BLOQUE III: CÁLCULO DIFERENCIAL.

TEMA 7

DERIVADAS DE FUNCIONAES DE VARIAS VARIABLES.

RESUMEN TEÓRICO

1. DERIVADAS DIRECCIONALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Para funciones de varias variables el concepto de derivada en un punto podemos definirlo no de forma general o única, sino para cada una de las direcciones (según un vector) en dicho punto. Cada una de estas derivadas direccionales nos permitirá el estudio del comportamiento de la función en dicha dirección (monotonía y convexidad).

1.1. Derivadas direccionales

DEFINICION 1. Dada una función de varias variables, $f(\overline{x}) = f(x_1,...,x_n)$ y $\overline{x}_0$ un punto de su dominio, denominaremos derivada según el vector $\overline{v}$ en el punto $\overline{x}_0$ al siguiente limite:

$$f_v'(\overline{x}_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + \lambda \overline{v}) - f(\overline{x}_0)}{\lambda}$$

Si el límite anterior existe y es finito diremos que la función es derivable en el punto $\overline{x}_0$ y según la dirección del vector $\overline{v}$.

PROPIEDAD 1. Dada una función de varias variables, $f(\overline{x})$, derivable en un punto $\overline{x}_0$ y según la dirección del vector $\overline{v}$ se verifica que:

a) Si $f_v'(\bar{x}_0) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en la dirección del vector $\overline{v}$ en el punto $\overline{x}_0$ (la función restringida en dicha dirección es creciente en la vecindad del punto).

b) Si $f_v'(\bar{x}_0) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en la dirección del vector $\overline{v}$ en el punto $\overline{x}_0$ (la función restringida en dicha dirección es decreciente en una vecindad del punto)

DEFINICION 2. (función derivada según un vector): Dada una función f derivable según el vector $\overline{v}$ en todos los puntos de su dominio, denominaremos *función derivada de* f según el vector $\overline{v}$ a la función que asigna a cada valor de la variable su derivada según dicho vector.

$$f_v' : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \to f_v'(\bar{x})$$

1.2. Gradiente de una función. Derivadas parciales.

DEFINICION 3. (Derivada parcial). Dada una función de varias variables, $f(x_1,...,x_n)$ denominaremos derivada parcial respecto de la variable x_i en un punto a la derivada según el vector de la base canónica $e_i=(0,...0,\underset{i}{1},0,...0)$ y lo denotaremos $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=f'_{e_i}(\overline{x}_0)$$

Observación: Debemos notar que al considerar la dirección del vector canónico e_i estamos considerando que las variaciones únicamente se producen en la variable x_i manteniéndose constante las demás variables. Por tanto para el cálculo de la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ podemos aplicar las reglas de derivación de una variable, considerando como variable a la variable x_i y constantes las demás variables.

DEFINICION 4. (vector gradiente). Dada una función de n variables, $f(x_1,...,x_n)$ denominaremos vector gradiente en un punto al vector formado por las n derivadas parciales de la función en dicho punto y denotaremos por $\nabla f(x_0)$

$$\nabla f(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

EJEMPLO 1. Calcular el gradiente en el punto de (-1,1,1) de la siguiente función:

$$f(x,y,z)=xy+e^{x/z}+\sqrt{yz}$$

Calculo de la derivada parcial respecto a la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+\frac{1}{z}e^{x/z}=(simplicando)=y+\frac{1}{z}e^{x/z}$$

Calculo de la derivada parcial respecto a la variable y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{z}{2\sqrt{yz}}=(simplicando)=x+\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{y}}$$

Calculo de la derivada parcial respecto a la variable z

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{z^2}e^{x/z}+\frac{y}{2\sqrt{yz}}=(simplicando)=-\frac{x}{z^2}e^{x/z}+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{z}}$$

Particularizando en el punto (-1,1,1), obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,1) = 1 + e^{-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(-1,1,1) = -e^{-1} + \frac{1}{2}$$

Por tanto el gradiente de la función en el punto (-1,1,1) es

$$\nabla f(-1,1,1) = \left(1 + e^{-1}, -1/2, 1/2 - e^{-1}\right)$$

EJEMPLO 2. Calcular el gradiente de la siguiente función:

$$f(x, y) = x^y$$

Calculo de la derivada parcial respecto a la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$

Calculo de la derivada parcial respecto a la variable y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y Lx$$

El gradiente de la función para un punto genérico (x, y) es

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(yx^{y-1}, x^y Lx\right)$$

1.3. Derivadas direccionales segundas

DEFINICION 5. Dada una función de varias variables, $f(x_1,...,x_n) = f(\overline{x})$ y $\overline{x}_0$ un punto de su dominio, denominaremos derivada segunda según el vector $\overline{v}$ a la derivada según el vector $\overline{v}$ de función derivada según el vector $\overline{v}$.

$$f_v''(\overline{x}_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_v'(\overline{x}_0 + \lambda \overline{v}) - f_v'(\overline{x}_0)}{\lambda}$$

Si el límite anterior existe y es finito diremos que la función es derivable dos veces en el punto $\overline{x}_0$ y según la dirección del vector $\overline{v}$.

PROPIEDAD 2. Dada una función de varias variables $f(\overline{x})$ derivable dos veces según el vector $\overline{v}$ en un punto x_0 se verifica que:

a) Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ la función f es convexa en x_0 en la dirección del vector $\overline{v}$

b) Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ la función f es cóncava en x_0 en la dirección del vector $\overline{v}$

1.4. Matriz Hessiana de una función. Derivadas parciales segundas.

DEFINICION 6. (Derivada parcial segunda). Dada una función de varias variables, $f(x_1,...,x_n)$ denominaremos derivada parcial segunda respecto de las variable x_i y x_j en un punto a la derivada parcial respecto a x_i de la función derivada parcial respecto de x_j y denotaremos por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$. Esto es,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

Observación: Para el cálculo de las derivadas parciales segundas únicamente tenemos que derivar dos veces la función. En primer lugar, considerando como variable a x_i y el resto constante y posteriormente la funcion obtenida derivarla considerando variable a x_j y el resto constante.

Debemos notar que para una función de n variables existen n^2 derivadas parciales segundas.

DEFINICION 7. (Matriz Hessiana). Dada una función de n variables, $f(x_1,...,x_n)$ denominaremos matriz hessiana en un punto a la matriz cuadrada de orden n formada por las derivadas parciales segundas de la función en dicho punto y denotaremos por $Hf(x_0)$.

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Observación: Nótese que cada una de las filas de la matriz hessiana es el vector gradiente de la función derivada parcial respecto a cada una de la variables,

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0), \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) \right)$$

EJEMPLO 3. Calcular el matriz Hessiana en el punto (-1,1,1) de la siguiente función.

$$f(x, y, z) = xy + e^{x/z}$$

Calculemos las derivadas segundas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{z}e^{x/z} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{z^2}e^{x/z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{-1}{z^2}e^{x/z} - \dfrac{1}{z}\dfrac{x}{z^2}e^{x/z} = \left(\dfrac{-1}{z^2} - \dfrac{x}{z^3}\right)e^{x/z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x}{z^2}e^{x/z} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{-1}{z^2}e^{x/z} - \dfrac{x}{z^2}\dfrac{1}{z}e^{x/z} = \left(\dfrac{-1}{z^2} - \dfrac{x}{z^3}\right)e^{x/z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{2xz}{z^4}e^{x/z} + \dfrac{x}{z^2}\dfrac{x}{z^2}e^{x/z} = \left(\dfrac{2x}{z^3} + \dfrac{x^2}{z^4}\right)e^{x/z} \end{cases}$$

Particularizando en el punto (-1,1,1).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-1} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = (-1+1)e^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(-1,1,1) = (-1+1)e^{-1} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1,1,1) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (-2+1)e^{-1} = -e^{-1}$$

La matriz Hessiana en el punto (-1,1,1) es:

$$Hf=\begin{pmatrix} e^{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-1} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Calcular el matriz Hessiana de la siguiente función.

$$f(x,y)=x^{y}$$

Calculemos las derivadas segundas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=x^{y-1}+yx^{y-1}Lx\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{y}Lx\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}Lx+x^{y}\dfrac{1}{x}=yx^{y-1}Lx+x^{y-1}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=xy(Lx)^2\end{cases}$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf=\begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}+yx^{y-1}Lx \\ yx^{y-1}Lx+x^{y-1} & xy(Lx)^2 \end{pmatrix}$$

2. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO EN FUNCIONES DIFERENCIABLES

2.1 **Aproximación al concepto de Diferenciabilidad**.

En la función real de una variable $y = f(x)$ el entorno de un punto $x = a$ tiene puntos solamente en una dirección y por ello lleva asociada una única derivada de cada orden. Los signos de estas derivadas $\left(f'(a), f''(a), \ldots\right)$ nos informan del comportamiento de la función en ese punto. Es decir, basta con que la función sea derivable para conocer su comportamiento.

En la función real de varias variables $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ el entorno de un punto $x = a$ tiene puntos en todas las direcciones, por lo que la función llevará asociadas infinitas derivadas de cada orden. Ante la imposibilidad de calcular infinitas derivadas, el hecho de ser derivable (que existan las infinitas derivadas) no es suficiente para estudiar el comportamiento de la función. Necesitamos otro requisito, la **diferenciabilidad.**

Este concepto es una extensión del de función derivable. En esencia, una función diferenciable admite derivadas primeras en cualquier dirección y puede aproximarse al menos hasta primer orden mediante una aplicación lineal.

Esto se traduce, en conceptos de los que nosotros hemos estudiado, en que para ser diferenciable, la función ha de ser continua y todas sus funciones derivadas parciales deben existir y ser continuas a su vez.

¿Qué funciones conocemos diferenciables? La mayoría de las que trabajamos lo son: Polinomios, Exponenciales de Polinomios, Cocientes de polinomios (donde el denominador no sea cero), raíces y logaritmos de polinomios (donde el redicando sea estrictamente positivo)…

2.2 Propiedades de las funciones diferenciables.

Las funciones de varias variables que son diferenciables cumplen una serie de propiedades. Para nosotros la más importante es la siguiente:

PROPIEDAD 1: *Dada una función $f(\overline{x})$ diferenciable en un punto x_0 y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se verifica que:*

$$f'_v(\overline{x}_0) = \nabla f(x_0) \cdot \overline{v}$$

es decir,

$$f_v'(\overline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \cdot \overline{v}$$

$$f_v'(\overline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot v_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot v_n$$

siendo $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$

Observaciones:

- ✓ Si la función es diferenciable el cálculo de las derivadas direccionales se reduce al cálculo de las derivadas parciales, multiplicadas por las coordenadas del vector.
- ✓ Para funciones de dos variables, la diferenciabilidad en un punto implica gráficamente que las rectas tangentes en dichos puntos son coplanarias (pertenecen a un mismo plano). Dicho plano podríamos generarlo utilizando las derivadas parciales.

Propiedad 2: Si *f* es diferenciable y sus derivadas primeras son diferenciables diremos que *f* es dos veces diferenciable y se verifica que

$$\forall v \in \mathbf{R}^n, \ \exists \ f_v''(a) = v^t \cdot Hf(a) \cdot v = \left(v_1 \ v_2 \cdots v_n\right) \cdot Hf(a) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5. Calcular la derivada en el punto (2,1) según el vector (1,-1) de la función[1] $f(x, y) = xy$

Calculemos el gradiente de la función en el punto (2,1)

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = x \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla f = (y, x)$$

Sustituyendo en el punto (2,1):

$$\nabla f(2,1) = (1, 2)$$

Teniendo en cuenta la propiedad anterior:

---

[1] Las funciones de los ejemplos de este resumen supondremos que son diferenciables en todos los puntos sin necesidad de demostrarlo.

$$f_v'(\overline{x}_0) = \nabla f(x_0)\cdot \overline{v}$$

$$f_{(1,-1)}'(2,1) = (1,2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1-2 = -1$$

EJEMPLO 6. Estudiar el comportamiento local de la función $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{x+y}$ en el punto (1,1) en la dirección del vector (2,1)

Calculemos el gradiente de la función:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2(x+y)-(2x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{3y}{(x+y)^2}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-(x+y)-(2x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{-3x}{(x+y)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f = \left(\dfrac{3y}{(x+y)^2}, \dfrac{-3x}{(x+y)^2}\right)$$

Sustituyendo en el punto (1,1):

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{3}{4},\frac{-3}{4}\right)$$

La derivada según el vector (2,1) en punto (1,1) es:

$$f_{(2,1)}'(1,1) = \left(\frac{3}{4},\frac{-3}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{6}{4}-\frac{3}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

La función en el punto (1,1) y en la dirección del vector (2,1) es creciente

EJEMPLO 3 Sea la función dos veces diferenciable $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2(x_2-x_3)$. Estudiaremos el comportamiento y la tendencia local de la función en el punto $a=(1{,}1{,}1)$ en la dirección $v=(1{,}2{,}3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = 2x_1(x_2-x_3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2$$

$\Rightarrow \nabla f(a) = (0\,1\,-1) \Rightarrow f'_v(a) = \nabla f(a)\cdot v = (0\,1\,-1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow$ Comportamiento decreciente.

$$Hf(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix}2(x_2-x_3) & 2x_1 & -2x_1\\ 2x_1 & 0 & 0\\ -2x_1 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1{,}1{,}1) = \begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$f_v''(a) = v^t \cdot Hf(a) \cdot v = (1\,2\,3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$$ Tendencia acelerada.