Probabilidades Y Estadística II

TEMA 2. MODELOS DE COLAS

CONTENIDOS

1. **Introducción a las colas poissonianas.**
2. **Modelo de colas poissoniano con un servidor *M/M/1***
3. **Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K***

2.7 Modelo *M/M/1/K/K*: población finita

Ahora consideraremos una población finita de tamaño K clientes. Cada uno de ellos estará en el sistema (encolado o sirviéndose), o estará en la población hasta que precise acudir al sistema.

Este modelo es uno de los más útiles de la Teoría de Colas y se conoce también como modelo de reparación de máquinas o modelo de interferencia de máquinas.

Nótese que este modelo es también un *M/M/1//K*, pues recordemos que dejar en blanco el símbolo de la capacidad del sistema significa que ésta es infinita y en el caso que nos ocupa es obvio que nunca habrá más de K clientes en el sistema.

Supondremos que los K clientes son idénticos e independientes. Tenemos una nueva v.a. O= "*tiempo desde que el cliente sale del servicio para regresar a la población, hasta que precisa de un nuevo servicio*", que supondremos exponencial de media $1/\lambda$ unidades de tiempo.

O suele denominarse tiempo de operación o tiempo entre roturas, ya que es el tiempo en que el cliente, piénsese por ejemplo en máquinas, permanece operativo entre roturas consecutivas. Visto de otra forma, es el tiempo que un cliente pasa fuera del sistema.

Por otra parte, el comportamiento del servidor es el usual, con duración del servicio o reparación dada por $s \sim \text{Exp}(\mu)$.

Así, cuando K máquinas comparten un servicio de reparación, λ es la tasa

Maquina K

λ

Solución de equilibrio

El número de clientes en el sistema va a afectar a la tasa de llegadas.

Si hay n clientes en el sistema (máquinas no funcionando), hay K - n en la población (funcionando), y el tiempo hasta que el próximo cliente llegue al sistema (vuelva a necesitar una reparación) es el mínimo de K - n v.a.i.i.d. según Exp(λ), es decir, es una Exp(λ(K - n)).

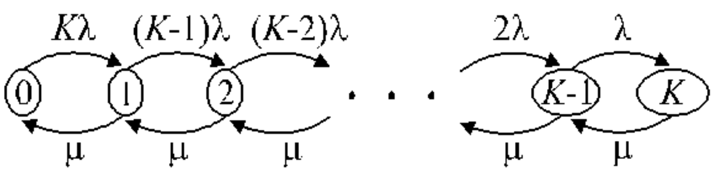
Por tanto, el sistema es autorregulador, pues según crece el número de clientes en el sistema se reduce la tasa de llegadas.

En resumen, las tasas son

$$\lambda_n = \begin{cases} (K-n)\lambda, & \text{si } n = 0, 1, ..., K-1 \\ 0, & \text{si } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } n = 1, 2, ..., K \\ 0, & \text{si } n > K \end{cases}$$

El diagrama de transición es



De ahí, las ecuaciones de equilibrio son

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	=	$K\lambda\pi_0$

$$(K-n)!\left(\overline{\mu}\right) \pi_0, \quad n = 0, 1, 2, ...K$$

Como $\sum_{n=0}^{K} \pi_n = 1$,

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1},$$

Sea $z = \mu/\lambda$. Si multiplicamos y dividimos por $z^K/K!$ en la expresión de π_0

$$\pi_0 = \frac{z^K/K!}{\displaystyle\sum_{n=0}^{K} \frac{z^{K-n}}{(K-n)!}} = \frac{z^K/K!}{\displaystyle\sum_{n=0}^{K} \frac{z^n}{n!}} = B(K, z)$$

siendo $B(\cdot\,,\cdot)$ la fórmula *B* de Erlang.

Medidas de rendimiento

A partir de π_0, la utilización real del servidor resulta $\rho = 1 - \pi_0 = 1 - B(K,z)$.

La tasa media efectiva de llegadas al sistema λ_e es $\lambda_e = \boldsymbol{\lambda} = \rho / E(s) = \mu\rho$.

Otra forma de calcularlo es:

$$\lambda_e \;=\; \sum^{K} (K-n)\lambda\pi_n = \sum^{K} K\lambda\pi_n - \sum^{K} n\lambda\pi_n =$$

Lo interesante es que deducimos de ahí la fórmula para *L:* $L = K - \dfrac{\lambda_e}{\lambda}$.

Aplicando las fórmulas de Little obtenemos:

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{K}{\lambda_e} - \frac{1}{\lambda}$$

$$W_q = W - W_s = \frac{K}{\lambda_e} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda_e W_q$$

Al ser también $W = L / \lambda_e = L / (\lambda(K-L))$, se tiene que el cociente del número medio de máquinas no funcionando, L, y funcionando, K-L, es $W\lambda = W/(1/\lambda)$, es decir, el tiempo medio no funcionando dividido por el tiempo medio funcionando.

$$\frac{W}{1/\lambda} = \frac{L}{K - L}$$

El tiempo medio de espera en cola para aquellos clientes que deben esperar:

$$E(q \mid q > 0) = \frac{W_q}{\rho} = \frac{\frac{K}{\lambda_e} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}}{1 - B(K, z)}.$$

Pensando en clientes que son máquinas, puede interesar la probabilidad de que una máquina dada esté estropeada

$$P(\text{máquina } n \text{ esté estropeada}) = \frac{W}{W + E(O)}, \quad n = 1, 2, ..., K,$$

ya que W es el tiempo medio que una máquina permanece fuera de servicio y W+E(O) es el que emplea en el ciclo completo "no funcionando-funcionando", que equivalentemente da lugar a L/K.

de donde, despejando W o W_q obtendríamos sus fórmulas anteriores.