Soluciones al Examen

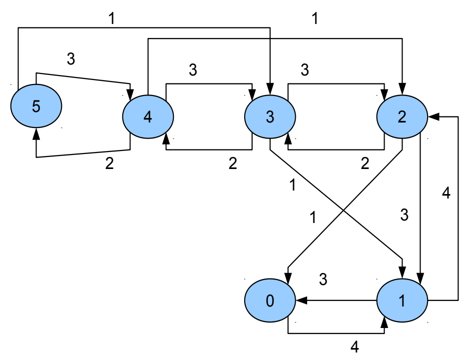
Tema 1 CMTC,
Probabilidades y Estadística II

Martes 9 de Abril de 2015

Problema-1 Solución:

a) Modelizar mediante una CMTC el depósito, cuyo estado es el volumen (m^3) de agua disponible. Calcular las probabilidades de transición y las tasas de permanencia.

El conjunto de estados es $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, representando el volumen de agua actual del depósito, en m^3.



Las tasas instantáneas de transición, q_{ij}, se asocian a las transiciones de los pedidos de 1 m^3 y 2 m^3, 3 y 1 $m^3/hora$ respectivamente. De estan tasas se deducen las tasas de permanencia, v_i, y las probabilidades de transición entre estados, p_{ij}.

	q_{ij}						v_i	p_{ij}					
	0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5
0	0	4	0	0	0	0	4	0	1	0	0	0	0
1	3	0	4	0	0	0	7	3/7	0	4/7	0	0	0
2	1	3	0	2	0	0	6	1/6	1/2	0	2/3	0	0
3	0	1	3	0	2	0	6	0	1/6	1/2	0	2/3	0
4	0	0	1	3	0	2	6	0	0	1/6	1/2	0	2/3
5	0	0	0	1	3	0	4	0	0	0	1/4	3/4	0

b) Escribir las ecuaciones de equilibirio.

$$\begin{aligned}
0&:\ 4\pi_0 = 3\pi_1 + \pi_2 \\
1&:\ 7\pi_1 = 4\pi_0 + 3\pi_2 + \pi_3 \\
2&:\ 6\pi_2 = 4\pi_1 + 3\pi_3 + \pi_4 \\
3&:\ 6\pi_3 = 2\pi_2 + 3\pi_4 + \pi_5 \\
4&:\ 6\pi_4 = 2\pi_3 + 3\pi_5 \\
5&:\ 4\pi_5 = 2\pi_4 \\
&\ \ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1
\end{aligned}$$

c) Indicar las probabilidades de observar el depósito lleno y vacío.

Probabilidad a largo plazo de encontrar el depósito vacío: π_0

Probabilidad a largo plazo de encontrar el depósito lleno: π_5

d) Indicar la ocupación media del depósito.

$0\pi_0 + 1\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 + 5\pi_5$

e) Indicar el coste por no atender la demanda.

$0.2((1(3/4) + 2(1/4))\pi_0 + (2(1/4))\pi_1)$ euros/hora

f) Indicar la proporción de tiempo que trabaja la bomba a la máxima velocidad.

$\pi_0 + \pi_1$

Problema-2 Solución:

Se trata de un proceso de Poisson no homogéneo.

a) Suponemos un crecimiento y decrecimiento de la función de intensidad $\lambda(t)$ lineal.

$$\lambda(t) = \left| \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq t < 8 \ ; \\ 5t - 35, & 8 \leq t \leq 11; \\ 20, & 11 \leq t \leq 13; \\ -2t + 46, & 13 \leq t \leq 17; \\ 0, & 17 < t < 24 \ ; \end{array} \right.$$

y $\lambda(t) = \lambda(t - 24)$, t >24.

La función de valor medio $m(t) = \int_I \lambda(s)ds$:

$$\begin{array}{r|l} 8 \leq t \leq 11, & m_1(t) = \int_8^t (5s - 35)ds = (5/2)t^2 - 35t + 20 \\ 11 \leq t \leq 13, & m_2(t) = m_1(11) + \int_{11}^t 20ds = 20t - 182.5 \\ 13 \leq t \leq 17, & m_3(t) = m_2(13) + \int_{13}^t (-2s + 46)ds = \ldots \end{array}$$

b) $m(9.5) - m(8.5) = 13.125 - 3.125 = 10$,

$P(N(9.5) - N(8.5) < 3) = P(N(9.5) - N(8.5) = 0) + P(N(9.5) - N(8.5) = 1) + P(N(9.5) - N(8.5) = 2) = e^{-10}(10^0/0! + 10^1/1! + 10^2/2!) = 2.769 * 10^{-3}$,

$E[N(9.5) - N(8.5)] = 10$ clientes.

c) $m(12.5) - m(12.0) = 67.5 - 57.5 = 10$,

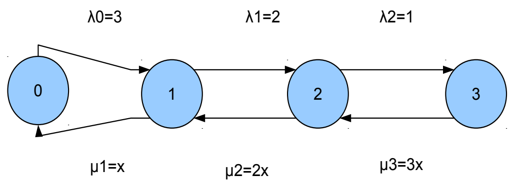
$P(N(12.5) - N(12.0) > 3) = 1 - (P(N(12.5) - N(12.0) = 0) + P(N(12.5) - N(12.0) = 1) + P(N(12.5) - N(12.0) = 2) + P(N(12.5) - N(12.0) = 3)) = 1 - e^{-10}(10^0/0! + 10^1/1! + 10^2/2! + 10^3/3!) = 0.989$,

$E[N(12.5) - N(12.0)] = 10$ clientes.

d) $P(N(9.5) - N(8.5) < 3, N(12.5) - N(12.0) > 3) = P(N(9.5) - N(8.5) < 3, N(12.5) - N(12.0) > 3) = 2.769 * 10^{-3} * 0.989 = 2.74 * 10^{-3}$

Problema-3 Solución:

1. El diagrama de transición es el siguiente:



Las ecuaciones de equilibrio son:

0: $3\pi_0 = x\pi_1$

1: $(2+x)\pi_1 = 3\pi_0 + 2x\pi_2$

2: $(1+2x)\pi_2 = 2\pi_1 + 3x\pi_3$

3: $3x\pi_3 = \pi_2$

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

2. Las tasas de permanencia, v_i, y las probabilidades de transición entre estados, p_{ij}.

	q_{ij}				v_i	p_{ij}			
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	0	3	0	0	3	0	1	0	
1	x	0	2	0	$2+x$	$\frac{x}{2+x}$	0	$\frac{2}{2+x}$	
2	0	$2x$	0	1	$1+2x$	0	$\frac{2x}{1+2x}$	0	$\frac{1}{1+2x}$
3	0	0	$3x$	0	$3x$	0	0	1	0

3. $x = 1 \rightarrow \pi_1 = \pi_2$ y $\pi_0 = \pi_3$.

4. Las ecuaciones de equilibrio son:

0: $3\pi_0 = \pi_1$

1: $3\pi_1 = 3\pi_0 + 2\pi_2$

2: $3\pi_2 = 2\pi_1 + 3\pi_3$

3: $3\pi_3 = \pi_2$

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Resolviendo se obtiene:

$\pi_0 = \frac{1}{1+3/1+3/1*2/2+3/1*2/2*1/3} = 1/8$

$\pi_1 = 3/8$, $\pi_2 = 3/8$, $\pi_3 = 1/8$

5. Sea T_1, el tiempo que el sistema tarda en alcanzar el estado 2 desde el 1,
   $E(T_1) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} * E(T_0) = 1/2 + 1/2 * 1/3 = 2/3.$
   Sea S_2, el tiempo que el sistema tarda en alcanzar el estado 1 desde el 2,
   $E(S_1) = \frac{1}{\mu_2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} * E(S_3) = 1/2 + 1/2 * 1/3 = 2/3.$
   El tiempo en regresar al estado 1 pasando por el estado 2: $2/3 + 2/3 = 4/3$