

**Ejemplo.** En una pequeña oficina hay un escáner alquilado para uso de los empleados. Aunque los trabajos a realizar varían en longitud, el tiempo de servicio puede aproximarse a una distribución exponencial con tasa media de 10 trabajos/hora.

En las 8 horas de trabajo diario, las peticiones de uso del escáner llegan aleatoriamente con una tasa media de 5 trabajos/hora. El tiempo del personal se valora en 5 euros por hora.

Las quejas recibidas por los empleados sugieren buscar mejoras del sistema actual:

- Una posibilidad es alquilar un escáner como el actual, a un coste de 11 euros diarios.
- Otra posibilidad es quedarse sólo con un escáner más rápido, atendiendo 15 trabajos/hora, con un coste de alquiler de 20 euros diarios.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La **situación actual** corresponde a un modelo  $M/M/1$  con  $\lambda=5$ ,  $\mu=10$  trabajos/hora, de donde  $\rho = 0.5$ . Como

$$C_E = (\text{número horas diarias perdidas}) \times (5 \text{ euros/hora})$$

$$= (8 \text{ horas/día}) \times (5 \text{ trabajos/hora}) \times (W \text{ horas/trabajo}) \times (5 \text{ euros/hora})$$

Como

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0.2$$

entonces  $C_E$  es 40 euros/día, y  $C_T = 40 + 11 = 51$  euros/día.

La **posibilidad del escáner rápido** cambia el modelo anterior, al tener ahora  $\mu = 15$  trabajos/hora, de donde  $\rho = 1/3$  y  $W = 0.1$  horas/trabajo, dando lugar a  $C_E = 20$ .

Como  $C_A = 20$ ,  $C_{T1} = 20 + 20 = 40$  euros/día.

Si decidimos utilizar **dos escáners como el actual**, el modelo es  $M/M/2$ , de donde  $\rho = \lambda/(c\mu) = 5/(2 \times 10) = 0.25$  y



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Así,

$$C_E = (40 \text{ trabajos/día}) \times (0.106 \text{ horas/trabajo}) \times (5 \text{ euros/hora}) = 21.2 \text{ euros}$$

$$\text{y } C_{T2} = 21.2 + 2 \times 11 = 43.2 \text{ euros/día.}$$

Alquilar dos escáners pero ubicándolos en diferentes lugares de la oficina de forma que la mitad de los trabajos llegaran a cada escáner. Es decir, se tendrían dos modelos  $M/M/1$ , cada uno con  $\lambda = 2.5$ ,  $\mu = 10$  trabajos/hora y  $\rho = 2.5/10 = 0.25$ .

El tiempo medio en cada sistema sería  $W = 0.1/0.75 = 0.133$  horas/trabajo. Luego,  
 $C_{T3} = 2(13.33 + 11) = 48.66$  euros/día.

Por tanto, debemos elegir alquilar el escáner rápido, que conlleva menores costes y menor tiempo perdido en el sistema.

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Ejemplo.** Una compañía telefónica quiere diseñar un servicio de información de números de teléfono. Desea determinar cuántos operadores contratar para satisfacer los siguientes criterios de diseño:

1. El tiempo medio esperando ser atendido no debe sobrepasar 2 minutos;
2. El 90% de las llamadas deben esperar menos de 2 minutos a que comience el servicio.

El tiempo que utilizan los operadores en atender las llamadas sigue un modelo exponencial con un tiempo medio de 4 minutos.

Se espera que las llamadas lleguen aleatoriamente con una media de 40 llamadas por hora. Las llamadas que se producen cuando todos los operadores están ocupados quedan a la espera hasta que uno queda libre.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

En este sistema  $M/M/c$ , las tasas son  $\lambda = 40$  llamadas/hora =  $2/3$  llamadas/minuto,  $\mu=0.25$  llamadas/minuto, con intensidad de tráfico  $r = 8/3$ .

Para que exista solución de equilibrio, debe ser  $\lambda / c\mu < 1$ , es decir,  $c \geq 3$  operadores.

Los criterios de diseño establecen que  $W_q \leq 2$  minutos y  $P(q \leq 2 \text{ minutos}) \geq 0.9$ .

Para tres operadores ( $c=3$ ), sabiendo que  $C(3, 8/3) = 0.8205$ , obtenemos los siguientes valores:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{4/6}{3 \times 0.25} = 0.888$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{C(c, r)}{c\mu(1 - \rho)} = \frac{0.8205}{3 \times 0.25 \times (1 - 0.888)} = 9.846$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$= 0.3054$$

En la tabla siguiente mostramos los resultados para varios valores de  $c$ . La columna de  $W_q$  está expresada en minutos.

| $c$ | $C(c,r)$ | $\pi_0$ | $W_q$ | $P(q \leq 2)$ |
|-----|----------|---------|-------|---------------|
| 3   | 0.8205   | 0.0288  | 9.846 | 0.3054        |
| 4   | 0.4025   | 0.0637  | 1.207 | 0.7933        |
| 5   | 0.1733   | 0.0719  | 0.297 | 0.9460        |
| 6   | 0.0665   | 0.0740  | 0.080 | 0.9874        |

Conforme aumentamos el número de operadores, disminuye la probabilidad  $C(c,r)$  de encontrar todos los operadores ocupados y aumenta la probabilidad  $\pi_0$  de que el sistema esté vacío.

Con 4 operadores se satisface el primer criterio, pero para satisfacer además el segundo hacen falta 5 operadores. En ese caso, el factor de utilización es  $\rho = r/5 = 0.533$ , que indica que en media cada operador permanece ocioso casi la mitad del



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70