BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL.

TEMA 6

FORMAS CUADRÁTICAS

SOLUCIÓN EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indicar cuales de las siguientes aplicaciones son formas cuadráticas de $\mathbb{R}^n$

(a) $Q(x,y)=2x+xy$

Solución: 2x no es un término de orden 2 $\Rightarrow$ No es FC

(b) $Q(x,y)=x^2+xy+y$

Solución: y no es un término de orden 2 $\Rightarrow$ No es FC

(c) $Q(x,y)=x^2-2xy-3y^2$

Solución: Sí es FC

(d) $Q(x,y,z)=x^3-2xyz+3yz$

Solución: xyz es un término de orden 3 $\Rightarrow$ No es FC

(e) $Q(x,y,z)=-2x^2-xy-4yz+2z^2$

Solución: sí es FC

(f) $Q(x,y,z)=5x^2-2xy^2+3y^2x+2z^2+xz$

Solución: $-2xy^2$, $3yx^2$ son términos de orden 3 $\Rightarrow$ No es FC

(g) $Q(x,y,z,t)=xyzt$

Solución: xyzt es un término de orden 4 $\Rightarrow$ No es FC

(h) $Q(x,y,z,t)=5x^2-2y^2-3z^2+5t^2$

Solución: sí es FC

(i) $Q(x,y,z,t)=-x^2+3xy-2y^2-6xt+3z^2-2zt+yt$

Solución: sí es FC

2. Determinar la matriz simétrica asociada a cada una de las siguientes formas cuadráticas:

(a) $Q(x,y)=x^2-xy+2y^2$

Solución: $A=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 2\end{pmatrix}$

(b) $Q(x,y)=xy$

Solución: $A=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$

(c) $Q(x,y,z)=-2x^2+2y^2-2z^2-3xy+4yz+xz$

Solución: $A = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 9xy + 10xz$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4{,}5 & 5 \\ -4{,}5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $Q(x,y,z,t) = -x^2 + 3xy - 2y^2 - 6xt + 3z^2 - 2zt + yt$

Solución: $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & -2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $Q(x,y,z,t) = 3xy - 6xz + 3xt + 4yz - 2yt + zt$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -3 & 3/2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

3. Determinar la expresión polinómica de cada una de las formas cuadráticas definidas por las siguientes matrices simétricas

La expresión polinómica es de la forma: $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Q(x, y) = x^2 -2xy

(b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Solución: Q(x, y) = -2x^2 + 3y^2 +18xy

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Q(x, y, z) = 2xy + 4xz + 6yz

(d) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$

Solución: Q(x, y, z) = -3z^2+ 4xz + 5yz

(e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: Q(x, y, z, t) = $2x^2-2y^2+2z^2-2t^2$

4. Estudiar el signo de las siguientes formas cuadráticas mediante el método de los autovalores.

(a) $Q(x,y) = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

Solución:

$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I)=(9-\lambda)(4-\lambda)-36=\lambda^2-13\lambda=0;$

$\lambda=0$ y $\lambda=13 \Rightarrow$ SDP

(b) $Q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2$

Solución:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = (\lambda^2-3\lambda)(1-\lambda)=0;$

$\lambda=0$, $\lambda=1$ y $\lambda=3$ $\Rightarrow$ SDP

5. Estudiar el signo de las formas cuadráticas asociadas a las siguientes matrices simétricas mediante el método de los autovalores.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

$\det(A-\lambda I)=(-1-\lambda)(-2-\lambda)-1/4=\lambda^2+3\lambda+7/8=0;$

$\lambda = \frac{-3-\sqrt{11/2}}{2} < 0$ y $\lambda = \frac{-3+\sqrt{11/2}}{2} < 0 \Rightarrow$ DN

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$\det(A-\lambda I)= =(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0;$

$\lambda=1$ y $\lambda=10 \Rightarrow$ DP

6. Comprobar, si es posible, el signo de las formas cuadráticas del 4 mediante el método de los menores principales

(a) $Q(x,y)=9x^2-12xy+4y^2$

Solución:

$A_1=9>0$; $A_2=0 \Rightarrow$ SDP

(b) $Q(x,y,z)=x^2-2xy+2y^2-2yz+z^2$

Solución:

$A_1=1>0$; $A_2=1>0$; $A_3=0 \Rightarrow$ SDP

7. Estudiar el signo de las siguientes formas cuadráticas mediante el método de los menores principales.

(a) $Q(x,y)=-3x^2+2xy-4y^2$

Solución:

$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$

$A_1=-3<0$; $A_2=11>0 \Rightarrow$ DN

(b) $Q(x,y)=3x^2+8xy+2y^2$

Solución:

$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

$A_1=3>0$; $A_2=-10<0 \Rightarrow$ Ind

(c) $Q(x,y,z)=-x^2+3y^2+2z^2-2xy+4xz$

Solución:

$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$A_1=-1<0$; $A_2=-4<0$; $A_3=-24<0 \Rightarrow$ Ind

8. Estudiar el signo de la forma cuadrática asociada a la siguiente matriz simétrica mediante el método de los menores principales. $\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 11\end{pmatrix}$

Solución:

$A_1=5>0$; $A_2=1>0$; $A_3=1>0 \Rightarrow$ DP

9. Dada la siguiente matriz simétrica, determinar su signo según los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$[1]

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Solución:

$A_1 = -7 < 0$; $A_2 = 13 > 0$; $A_3 = 2a^2+26a = 0$ si $a = 0$ y $a = -13$

$Si \quad a < -13 \quad A_3 > 0 \quad \Rightarrow \text{Ind}$
$Si \quad a = -13 \quad A_3 = 0 \quad \Rightarrow \text{SDN}$
$Si \; -13 < a < 0 \quad A_3 < 0 \quad \Rightarrow \text{DN}$ $\Rightarrow$ DN para cualquier valor de a
$Si \quad a = 0 \quad A_3 = 0 \quad \Rightarrow \text{SDN}$
$Si \quad a > 0 \quad A_3 > 0 \quad \Rightarrow \text{Ind}$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la forma cuadrática $Q(x,y,z)$

(a) Calcule la forma polinómica de la forma cuadrática.

Solución:

$$Q(x,y,z) = 4y^2 + z^2 - 2xz$$

(b) Calcule el signo de la forma cuadrática mediante el método de los autovalores.

Solución:

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(1-\lambda) - (4-\lambda)$$

Calculamos las raíces del polinomio:

[1] Aplicar el método de los menores principales.

$$-\lambda(4-\lambda)(1-\lambda)-(4-\lambda)=0$$

$$(4-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)-1\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} 4-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=4 \\ \lambda^2-\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{+1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} \lambda=\dfrac{+1+\sqrt{5}}{2}=1,618 \\ \lambda=\dfrac{+1-\sqrt{5}}{2}=-0,618 \end{cases} \end{cases}$$

Dado que los autovalores son $\lambda=4>0, \lambda=1,618>0, \lambda=-0,618<0$, la forma cuadrática es indefinida

11. Sea la siguiente forma cuadrática

$$Q(x,y,z,t)=-4x^2-2y^2-5z^2-6t^2+4xt+6yz+2yt$$

(a) Calcule la matriz asociada a la forma cuadrática.

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Calcule el signo de la forma cuadrática mediante los menores principales.

Solución:

Calculamos los cuatro menores principales:

$$A_1=-4<0$$

$$A_2=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=8>0$$

$$A_3=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}=-4<0$$

$$A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}=0$$

Dado que los menores alternan de signo, comenzando por negativo ($A_1<0$) y el último es nulo ($A_4=0$) entonces la forma cuadrática es semidefinida negativa.

12. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la forma cuadrática $Q(x, y, z)$

(a) Calcule el valor del parámetro *a* para que se verifique que $Q(1,-2,1) = -8$

Solución:

$$Q(1,-2,1) = (1 \ \ -2 \ \ 1)\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4a - 9$$

Igualando la expresión a -8 calculamos el valor del parámetro para que se verifique: $Q(1,-2,1) = -8$:

$$-8 = Q(1,-2,1) = -4a - 9$$

$$-8 = -4a - 9$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

(b) Estudie el signo de la forma cuadrática.

Solución:

$A_1 = -4 < 0$

$A_2 = 3 > 0$

$A_3 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2 = 0 \ si \ a = -\frac{1}{2}$

Por tanto:

Si $a = -\frac{1}{2}$, $A_3 = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{SDN}$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, $A_3 > 0 \quad \Rightarrow \mathrm{IND}$