**BLOQUE III: CÁLCULO INTEGRAL.**

# TEMA 8_2
# INTEGRAL DEFINIDA.
# CÁLCULO DE ÁREAS

RESUMEN TEÓRICO

**1. Integral Definida**

Sea una función $f(x)$: $[a,b] \to R$ acotada y no negativa. Nos proponemos determinar el valor del **área** limitada por $f(x)$ y el eje de abscisas entre dos puntos a y b,

**Definición 1:**

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se definen el supremo y el ínfimo de $A$, como

$\sup(A) = \min\{x \in \mathbb{R} : x \geq a \ \forall\, a \in A\}$

$\inf(A) = \max\{x \in \mathbb{R} : x \leq a \ \forall\, a \in A\}$

Ejemplo $Sea\ A = (a,b) \quad \sup(A) = b \quad \inf(A) = a$

**Definición 2:**

Una partición ($P_n$) del intervalo $[a,b]$ es un conjunto de puntos $x_0, x_1, x_2, \dots . x_n \in [a,b]$, tales que:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots . < x_n = b\}$$

**Definición 3**

Una Partición ($P_{n+k}$) se dice que es *más fina* que ($P_n$) si contiene a todos los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots . x_n$ de ($P_n$) (y algunos (k) ptos más).

**Definición 4**

Se denomina diámetro de una partición al máximo (supremo) de las longitudes de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$.definidos por la partición

$D(P_n) = \sup\{x_i - x_{i-1}\}$

**Definición 5 (sumas de Riemann):**

Consideremos los supremos e ínfimos de $f$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.definido por la partición

$$\left. \begin{array}{l} M_i = Sup\left\{ f(x) / x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]\right\} \\ m_i = Inf\left\{ f(x) / x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]\right\} \end{array} \right| i = 1, 2, \dots, n$$

Denominamos suma superior (de Riemann) a

$$S(P, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

y suma inferior (de Riemann) a

$$s(P, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

**La sumas de Riemann** Son aproximaciones por exceso o por defecto al valor del área buscada

**Observación 1:**

$$s(P, f(x)) \leq S(P, f(x))$$

**Observación 2**

Dadas dos particiones P y Q, si P es más fina que Q :

$$s(Q, f(x)) \leq s(P, f(x)) \leq Área(S) \leq S(P, f(x)) \leq S(Q, f(x)$$

La aproximación al valor del área es mejor cuanto más fina es la partición.

**Definición 6**

Se dice que $f$ es integrable en [a, b] si para cualquier secuencia de particiones $\mathrm{P}_n$ : $\mathrm{D}(\mathrm{P}_n) \longrightarrow 0$

$$\lim_n s(\mathrm{P}_n, f) = \lim_n S(\mathrm{P}_n, f) = S$$

A este límite le llamamos Integral de f(x) entre a y b.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ o tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ y es acotada entonces es integrable

**Propiedades**

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\ dx = k\ (b-a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$a < c < b$;

**Teorema fundamental del cálculo**

Sea $f(x): R \to R$, continua en $[a, b]$

Se define $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \quad t \in (a, b]$. Entonces:

$F(x)$ es derivable y $F'(x) = \mathrm{f(x)}$

**Regla De Barrow**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

.

**EJEMPLO 1.** CALCULAR $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = L(x^2+1) \Big]_{x=0}^{x=1} = L(2) - L(1) = L(2)$

## 2. Métodos de Integración

### Integración por partes

El intervalo de integración afecta también a primer término, es decir:

$$\int_a^b u\,dv = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b v\,du$$

**EJEMPLO 2.** Calcular

$\int_0^1 xe^{2x}\,dx$ $\qquad u = x \quad du = dx$

$$dv = e^{2x}dx \quad v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int_0^1 xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

### Cambio de variable

El método que conocemos nos permite obtener una primitiva tras efectuar un cambio de variable, habría que deshacer el cambio para obtener una primitiva sobre las variables originales y posteriormente aplicar la regla de Barrow. Lo habitual es adaptar el recinto de integración a las nuevas variables y aplicar directamente la regla de Barrow.

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$$

Si efectuamos el cambio $t = g(x) \quad dt = g'(x)dx \quad \begin{matrix} si\ x = a & t = g(a) \\ si\ x = b & t = g(b) \end{matrix}$

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Ejemplo

$\int_0^3 x \sqrt{x+1}\,dx \qquad x+1=t^2 \qquad dx=2tdt \qquad \begin{matrix} si\ x=0 & t=1 \\ si\ x=3 & t=2 \end{matrix}$

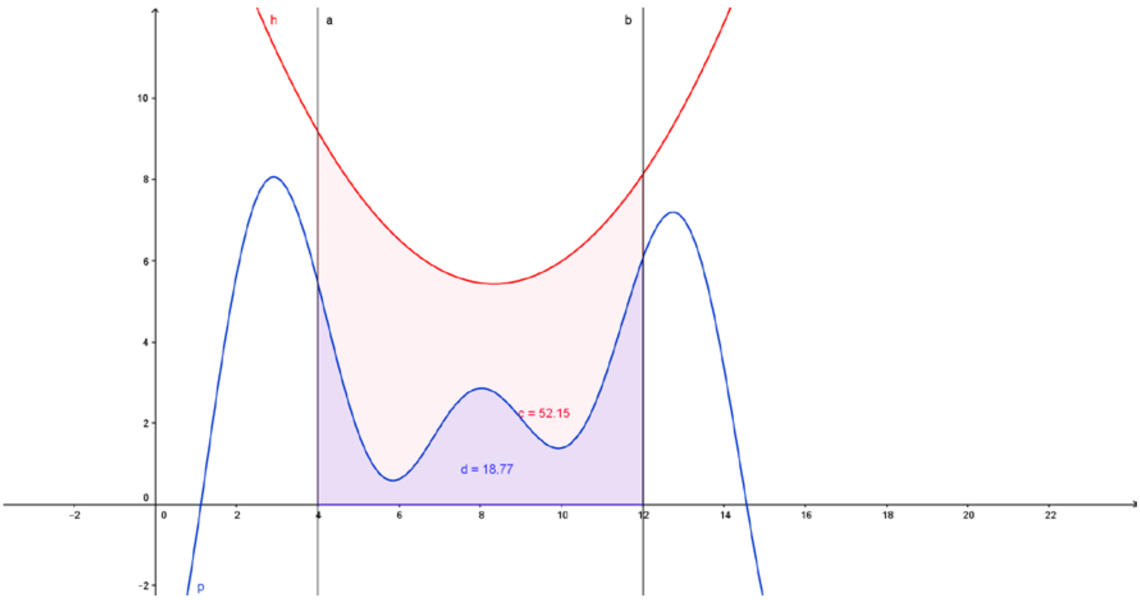
$$\int_0^3 x\ \sqrt{x+1}\,dx = \int_1^2 (t^2-1)t2tdt = \left.\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{2\cdot 2^5}{5}-\frac{2\cdot 2^3}{3}-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{116}{15}$$

## 3. Aplicaciones

### 3.1. Cálculo de áreas de recintos limitados por funciones

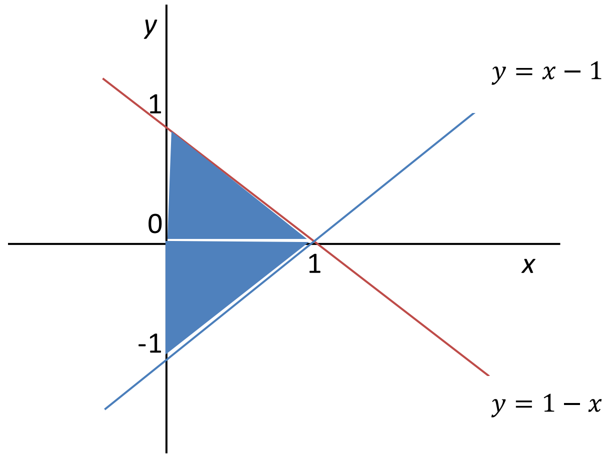
Si *f(x)* y *g(x)* son dos funciones continuas en [a, b] y g(x) □ f(x) □ x □ [a, b], entonces el área de la región limitada por las gráficas de f(x) y g(x) y las rectas *x □ a y x □ b es*

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$




**EJEMPLO 3.** Calcular el área del recinto limitado por las funciones $x+y=1$ , $x-y=1$ , $y=0$ , $x>0$

$$x+y=1 \quad \rightarrow \quad y=1-x$$
$$x-y=1 \quad \rightarrow \quad y=x-1$$




Área=$\int_0^1 (1-x)\,dx - \int_0^1 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$=1

También es posible calcular el área del siguiente modo:

Área=$2\int_0^1 (1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Es decir, calculando el área por encima del eje "*x*" y luego multiplicando por dos.

### 3.2. Funciones continuas de distribución de probabilidad

Una función continua y derivable F(x) se dice que es función de distribución de probabilidad si es monótona no decreciente y F(-∞) = 0 F(∞)=1.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} dF(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La función $f(x) = F'(x)$ se denomina función de densidad de probabilidad

$$P(a,b) = \int_a^b f(t)dt$$

**Ejemplo:**

Sea $f(x) = 2e^{-2x}$ $x > 0$ una función de densidad de probabilidad. Obtenga su función de distribución y calcule la probabilidad del intervalo (1,3).

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\Big]_{t=0}^{t=x} = -e^{-2x} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-2x}$ (x>0)

$$P(1,3) = \int_1^3 2e^{-2t}dt = F(3) - F(1) = e^{-2} - e^{-6}$$

## 4. Funciones Eulerianas

### 4.1. Función Gamma: $\Gamma : (0,+\infty) \rightarrow \Re$

Se define $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$ *. p>0*

Propiedades

1. Para cada $p > 1$, $\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$;

   Consecuencia:

   - $\Gamma(p) = (p-1)!$ si p es un número natural!

2. $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3. $\int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$ (a>0)

Ejemplos

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-4x} dx = \frac{\Gamma(3)}{4^3} = 2/64$$

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x^3} dx .$$

Para que esta integral represente una $\Gamma(p)$, es decir, para encontrar el valor de *p*, tenemos que hacer un cambio de variable:

$$x^3 = t \quad \rightarrow \quad x = t^{1/3} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} t^{\frac{1}{3}-1} dt = \frac{1}{3} t^{-2/3} dt$$

$$\int_0^{+\infty} x^{1/2} \cdot e^{-x^3} dx = \int_0^{+\infty} \left(t^{1/3}\right)^{1/2} \cdot e^{-t} \frac{1}{3} t^{-2/3} dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^{1/6} \cdot t^{-2/3} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3} .$$

**4.2. Función Beta:** $\beta:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\Re$

Se define $\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx$. $p>0$ y $q>0$,

Propiedades

1. Para cada $p,q>0$, $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

2. $\beta(p,1)=\dfrac{1}{p}$, $\beta(1,q)=\dfrac{1}{q}$, para cada $q>0$

3. $\beta(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

4. $\beta(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\beta(p,q)$

Ejemplos

$$\beta(\sqrt{2},1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta\left(\frac{1}{5},3\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{1}{5}+3\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\cdot 2!}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\cdot 2}{\frac{11}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}=\frac{125}{33}$$

$$\int_0^1\sqrt[5]{1-x}\cdot\sqrt[3]{x}\,dx=\int_0^1 x^{1/3}\cdot(1-x)^{1/5}dx=\beta\left(\frac{1}{3}+1,\frac{1}{5}+1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{38}{15}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{23}{15}\cdot\frac{8}{15}\cdot\Gamma\left(\frac{8}{15}\right)}$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^3}\,dx.$$

Para encontrar una $\beta(p,q)$, es decir, para hallar los valores de *p* y *q*, hacemos el cambio de variable:

$$1-x^3=1-t \quad \to \quad x^3=t \quad \to \quad x=t^{1/3} \quad \to \quad dx=\frac{1}{3}t^{-2/3}dt$$

$$\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{1/2}dx=\int_0^1 t\cdot(1-t)^{1/2}\cdot\frac{1}{3}t^{-2/3}dt=\frac{1}{3}\int_0^1 t^{1/3}\cdot(1-t)^{1/2}\,dt=\frac{1}{3}\beta\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{11}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$