y \in (a,b)$, $0 \leq t \leq 1$ (y por conveniencia, suponemos $x < y$). Queremos ver que

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f((1-t)x + ty) - (1-t) f(x) - t f(y)}_{:= g(t)} \leq 0.$$

Pero $g(t) = (1-t)[f(x_t) - f(x)] + t[f(x_t) - f(y)]$ ($x \leq x_t \leq y$)

$(1-t)x + ty$

$g(t) = (1-t) f(\ldots)$ $= -(1-t)(\ldots)$

$= t(y-x)$

$$\Rightarrow g(t) = \underbrace{\underset{\geq 0}{t}\,\underset{>0}{(1-t)}\,\underset{>0}{(y-x)}}_{\geq 0}\;\underbrace{\left(f'(\xi) - f'(\eta)\right)}_{\leq 0,\text{ pues } \xi \leq x_t \leq \eta \text{ y } f' \text{ es creciente}} \quad (*)$$

$\leq 0.$

luego f es convexa en (a,b). Si f' fuera estrictamente creciente en (a,b), si $0<t<1$ y analizando la anterior expresión $(*)$ para $g(t)$, tenemos:

$$g(t) = \underset{>0}{t}\,\underset{>0}{(1-t)}\,\underset{>0}{(y-x)}\;\underbrace{\left(f'(\xi) - f'(\eta)\right)}_{<0} < 0$$

<0, pues si $0<t<1$, podemos tomar $\xi \in (x, x_t)$ y $\eta \in (x_t, y)$, luego $\xi < x_t < \eta$ y $f'(\xi) - f'(\eta) < 0$ por ser f' estrictamente creciente. $\blacksquare$

Corolario (Prop 6):

$f: (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ con 2 derivadas en (a,b)

Dem: Usando la Prop. 5, basta notar que si f tiene 2 derivadas en (a,b),

- f' creciente en $(a,b) \iff f'' = (f')'$ es ≥ 0 en (a,b)
- f' estrictamente creciente en $(a,b) \iff f'' = (f')'$ es > 0 en (a,b).

Ejemplos:

i) Si $f(x) = x^a$ con $a \geq 1$ en $(0,\infty)$, f es convexa (estrictamente convexa si $a > 1$).

Dem: $f'(x) = a x^{a-1}$, $f''(x) = \underbrace{a(a-1)}_{\geq 0}\underbrace{x^{a-2}}_{> 0} \geq 0$.

Si $a > 1$, $f''(x) > 0$ en $(0,\infty)$.

ii) Si $f(x) = e^x$ es convexa en $\mathbb{R}$.

Dem: $f' = f'' = f$ y $f > 0$.

iii) $f(x) = x^2$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$

Dem: $f'' = 2 > 0$.

... $\to \mathbb{R}$ con f

estrictamente convexa en (a,b) si f

Dem: f convexa en $[a,b] \Rightarrow f$ convexa en $(a,b) \Rightarrow f' \geq 0$ en (a,b). Si $f' \geq 0$ en (a,b) y f es continua en $[a,b]$, veamos que si $a < x < b$, y

$0 \leq t \leq 1$,

$$f((1-t)a + tx) \leq (1-t)f(a) + tf(x) \quad 1.1)$$

$$f((1-t)x + tb) \leq (1-t)f(x) + tf(b) \quad 1.2)$$

• 1.1): Si $g(t) = f(\underbrace{(1-t)a + tx}_{=x_t}) - (1-t)f(a) - tf(x)$,

como f es continua en $[a,x]$ y $a < x_t < x$, podemos (como en la prueba de la Prop 5), aplicar el Teorema del Valor Medio de Lagrange para obtener $g(t) = t(1-t)(x-a)(f'(\xi) - f'(\eta))$ con $\xi \in (a, x_t)$, $\eta \in (x_t, x)$. Si f' ~~creciente~~ creciente en $(a,b) \Rightarrow g(t) \leq 0$ y si f' ~~monótona~~ es estrictamente creciente en $(a,b) \Rightarrow g(t) < 0$. De modo análogo se puede estudiar 1.2). $\square$

... convexa ... $\geq$ ...

v) Si $f(x) = x^a$ en $[0,\infty)$ y $0<a<1$,

f es continua $[0,\infty)$ (pues $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0 = f(0)$)

y para $x>0$, $f'(x) = a x^{a-1}$, $f''(x) = \underbrace{a(a-1)}_{<0}\underbrace{x^{a-2}}_{>0}$

$\Rightarrow f''<0$ en $(0,\infty)$.

Por tanto, f es estrictamente cóncava

en $[0,\infty)$.

vi) Si $f(x) = x^a$ en $(0,\infty)$ con $a<0$,

f es estrictamente cóncava (inmediato).

Veamos un ejemplo distinto:

vii) $f(x) = |x|$ es convexa en $\mathbb{R}$:

Dem (Directamente) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \le t \le 1$.

$f((1-t)x+ty) = |(1-t)x + ty|$

$\le |(1-t)x| + |ty|$ ...

Para este ejemplo, ...

- Más sobre máximos y mínimos locales:

Prop 7: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diferenciable en (a,b) y $x_0\in(a,b)$ un punto crítico ($f'(x_0)=0$)

Entonces:

i) Si $\exists\, \delta_0>0$ tal que f es creciente en $(x_0-\delta_0, x_0]$ y f es decreciente en $[x_0, x_0+\delta_0)$ (con $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\subset(a,b)$), el punto x_0 es un máximo local de f en (a,b) (si f es estrictamente creciente en $(x_0-\delta_0, x_0]$ y estrictamente decreciente en $[x_0, x_0+\delta_0)$, x_0 es un máximo local estricto de f en (a,b))

ii) Si f tiene dos derivadas en x_0, y en x_0, f presenta un máximo local $\Rightarrow f''(x_0)\leq 0$.

iii) Si f tiene dos derivadas en x_0, y en x_0, $f''(x_0)<0$, f presenta un máximo local estricto en x_0

... Llamo la hipótesis por f ...

y si $\exists\, f'''(x_0)<0$, f presen...

estricto

Dem:

i) a) Si f es $\begin{cases} \text{creciente en } (x_0-\delta_0, x_0] \\ \text{decreciente en } [x_0, x_0+\delta_0) \end{cases}$,

tomando $|x-x_0|<\delta_0$, ó bien $x_0-\delta_0<x\leq x_0$ ó bien $x_0\leq x<x_0+\delta$. En cualquiera de los dos casos, $f(x)\leq f(x_0)$ (por ejemplo, si $x_0-\delta_0<x\leq x_0$, $f(x)\leq f(x_0)$ por ser f creciente en $(x_0-\delta_0, x_0]$).

b) Si f es $\begin{cases} \text{estrictamente creciente en } (x_0-\delta_0, x_0] \\ \quad\text{"} \quad \text{decreciente en } [x_0, x_0+\delta_0) \end{cases}$

y $0<|x-x_0|<\delta_0$, ó bien $x_0-\delta_0<x<x_0$ ó bien $x_0<x<x_0+\delta_0$, y en cualquier caso, $f(x)<f(x_0)$.

- Si estamos en la situación a), x_0 será entonces un máximo local de f, y si estamos en la situación b), x_0 será un máximo local estricto de f.

ii) Sea $x_0\in(a,b)$ con $f'(x_0)=0$ y x_0 máximo local. ∃ δ_0 con $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\subset(a,b)$ y para

$x\to x_0$ $\quad x-x_0$

$\exists \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que si $0 < |x - x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow$

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f' < 0 \text{ en } (x_0 - \delta_1, x_0) \\ f' > 0 \text{ en } (x_0, x_0 + \delta_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ es estrictamente decreciente en } (x_0 - \delta_1, x_0] \\ f \text{ --- --- ---, creciente en } [x_0, x_0 + \delta_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$ si $0 < |x - x_0| < \delta_1$,

lo cual contradice que x_0 sea un máximo local.

Por tanto, en un máximo local, si $\exists f''(x_0)$, $f''(x_0) \leq 0$.

iii) Si $\exists f''(x_0) < 0$ (con $f'(x_0) = 0$), razonando como en i), $\exists \delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ es estrictamente creciente en } (x_0 - \delta_0, x_0] \\ f \text{ ——— — decreciente en } [x_0, x_0 + \delta_0) \end{cases}$$

Según i) $\Rightarrow x_0$ es máximo local estricto de f.

Polinomio de Taylor y serie de Taylor

$f: (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con

rotonu r

sea k (número de derivadas). Para ello, introducimos la siguiente:

Def 2: El polinomio de Taylor de f, centrado en a y de grado k es $P^k_a(f)(x)$ (ó $P_k(x)$):

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \ ; \ f^{(0)}(a) \equiv f(a).$$

Queremos ver diversas versiones de resultados que vienen a precisar de qué modo estos polinomios aproximan localmente a f con precisión creciente (según k)

Prop 8: Si $k \geq 1$ es un entero y $f : (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ tiene k derivadas en $x = a$ $(a \in (c,d))$, hay una función $h_k : (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = P^k_a(f)(x) + h_k(x)(x-a)^k \qquad (*).$$

$f(x) - P^k_a(f)(x)$ se ...

Dem: Escribiendo $P_k(x)$ por $P_a^k(f)(x)$, tenemos:

- Caso $k=1$:

$$f(x) - P_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \text{ y}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_1(x)}{x-a} = 0,$$ según una caracterización de que exista $f'(a)$ (caracterización analítica de la derivada, tema 5)

- Caso $k > 1$:

El límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k}$ a $\frac{0}{0}$, y aplicando el Teorema de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{j f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-1}}{k(x-a)^{k-1}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-1)!}(x-a)^{j-1}}{k(x-a)^{k-1}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f')^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j}}{k(x-a)^{k-1}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a) - f^{(k)}(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

por el hecho de existir $f^{(k)}(a)$.

Por tanto, si escribimos $h_k(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k}, & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases}$,

$f(x) - P_k(x) = h_k(x)(x-a)^k$, siendo $h_k(x)$ una función que cumple que $\lim_{x\to a} h_k(x) = 0$.

<u>Obs</u>: Es habitual (notación de Landau), escribir

- $h(x) = o(1)$, $x \mapsto a$ si $\lim_{x\to a} h(x) = 0$
- $h(x) = O(1)$, $x \mapsto a$ si $\exists \delta > 0$ $\exists C > 0$ tal que si $|x-a| < \delta \Rightarrow |h(x)| \leq C$.

Entonces el Teorema de Taylor puede enunciarse como $f(x) - P_k(x) = o(1)(x-a)^k$, $x \mapsto a$

(que también se escribe como $f(x)-P_k(x) = o((x-a)^k)$, $x\to a$).

siendo polinomio P_k [illegible]

que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k} = 0$. Entonces $P_k(x) = P_a^k(f)(x)$.

<u>Dem</u>: - <u>Caso $k=1$</u>: Si $P_1(x) = \alpha + \beta(x-a)$ cumple

que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-P_1(x)}{x-a} = 0$, veamos que $\begin{cases} \alpha = f(a) \\ \beta = f'(a) \end{cases}$

Puesto que $\exists f'(a) \Rightarrow 0 = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x\to 0} \left[\frac{f(x)-\alpha-\beta(x-a)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} \right]$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(a)-\alpha + (f'(a)-\beta)(x-a)}{x-a}.$$

- Si $f(a)-\alpha \neq 0$, como $\lim\limits_{x\to a+} \frac{1}{x-a} = \infty$

$$\Rightarrow \left| \lim_{x\to a} \frac{f(a)-\alpha + (f'(b)-\beta)(x-c)}{x-a} \right| = \infty \text{ (Contradicción)}$$

Por tanto, $0 = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f'(c)-\beta)(x-\beta)}{x-\beta} = f'(a)-\beta$

$\lim \frac{f(x)}{(x-a)^k} = 0$, ... $\lim\limits_{x\to a}$ ... $(x-a)^k$

Un razonamiento similar al hecho para $k=1$ proporciona que si $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j (x-a)^j$,

$\alpha_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$, $j=0,\dots,k$ (omito los detalles) $\boxtimes$

Prop 10 (Formas de Lagrange y Cauchy del resto).

Consideremos $f:(c,d) \longmapsto \mathbb{R}$ una función con $k+1$ derivadas en $x=a \in (c,d)$ y supongamos $x \in (c,d)$. Entonces si $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$ ($P_k(x) = P_a^k(f)(x)$), se cumple:

i) $\exists\ \xi$ entre x y a (esto es, $\xi \in (x,a)$ si $x<a$ y $\xi \in (a,x)$ si $a<x$) tal que

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$ (forma de Lagrange del resto).

ii) $\exists\ \eta$ entre x y a tal que

$f^{(k+1)}(\eta)$ ...

veremos una fórmula integral para el resto

Dem: • Consideremos $G : (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ función derivable en (c,d) con $G'(x) \neq 0$ si $x \neq a$.

• Consideremos asimismo, para un $x \in (c,d)$ fijo, la función $F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(k)}(t)}{k}(x-t)^k$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

• Entonces $F'(t) = f'(t) + \left(f''(t)(x-t) - f'(t)\right)$

$$+ \left(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)\right)$$

$$\vdots$$

(Suma telescópica)

$$+ \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \qquad (1).$$

Usando (1) y el Teorema del Valor Medio de Cauchy,

$\exists\, \xi$ entre a y x con

$$F'(\xi) \quad F(x) - F(a) \quad f(x) - P_k(x) \quad R_k(x)$$

• Eligiendo $G(t) = (x-t)^{k+1}$,

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k \, \frac{0-(x-a)^{k+1}}{-(k+1)(x-\xi)^k}$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$ que es

la forma de Lagrange del resto.

• Eligiendo $G(t) = t-a$,

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k (x-a),$$ que es la

forma de Cauchy del resto

Def 3: Sea $f: (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ que tiene derivadas de todos los órdenes $(k=1,2,\ldots)$. Entonces a la en $x=a \in (c,d)$. serie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se

pno...

i) ¿Hay algún $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, $S(x)$ converge?

ii) Supuesto que la respuesta en i) es positiva, ¿es $S(x) = f(x)$ si $|x-a| < \delta$?

Puesto que, para un $k = 1, 2$ cualquiera, podemos considerar $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$, con $P_k(x) = P_a^k(f)(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

y tenemos las expresiones para $R_k(x)$ que da la Prop 10 (y otra integral que veremos más adelante), si somos capaces de probar que existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow R_k(x) \to 0, k \to \infty$, entonces respondemos afirmativamente a i) e ii) y entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ si $|x-a| < \delta$.

- Ejemplo 1): Sabemos que si $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es una serie absolutamente convergente cuya suma es $\dfrac{1}{1-x}$, luego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es la serie de Taylor de $\overbrace{f(x)}^{\text{centrada en } x=0} = \dfrac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$

(para esta función $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = \cancel{}\ 2(1-x)^{-3} \rightarrow f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \ \forall k$, y la serie de Taylor de f, centrada en $x=0$ será

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- Ejemplo 2) Sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, luego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la serie de Taylor, centrada en $x=0$, de e^x.

$S(x)$, centrada en $x=0$ sería $\sum \ldots \frac{}{n!} \ldots$ $n=0$.

- <u>Ejemplo 4)</u> Sabemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

- $$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

y entonces las series arriba son las series de Taylor, centradas en $x=0$ de esas funciones

(de nuevo, tales series pueden obtenerse sabiendo que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ con $\left| \begin{array}{l} \operatorname{sen} 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \end{array} \right.$)

- <u>Ejemplo 5</u>: Sea $f(x) = \log(1+x)$,

y consideramos su serie de Taylor centrada en $x=0$.

- $f(0) = 0$. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $f'(0) = 1$,

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$; $f''(0) = -1$.

$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$; $f^{(3)}(0) = -2!$

$\ldots \quad k-1 \quad \ldots \quad -k \; ; \; f^{(k)}(\ldots) \quad (-1)^{k-1}(k-1)!$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + -$$

–. Veamos que para $0 \leq x \leq 1$, $S(x) = \log(1+x)$;

<u>Dem</u>: Sea $R_k = \log(1+x) - P_k(x)$ (para $x \in [0,1]$ fijo). Entonces, según la fórmula de Lagrange del resto, $\exists\, \xi \in (0,x)$ tal que

$$R_k = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\, x^{k+1} \qquad (1)$$

A priori, tal ξ depende tanto de x como de k, pero como ignoramos cuál es ξ, más allá del hecho de que $\xi \in (0,x)$, lo que hacemos es <u>maximizar</u>

$$\left| \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\, x^{k+1} \right|, \quad \xi \in (0,x):$$

$$f^{(k+1)}(\xi) = (-1)^k\, k!\, (1+\xi)^{-k-1}$$

$$\Rightarrow \left| f^{(k+1)}(\xi) \right| \leq k!, \text{ si } \xi \geq 0 \qquad (2).$$

Usando (1) y (2), $|R_k| \leq \dfrac{k!}{(k+1)!}\, x^{k+1} = \dfrac{x^{k+1}}{k}$ (3).

... $R_k \longrightarrow 0$ "con velocidad ...

luego $\log 2 = \lim_{k \to \infty} P_k(1) = \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{3}$ ... $\blacksquare$

Obs: Puede probarse, que de hecho

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n , \quad -1 < x \leq 1,$$

aunque la prueba es más difícil (puede hacerse con la Fórmula Integral del resto, que veremos en el próximo capítulo)