Ingeniería de Control I
Tema 10
Representación en frecuencia

Tema 10. Representación en frecuencia.

- Introducción
- Bode
- Nyquist
- Nichols

Bibliografía

- Señales y Sistemas. OCW-UC3M.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV.
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo.
- Contemporary Communications Systems with MATLAB. J. Proakis.

Objetivos

- Conocer distintas formas de representación de la información frecuencial
- Analizar el comportamiento de los sistemas a través de su representación de respuesta frecuencial.

Introducción

- Supongamos un sistema LTI
  - $C(s) = G(s)R(s) \Rightarrow c(t) = g(t) * r(t)$
- Supongamos una entrada sinusoidal:
  - $r(t) = Ae^{j\omega_0 t}$
- Calculando la salida en el t:
  - $c(t) = g(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\tau)g(\tau)d\tau =$
    $$= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{j(\omega_0(t-\tau))} g(\tau)d\tau = Ae^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau$$
  - $c(t) = r(t) \cdot G(s)|_{s=j\omega_0} = r(t) \cdot G(j\omega_0)$
- La exponencial (sinusoidales) es una autofunción en sistemas LTI

- $G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)|e^{jarg(G(j\omega_0))} = Me^{j\alpha}$
- Si $c(t) = r(t) \cdot G(s)|_{s=j\omega_0} = r(t) \cdot G(j\omega_0)$ cuando $r(t) = Ae^{j\omega_0 t} = A(\cos(\omega_0 t) + jsin(\omega_0 t))$, entonces
  - $|c(t)| = |r(t)||G(j\omega_0)|$
  - $\arg\big(c(t)\big) = \arg\big(r(t)\big) + \arg(G(j\omega_0))$
- Por tanto:
  - $c(t) = A \cdot |G(j\omega_0)|e^{j(\omega_0 t + \arg(G(j\omega_0)))}$
  - $c(t) = A \cdot |G(j\omega_0)| \cdot$ ...

X(s) → SISTEMA LINEAL INVARIANTE G(s) → Y(s)

Si

$Ae^{j\omega_0 t}$ → $G(j\omega_0)Ae^{j\omega_0 t}$

$A(cos\omega_0 t + jsin\omega_0 t)$ → $G(j\omega_0)A(cos\omega_0 t + jsin\omega_0 t) = MA(cos\alpha + jsin\alpha)(cos\omega_0 t + jsin\omega_0 t)$

Entonces?

$$Acos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \qquad G(j\omega_0)Acos\omega_0 t???$$

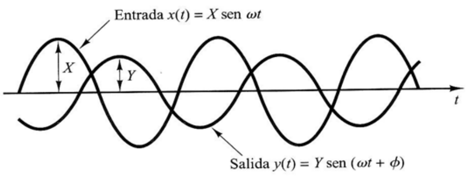
$$Asin\omega_0 t \qquad G(j\omega_0)Asin\omega_0 t???$$

- Si $G(j\omega_0) = Me^{j\alpha}, x(t) = Acos\omega_0 t \Rightarrow y(t)? = Me^{j\alpha}Acos(\omega_0 t)$
- OJO:
- Si entrada es $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$
  - Coincide $\frac{y(t)}{x(t)} = G(j\omega_0) = \frac{Y(s)}{X(s)}\Big|_{s=j\omega_0}$
- Pero si entrada es $x(t) = Acos(\omega_0 t)$ o cualquier otra

1. Introducción.

X(s) → SISTEMA LINEAL INVARIANTE G(s) → Y(s)

$$x(t) = Xsen\ \omega t \qquad y(t) = Ysen\ (\omega t + \phi)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

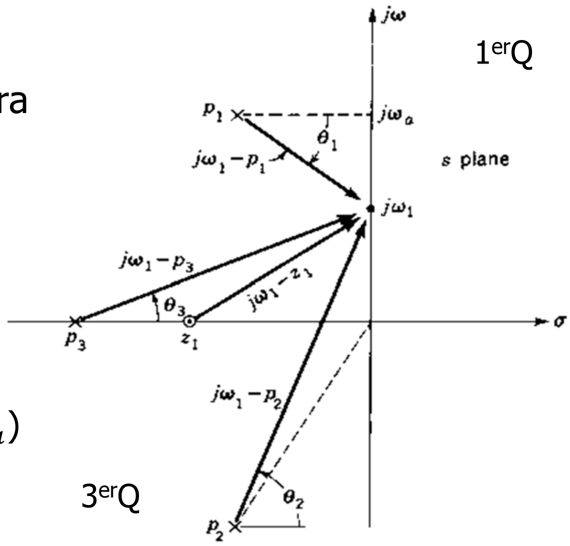
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

- Ante entrada sinusoidal, FT (módulo y fase) en s=jω
- $M(s) = \left.\frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}\right|_{s=j\omega}$

$$x_1(t) = X_1 \sin \omega t \qquad x_2(t) = X_2 \sin(\omega t + \alpha)$$

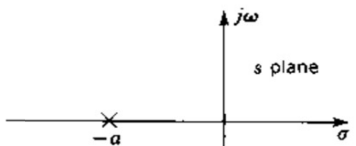
$$M = \left|\frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)}\right| = \left|\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}\right| = \left|\frac{K(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\cdots}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots}\right|$$

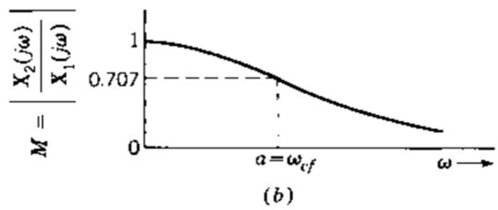
- Observar efecto en M (módulo) y α (fase) para $j\omega_1$ cualquiera (desde $\omega_1 = 0$ hasta ∞) de:
  - Polo real
  - Polo complejo en 3er cuadrante
  - Polo complejo en 2º cuadrante (pico en ω_a)
- Ceros:
  - Al contrario



Ej.

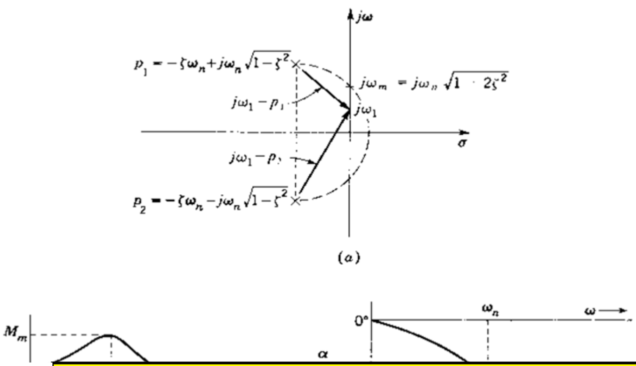
- $G(s) = \frac{a}{s+a}$; $G(j\omega) = \frac{a}{j\omega+a}$
- a es frec. de codo





Ej.2

- $G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2} = \frac{{\omega_n}^2}{(s-p_1)(s-p_1{}^*)}$
- En s=jω y derivando respecto de ω
  - Máximo de módulo: $M_m = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$
  - En pulsación de resonancia $\omega_m = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$
  - Se puede demostrar que hay pico si $\xi < \sqrt{0.5} = 0.707$



2. Diagramas logarítmicos. Diagramas de Bode.

- El diagrama de Bode se representa mediante dos gráficas:
  - Gráfica del logaritmo de la magnitud en función de ω.
  - Gráfica del ángulo de fase en grados en función de ω.

La representación de una magnitud logarítmica expresada en decibelios es:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = 20\log\left|G(j\omega)\right|$$

Ventajas de utilizar el diagrama de Bode:

- La multiplicación de magnitudes se convierte en suma.
- Representación mediante aproximaciones asintóticas.
- Mediante el uso de escala logarítmica permite ampliar el rango de bajas frecuencias.

2. Diagramas logarítmicos. Diagramas de Bode.

- De forma genérica:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{A_1(j\omega)A_2(j\omega)}{B_1(j\omega)B_2(j\omega)}$$

$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right| = 20\log\left|A_1(j\omega)\right| + 20\log\left|A_2(j\omega)\right| - 20\log\left|B_1(j\omega)\right| - 20\log\left|B_2(j\omega)\right|$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \angle A_1(j\omega) + \angle A_2(j\omega) - \angle B_1(j\omega) - \angle B_2(j\omega)$$

- Unidades logarítmicas para expresar las bandas de frecuencia (pulsación): $log_2 \frac{\omega}{1}$ (octavas), $log_{10} \frac{\omega}{1}$ (décadas)
  - *Octava:*
  - *Década:*

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

- **La ganancia K.**
  - **Módulo**

$$20\log(K) \rightarrow \text{Cte}$$
$$20\log(10K) = 20\log(K) + 20$$
$$20\log(10^n K) = 20\log(K) + 20n$$
$$20\log(K) = -20\log\left(\frac{1}{K}\right)$$

  - **Fase**

$$\varphi = 0^\circ \text{ ó}$$
$$\varphi = 180^\circ$$

$$A(s) = K_0 \frac{s^q (s+z_1)(s+z_1)\dots(s+z_M)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_N)}$$

$$\Downarrow$$

$$A(s) = \underbrace{\boxed{\frac{K_0 z_1 z_2 \dots z_M}{p_1 p_2 \dots p_N}}}_{K_p} \cdot \frac{s^q\left(1+\frac{s}{z_1}\right)\left(1+\frac{s}{z_1}\right)\dots\left(1+\frac{s}{z_M}\right)}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)\dots\left(1+\frac{s}{p_N}\right)}$$

(Tomado de Tec. Eca.)

17

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

- **Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$.**
  - **Módulo**

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega.dB$$
$$20\log|j\omega| = 20\log\omega.dB$$
$$20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^n}\right| = -20n\log|j\omega| = -20n\log\omega.dB$$

  - **Fase**

$$\varphi = \pm 90^\circ$$

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

- **Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$.**

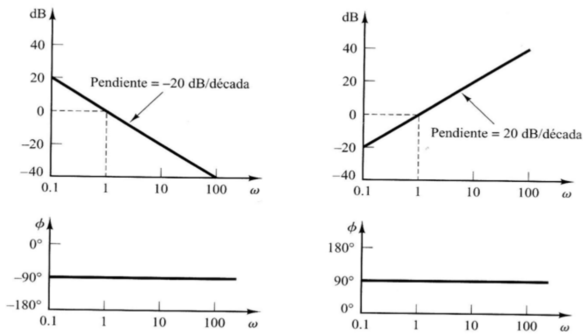


Diagrama de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$
(a)

Diagrama de Bode de $G(j\omega) = j\omega$
(b)

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

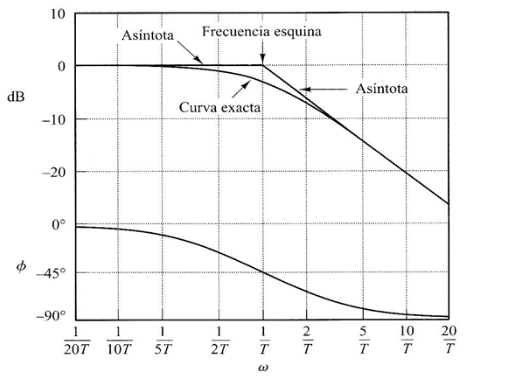
- **Factores de primer orden $(1+j\omega T)^{\pm 1}$.**
  - **Módulo de $(1+j\omega T)^{-1}$:**

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,dB \begin{cases} \omega << 1/T \rightarrow -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log 1 = 0dB \\ \omega_c = 1/T \rightarrow -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} = -20\log\sqrt{2} = -3dB \\ \omega >> 1/T \rightarrow -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log \omega T .dB \\ recta\_pendiente\ : -20dB/decada \end{cases}$$

  - **Fase de $(1+j\omega T)^{-1}$:**

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

- **Factores de primer orden $(1+j\omega T)^{-1}$:**



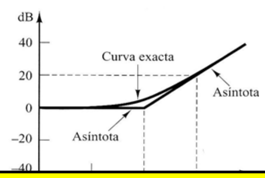
Curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva de ángulo de fase de $1/(1+j\omega T)$.

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de $G(j\omega)\ H(j\omega)$

- **Módulo de $(1+j\omega T)^{+1}$:**

$$20\log\left|1+j\omega T\right| = 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,dB \begin{cases} \omega << 1/T \rightarrow 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong 20\log 1 = 0dB \\ \omega = \omega_C = 1/T \rightarrow 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong 20\log\sqrt{2} = 3dB \\ \omega >> 1/T \rightarrow 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong 20\log\omega T\,.dB \\ recta\_pendiente\ :+20dB/decada \end{cases}$$

- **Fase de $(1+j\omega T)^{+1}$:**



$\omega < \omega_C/10 \rightarrow \varphi = tag^{-1}(0) = 0°$

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de *G(jω) H(jω)*

- **Factores cuadráticos $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$.**
- **Módulo :**

$$20\log\left|\frac{1}{1+2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

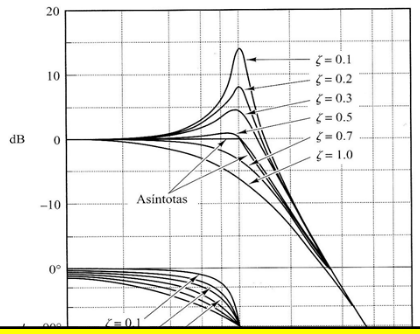
$$\Rightarrow\begin{cases}\omega \ll \omega_n \rightarrow -20\log(1)=0dB\\ \omega \gg \omega_n \rightarrow -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow recta\_pte.: -40\,dB\ /\ década\\ \omega=\omega_C=\omega_n \rightarrow -20\log(2\cdot\xi)=-6-20\log(\xi)dB\end{cases}$$

- **Fase**

$$\varphi=-\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]\rightarrow\begin{cases}\omega<\omega_n/10 \rightarrow \varphi=-tag^{-1}(0)=0^\circ\\ \omega=\omega_n \rightarrow \varphi=-tag^{-1}(\frac{2\xi}{0})=-tag^{-1}(\infty)=-90^\circ\\ \omega>10\omega_n \rightarrow \varphi=-180^\circ\end{cases}$$

2. Diagramas de Bode. Factores básicos de *G(jω) H(jω)*

- **Factores cuadráticos $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$.**



- Ej:
- Obtener diagramas de Bode de:

- $GH(s) = \frac{256(s+1)}{(s+4)(s^2+8s+64)}$
- $GH(s)|_{s=j\omega} = \frac{256(1+j\omega)}{4 \cdot 64(1+j\omega\frac{1}{4})(1-\frac{\omega^2}{8^2}+j\frac{\omega}{8})}$

2.1 Diagramas de Bode con Matlab

[mag,fase,w]=bode(num,den,w)

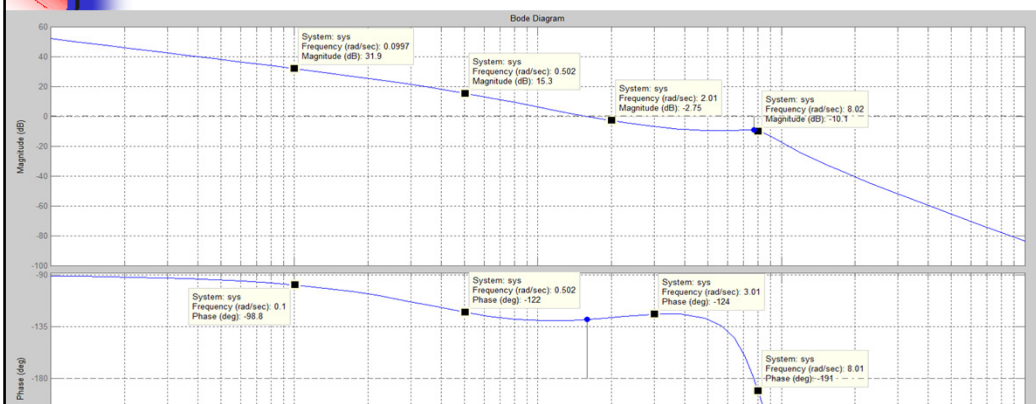
- mag → Matriz con los valores para representar la magnitud.
- fase → Matriz con los valores para representar la fase.
- w → Matriz con los valores de la frecuencia. (Opcional).
- num → Numerador de la función de transferencia.
- den → Denominador de la función de transferencia.

2.1 Diagramas de Bode con Matlab. Ejemplo1

- Representar los diagramas logarítmicos de magnitud y de fase (diagramas de Bode) de un sistema que tiene la siguiente función de trasferencia en lazo abierto:

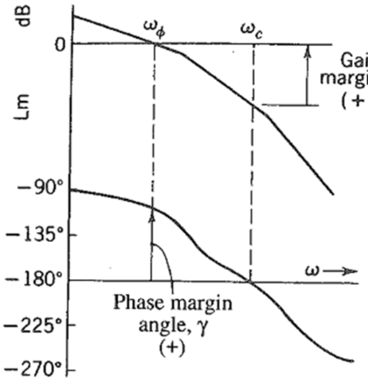
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{4(1+0.5\,j\omega)}{j\omega(1+2\,j\omega)(1+0.05\,j\omega-\frac{\omega^2}{8^2})}$$

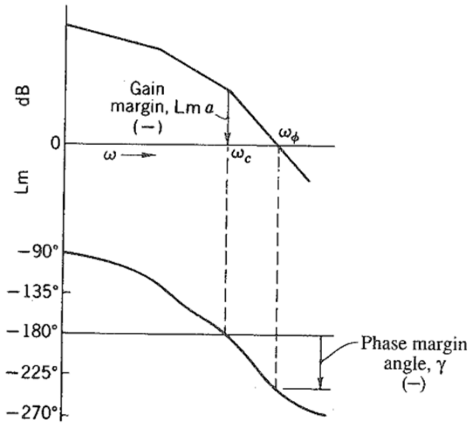
```
%--- Ejemplo 1: RESPUESTA EN FRECUENCIA ---
nG=4*[0.5 1];
dG=conv(conv([1 0],[2 1]),[0.015625 0.05 1]);
bode(nG,dG)
title('Diagrama de Bode')
ylabel('Fase(grados) Amplitud(dB)')
xlabel('Frecuencia (rad/seg)')
```

Estabilidad relativa sobre Bode

- MG: factor con el que modificar la ganancia para producir inestabilidad en ω_c (puls. de MG)
- MF: $\gamma = 180° + \angle G(j\omega_\phi)H(j\omega_\phi)$
- ω_ϕ (puls. de Margen de Fase)





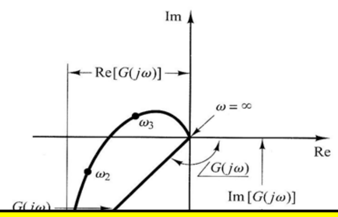
- Sistema estable
- Sistema inestable

3. Diagramas polares. Nyquist.

- El diagrama polar es el lugar geométrico de los vectores

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$$

cuando ω varía de cero a infinito.



3. Diagramas polares. Nyquist.

- **Factores integrales o derivativos (jωT)$^{\pm 1}$.**
  - $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\lfloor^{\pi}/_{2}$ **Es el eje imaginario negativo**
  - $G(j\omega) = j\omega$ **Es el eje imaginario positivo**

3. Diagramas polares. Nyquist.

- $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle - {}^{\pi}/_{2}$. Eje imaginario negativo recorrido desde $|G(j0)| = -\infty$ a $|G(j\infty)| = -0$ cuando $\omega = 0{:}\,\infty$
- $G(j\omega) = j\omega$. Eje imaginario positivo.

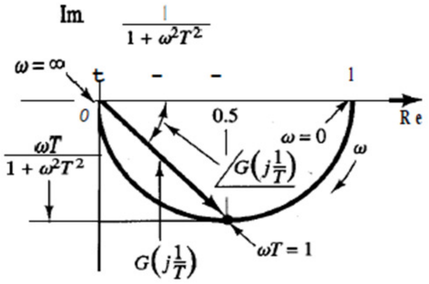
3. Diagramas polares. Nyquist.

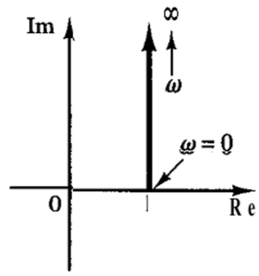
- **Factores de primer orden $(1+j\omega T)^{\pm 1}$.**

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+jwT} = \frac{1}{\sqrt{1+w^2T^2}} \angle -\tan^{-1} wT$$

$$G(j0) = 1\angle 0°$$

$$G(j\infty) = 0\angle -90°$$

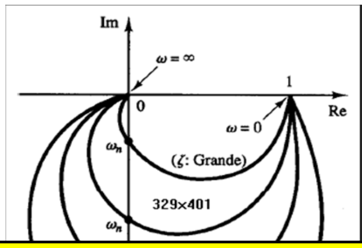




3. Diagramas polares. Nyquist.

- **Factores cuadráticos $[1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$.**

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{w}{w_n}\right)+\left(j\frac{w}{w_n}\right)^2}, \qquad para \quad \zeta > 0$$



$$G(j0) = 1\angle 0°$$

$$G(j\infty) = 0\angle -180°$$

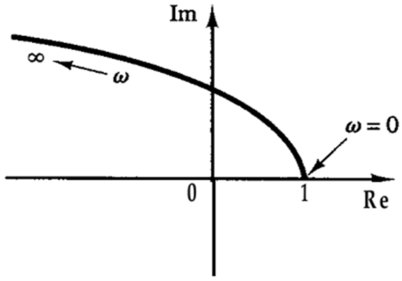
- **Factores cuadráticos [1+2ξ(jω/ω$_n$)+ (jω/ω$_n$)^2] $^{+1}$.**

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = 1 \angle 0°$$

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \infty \angle 180°$$



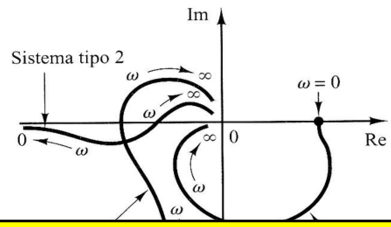
3. Diagramas polares. Nyquist.

- **Formas generales de los diagramas polares:**

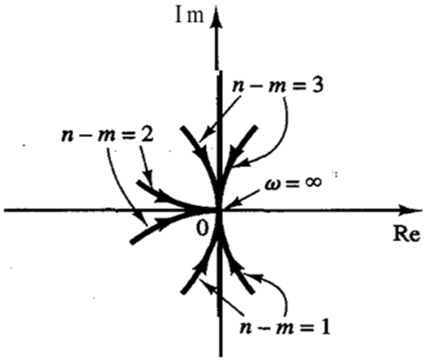
$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\ldots}{(j\omega)^\lambda(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\ldots} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots}$$

n > m

- Comienzo:
- Para $\lambda=0$ o *sistema de tipo 0.*



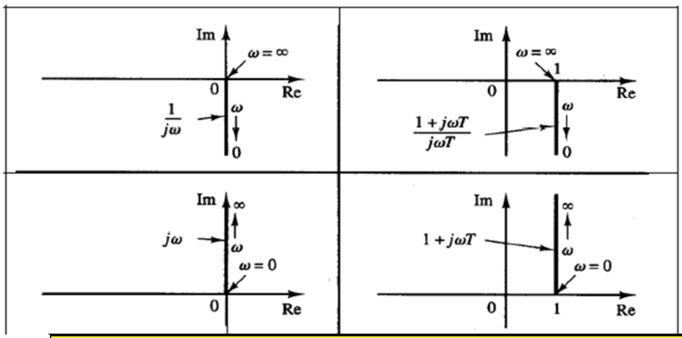
- Finalización ($\omega \rightarrow \infty$)



$$G(j\omega) = \frac{b_o(j\omega)^m + \dots}{a_o(j\omega)^n + \dots}$$

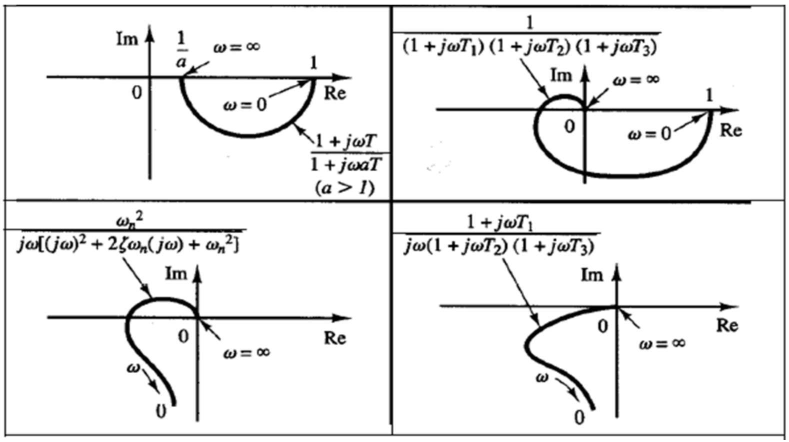
3. Diagramas polares. Nyquist.

- **Diagramas polares de funciones de transferencia simples:**



3. Diagramas polares. Nyquist.

- **Diagramas polares de funciones de transferencia simples:**



3.1 Diagramas de Nyquist con Matlab

nyquist(num,den)

- *num* → Numerador de la función de transferencia.
- *Den* → Denominador de la función de transferencia.

3.1 Diagramas de Nyquist con Matlab. Ejemplo2

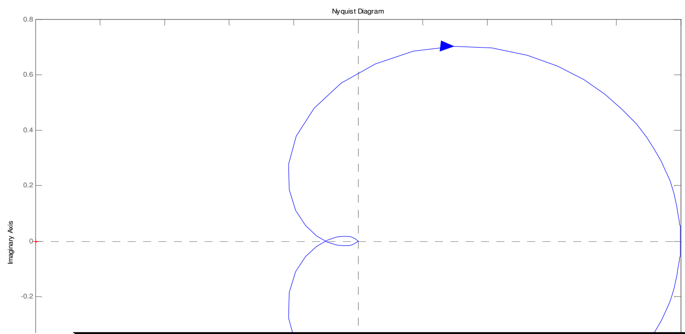
- Representa el diagrama polar del sistema cuya función de transferencia es el siguiente:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+2j\omega)(1+3j\omega)}$$

```
%--- Ejemplo 2: RESPUESTA EN FRECUENCIA ---
nG=1;
dG=conv(conv([1 1],[2 1]),[3 1]);
Nyquist(nG,dG)
title('Diagrama de Nyquist')
ylabel('Eje imaginario')
xlabel('Eje real')
```

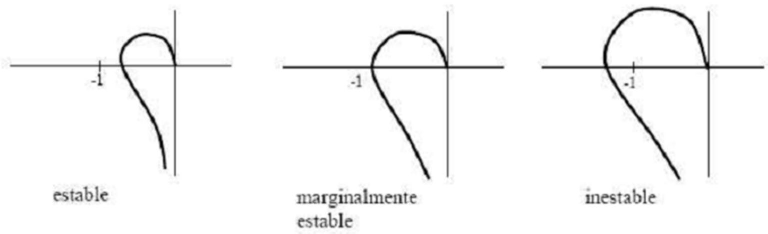

3.1 Diagramas de Nyquist con Matlab. Ejemplo2

- Resultado

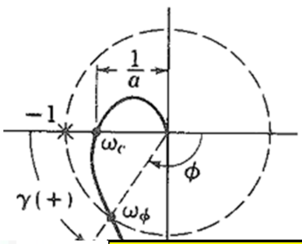


Estabilidad relativa sobre Nyquist

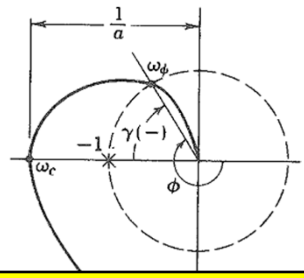
- Se observa el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$ y su distancia del punto (-1,0).



- MG: $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| \cdot a$ ⇒inestable



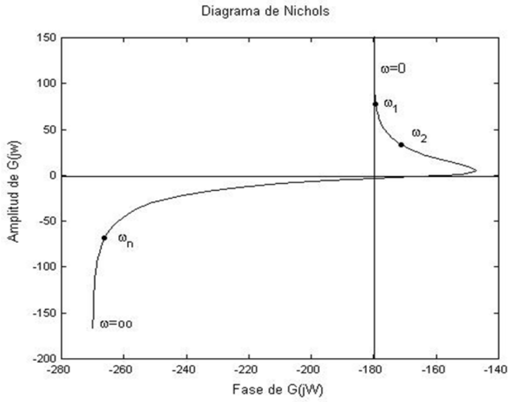
- MF: si desplazamos fase γ en ω_ϕ ⇒inestable



4. Diagramas de magnitud logarítmica respecto de la fase. Diagramas de Nichols.

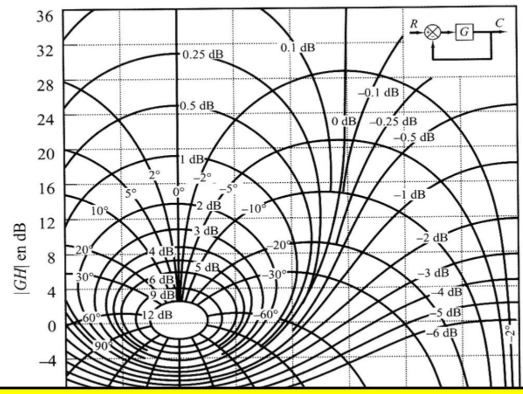
- Las dos gráficas de Bode se combinan en una única gráfica. En el eje imaginario se representa la amplitud y en el real la fase para cada valor de frecuencia.

- Aumentar o disminuir la ganancia ⇒ desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo.



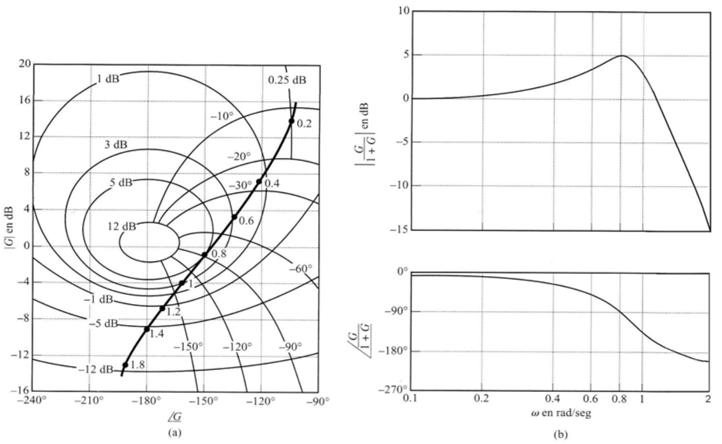
5.Respuesta en frecuencia en lazo cerrado de sistemas con realimentación unitaria

- Carta de Nichols.
- Lugares geométricos M (Magnitud constante) y N (fase constante)
- Sobre la carta se representa la FT en lazo abierto $G(j\omega)$



5. Respuesta en frecuencia en lazo cerrado de sistemas con realimentación unitaria. Ejemplo

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$



Representación en frecuencia 47

5.1 Diagramas de Nichols con Matlab

[mag,fase,w]=nichols(num,den,w)

- *num* → Numerador de la función de transferencia en lazo abierto.
- *Den* → Denominador de la función de transferencia en lazo abierto.
- *W* → Matriz con los valores de frecuencia. (Opcional)
- *mag* → Matriz para representar la magnitud en lazo cerrado.
- *fase* → Matriz para representar la fase en lazo cerrado.

Los parámetros: ***[mag,fase,w]***, nos calculan la magnitud y la fase para una representación en lazo cerrado con realimentación unitaria.

5.1 Diagramas de Nichols con Matlab. Ejemplo

- Representa el diagrama Nichols del sistema cuya función de transferencia e L. A. es el siguiente:

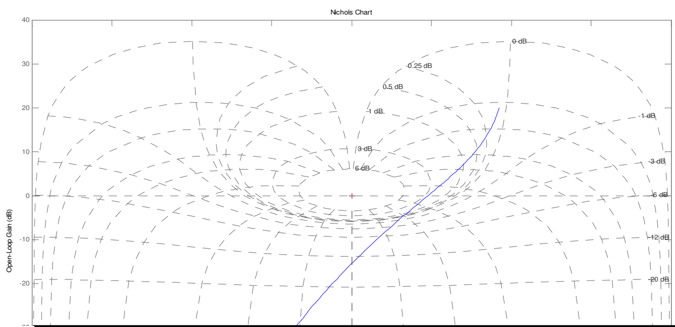
$$G(s) = \frac{1}{0.2s^3 + 1.2s^2 + s}$$

```
%--- Ejemplo 5: RESPUESTA EN FRECUENCIA ---

nG=1;
dG=[0.2 1.2 1 0];
w=logspace(-1,1,100);
Ngrid('new')
Nichols(nG,dG,w)
title('Diagrama de Nichols')
ylabel('Amplitud de G(jw)')
xlabel('Fase de G(jW)')
```

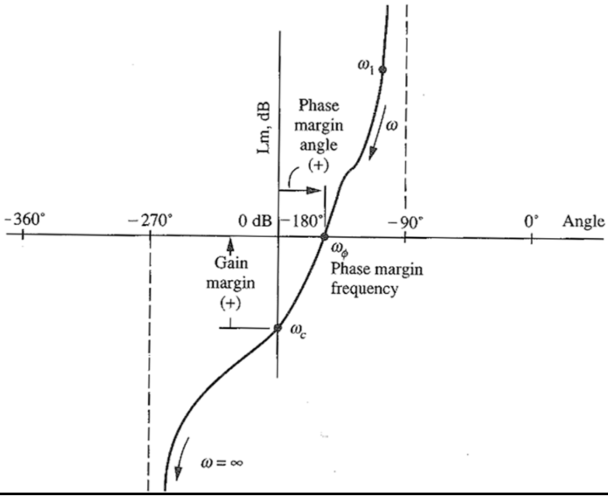

5.1 Diagramas de Nichols con Matlab. Ejemplo

- Resultado



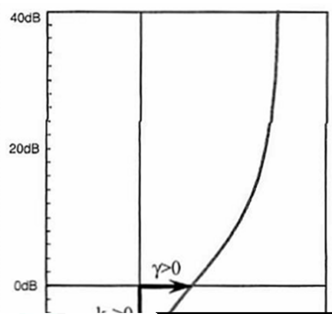
Estabilidad relativa sobre Nichols

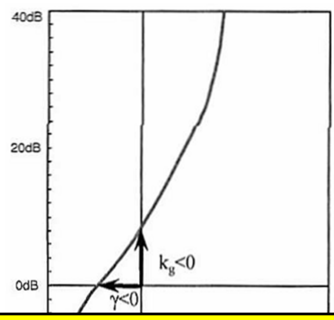
- MG: $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| \cdot a \Rightarrow$inestable
- MF: si desplazamos fase γ en ω_ϕ $\Rightarrow$inestable



51

- Sistema estable
- Sistema inestable



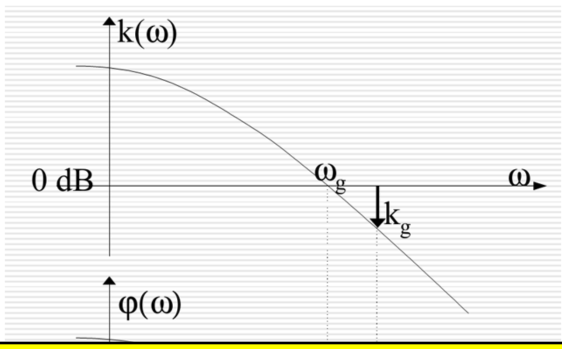


Estabilidad relativa

- Estudia la lejanía de un sistema a la situación de inestabilidad
- Márgenes de ganancia o fase representan cuánto se puede aumentar la ganancia o fase del sistema en bucle abierto sin que el sistema en bucle cerrado se haga inestable

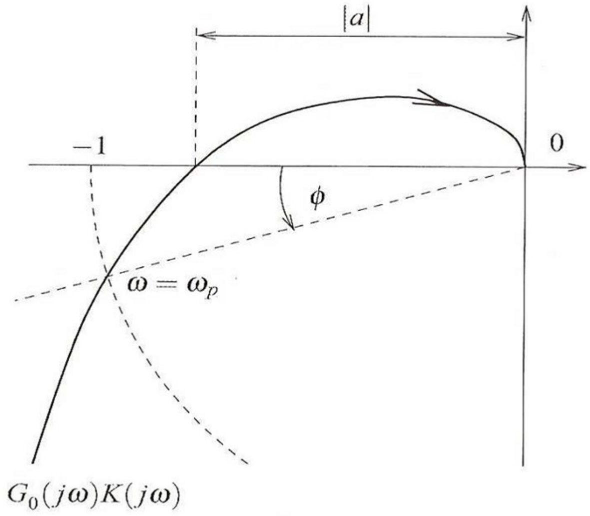
Bode

- Estable



Nyquist

- Estable



Nichols

- Estable