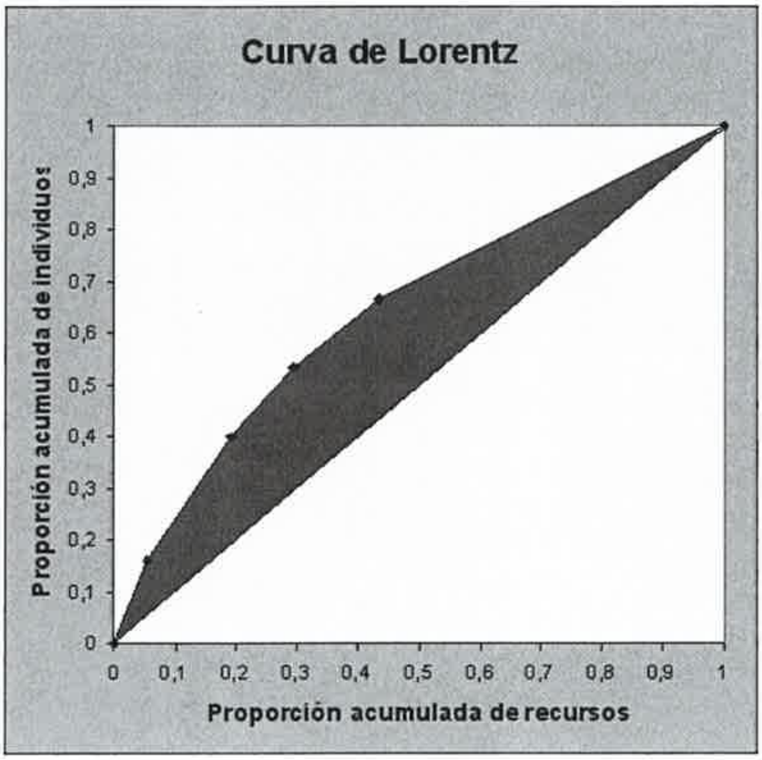
Ejemplo:
La siguiente tabla nos muestra el salario en miles de euros de las cinco categorías de ejecutivos de una multinacional

x_i	n_i
15	24
25	36
35	20
45	20
75	50
Total	150

Dibujar la curva de Lorentz y hallar el índice de concentración de Gini.
En primer lugar, rellenamos la tabla, añadiendo las columnas que necesitamos:

x_i	n_i	N_i	p_i	x_i*n_i	(xi*ni)↑	q_i
15	24	24	0,16	360	360	0,054
25	36	60	0,40	900	1260	0,191
35	20	80	0,53	700	1960	0,297
45	20	100	0,67	900	2860	0,433
75	50	150		3750	6610	
Total	150		1,76	6610	6610	0,974

Dibujamos la curva de Lorentz, uniendo los puntos (q_i, p_i)



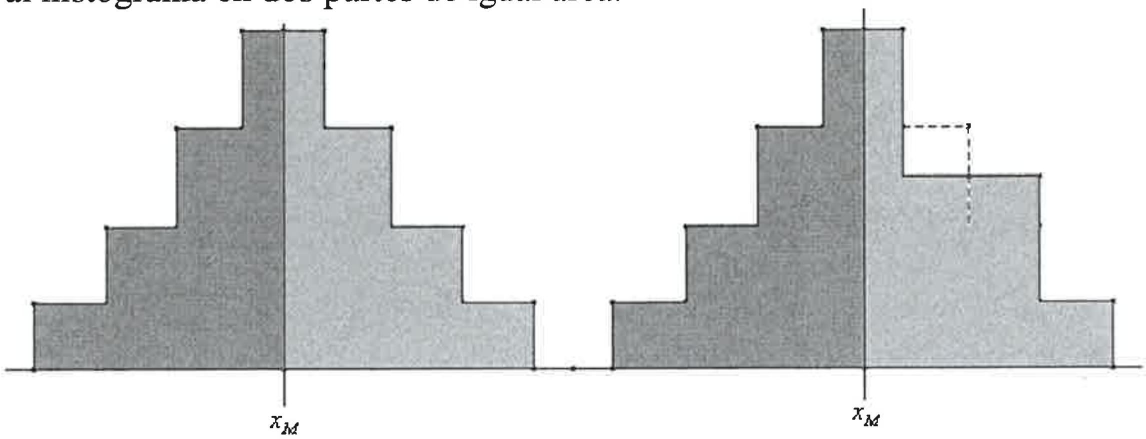
El índice de concentración de Gini

es: $$I_G = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} q_i}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i} = 1 - \frac{0,974}{1,76} = 0,446$$

Medidas de forma

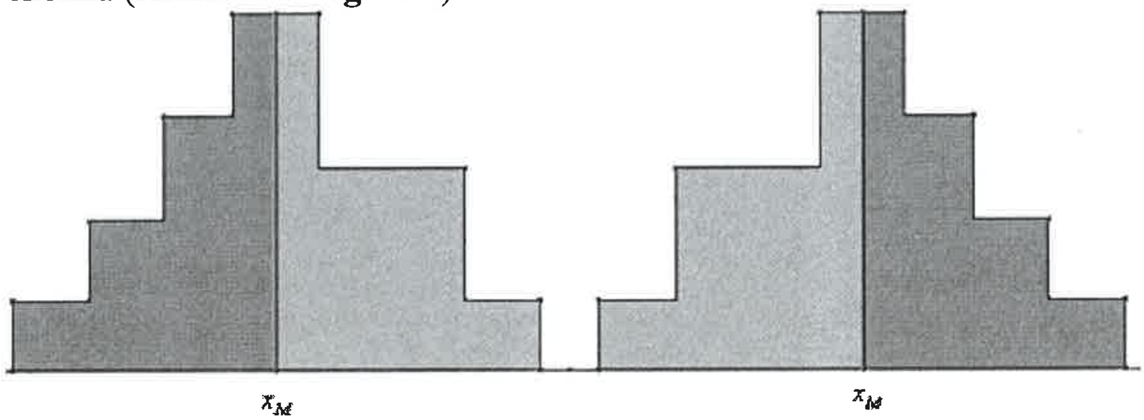
1.- Asimetría de una distribución

Según hemos visto, la mediana x_M de una distribución de frecuencias, divide al histograma en dos partes de igual área.



Distribución simétrica   Distribución asimétrica

Pero puede ocurrir, que una de las partes sea imagen especular de la otra, como ocurre en la figura de la izquierda, en cuyo caso diremos que la distribución es **simétrica**, o bien que no sea así, como en la figura de la derecha, y entonces diremos que es **asimétrica**.
Observamos que si la distribución es simétrica, la mediana coincide con la media, y con la moda si la distribución es unimodal.
En el caso de que la distribución sea asimétrica, distinguiremos entre las que dejan más modalidades, por debajo de la mediana que por encima de la misma (**Asimetría positiva**), y las que tienen menos modalidades por debajo que por encima (**Asimetría negativa**).



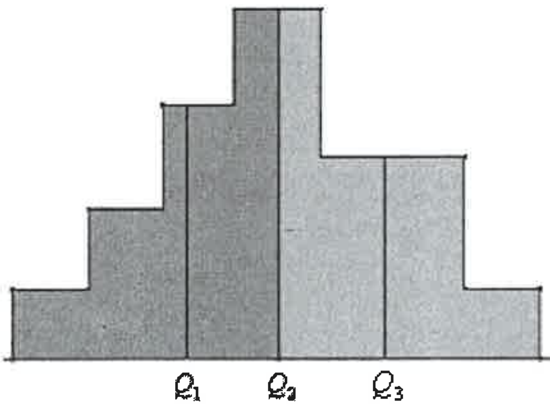
Asimetría positiva   **Asimetría negativa**

Ejemplo:
En un examen fácil, la mitad de los alumnos obtiene una calificación igual o mayor que 7. En este caso la puntuación mediana deja por encima menos puntuaciones que por debajo y la distribución de las puntuaciones es asimétrica negativa.

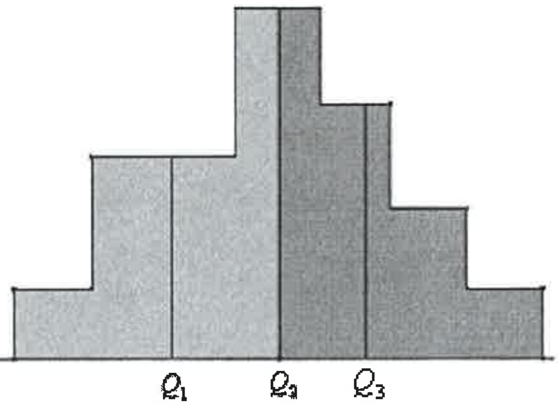
En un examen difícil, en que la mediana sea 3, hay más puntuaciones por encima que por debajo de la misma, y la distribución de las puntuaciones es asimétrica positiva.

2.- Coeficiente de asimetría de Bowley

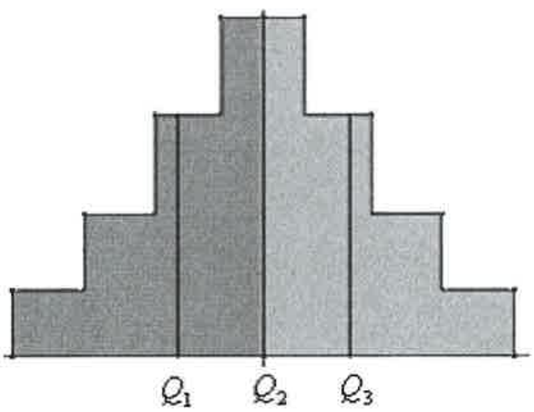
Observando la posición de los cuartiles, en las distintas distribuciones simétricas y asimétricas, obtuvo Bowley, el coeficiente que lleva su nombre, como medida del grado de asimetría de las distintas distribuciones. Para ello, se basó en lo siguiente:



Asimetría positiva



Asimetría negativa



Distribución simétrica

Si la distribución es simétrica $Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1$

Si es asimétrica negativa $Q_3 - Q_2 < Q_2 - Q_1$

Si es asimétrica positiva $Q_3 - Q_2 > Q_2 - Q_1$

Definimos el coeficiente de asimetría de Bowley:

$$A_B = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

Si la distribución es simétrica $A_B = 0$

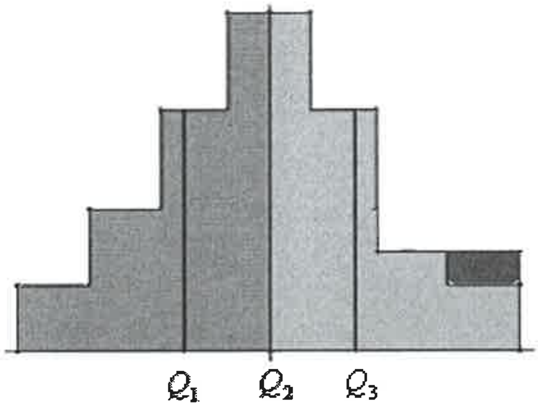
Si es asimétrica negativa $A_B < 0$

Si es asimétrica positiva $A_B > 0$

Es una medida fácil de obtener, pero tiene el inconveniente, de no venir influenciada por todos los valores de la variable, lo que puede dar lugar a que distribuciones distintas den lugar a la misma medida.

Ejemplo:

Si en el histograma de la última figura, que es de una distribución simétrica, rebajamos el penúltimo rectángulo y aumentamos la altura del último, hasta que estas sean iguales, obtenemos un histograma de una distribución asimétrica, sin que cambien los cuartiles de la original y por tanto $A_B = 0$ sin que sea una distribución simétrica:



Distribución asimétrica

3.- Coeficiente de asimetría de Fisher

Buscando una medida de la simetría que venga definida a partir de todos loa valores de la variable, Fisher pasó a considerar los momentos centrales, observando que $m_1 = 0$ siempre, y que m_2, la varianza es siempre no negativo, luego ninguno de los dos nos sirve, para medir la asimetría.

m_3 puede ser positivo, negativo o nulo. Si la distribución es simétrica, a cada desviación positiva $x_i - \bar{x}$, le corresponde otra negativa del mismo valor absoluto, luego a cada cubo $(x_i - \bar{x})^3$ le corresponde otro igual de distinto signo, y por tanto la suma de todos, $m_3 = 0$

Si la distribución es asimétrica positiva, las máximas desviaciones $x_i - \bar{x}$, son positivas, y aumentan mucho más al elevarlas al cubo, lo que hace que sus suma sea mayor, que las de los cubos de las diferencias negativas, haciendo que $m_3 > 0$. Lo contrario ocurre si la asimetría es negativa haciendo que $m_3 < 0$.

Basándose en esto, definió el coeficiente de asimetría que lleva su nombre, $g_1 = \dfrac{m_3}{s_x^3}$ La razón de dividir por s_x^3, es que sea un número abstracto, que no venga afectado por las unidades de medida, con que vienen dados los datos.

Teorema

"Si dos variables estadísticas x_i y x'_i están relacionadas entre sí por $x_i = a x'_i +$ x_0 se verifica que $g_1 = g'_1$". En efecto:

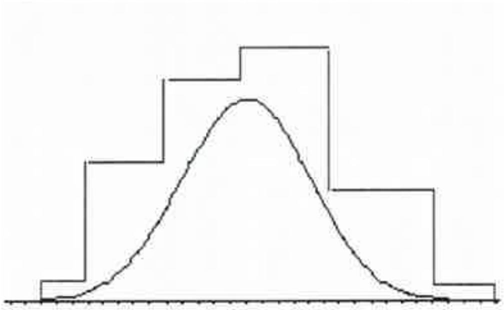
$$g_1 = \frac{m_3}{s_x^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{s_x^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\left(\left(ax'_i + x_0\right) - \left(a\bar{x} + x_0\right)\right)^3}{a^3 s_{x'}^3} = \frac{a^3 \sum_{i=1}^{k} f_i\left(x'_i - \overline{x'}\right)^3}{a^3 s_{x'}^3} =$$

Luego el coeficiente de asimetría de Fisher **permanece invariante**, ante los cambios de origen y escala. Esta propiedad simplifica notablemente su cálculo práctico, basándonos en el método abreviado, que hemos usado para obtener la media y la varianza.

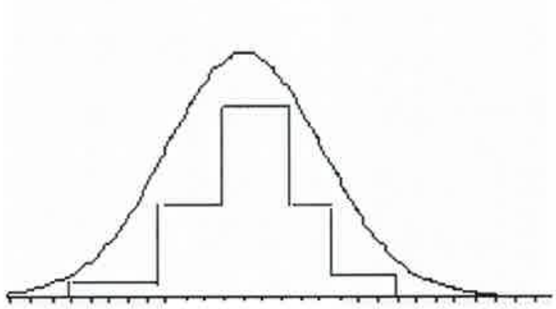
4.- Curtosis o apuntamiento de una distribución

La idea de curtosis o apuntamiento de una distribución, surge al observar si los contornos de los histogramas de las distintas de las distintas distribuciones están más o menos próximos al eje OX. Para definir el grado de apuntamiento de una distribución, tomamos como referencia la gráfica de la función de densidad de la ley normal tipificada, conocida vulgarmente, como campana de Gauss.

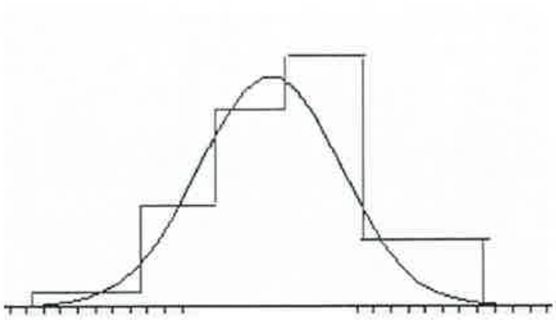
Son **leptocúrticas,** las distribuciones en las que el contorno de su histograma, está por encima de la curva. Si está por debajo, diremos que la distribución es **platicúrtica**. Son **mesocúrticas**, las que tienen un histograma, muy aproximado a la curva normal.



Leptocúrtica



Platicúrtica


Mesocúrtica

5.- Coeficiente de curtosis de Fisher

Fisher observó que para dos distribuciones con la misma media y la misma desviación típica, la más apuntada contiene más observaciones extremas alejadas de la media, que la menos apuntada. Para estos valores las diferencias $x_i - \bar{x}$, son grandes y mucho mayores al elevarlas a la cuarta, y por tanto m_4, será mayor para una distribución leptocúrtica que para una platicúrtica. Basándose en esto define Fisher el coeficiente de Curtosis $g_2 = \frac{m_4}{s_x^4} - 3$.

La razón de dividir por s_x^4, es que sea un número abstracto, que no venga afectado por las unidades de medida, con que vienen dados los datos.

Se demuestra en Estadística Teórica que para la ley normal, $\frac{m_4}{s_x^4} = 3$, de ahí que restemos 3.

Sí $g_2 > 0$ la distribución es leptocúrtica y si $g_2 < 0$ es leptocúrtica.

El coeficiente de curtosis de Fisher **permanece invariante**, ante los cambios de origen y escala. La demostración es análoga a la del coeficiente de asimetría de Fisher.