Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA
VINCE IN BONO MALUM

Ecuaciones lineales

- Una **ecuación lineal** tiene variables $(x_1,\ldots,x_n)$ término independiente (*b)* y coeficientes (reales o complejos) $a_1,\ldots,a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- Un **sistema de ecuaciones lineales** (o **sistema lineal**) es un conjunto de varias ecuaciones sobre las mismas variables x_1,…., x_n

Forma matricial

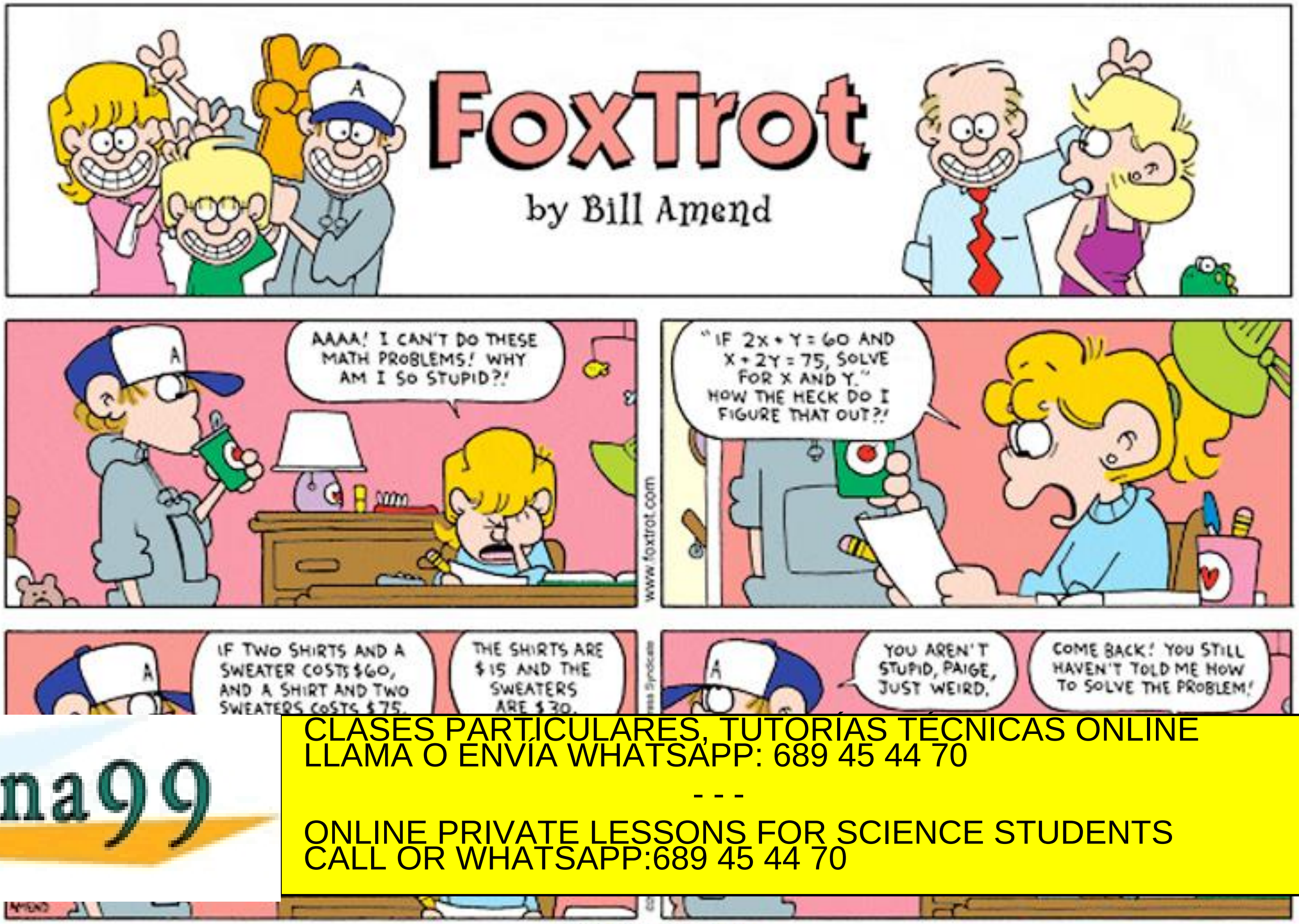
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{es la matriz de coeficientes con } m \text{ filas y } n \text{ columnas}$$

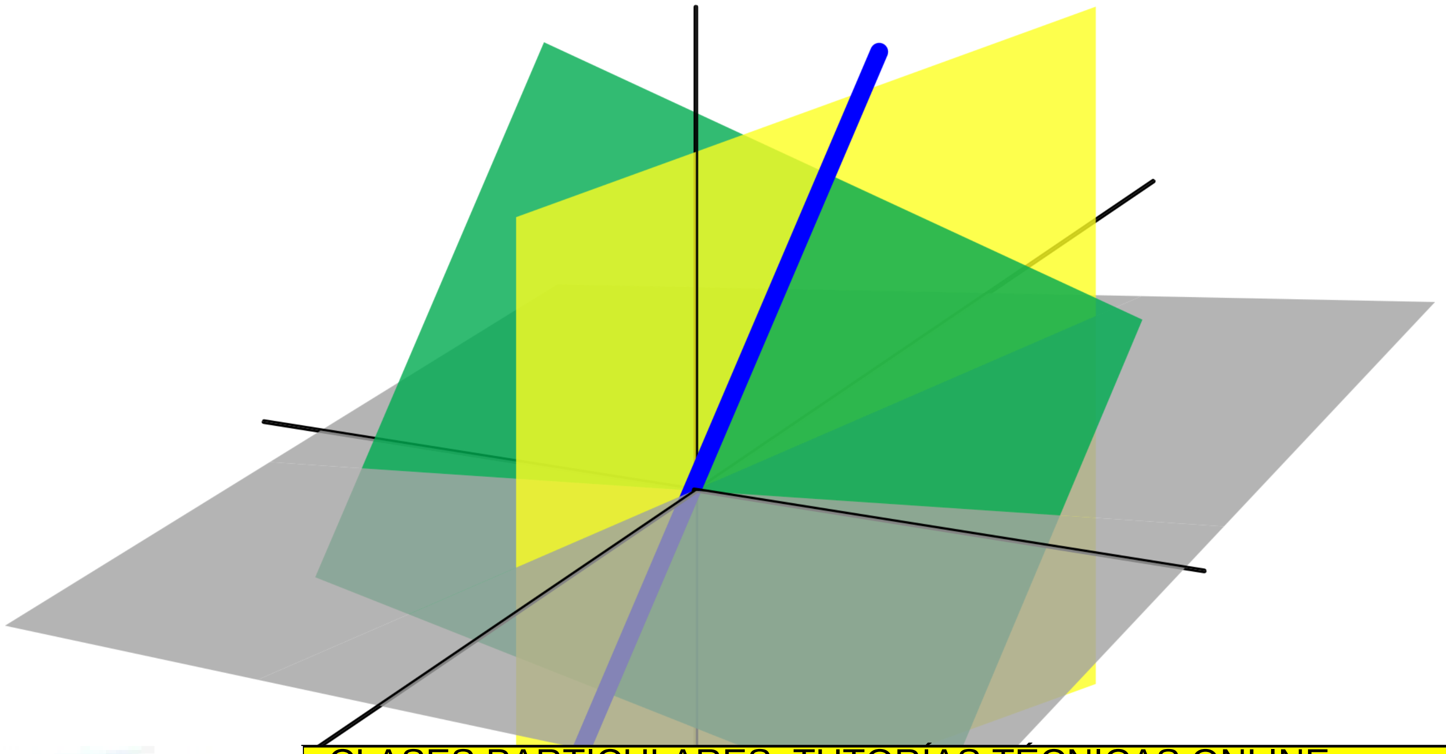
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \text{es el vector de incógnitas} \quad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \text{es el término independiente.}$$

Aplicaciones de las ecuaciones lineales

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA



Interpretación geométrica



Soluciones

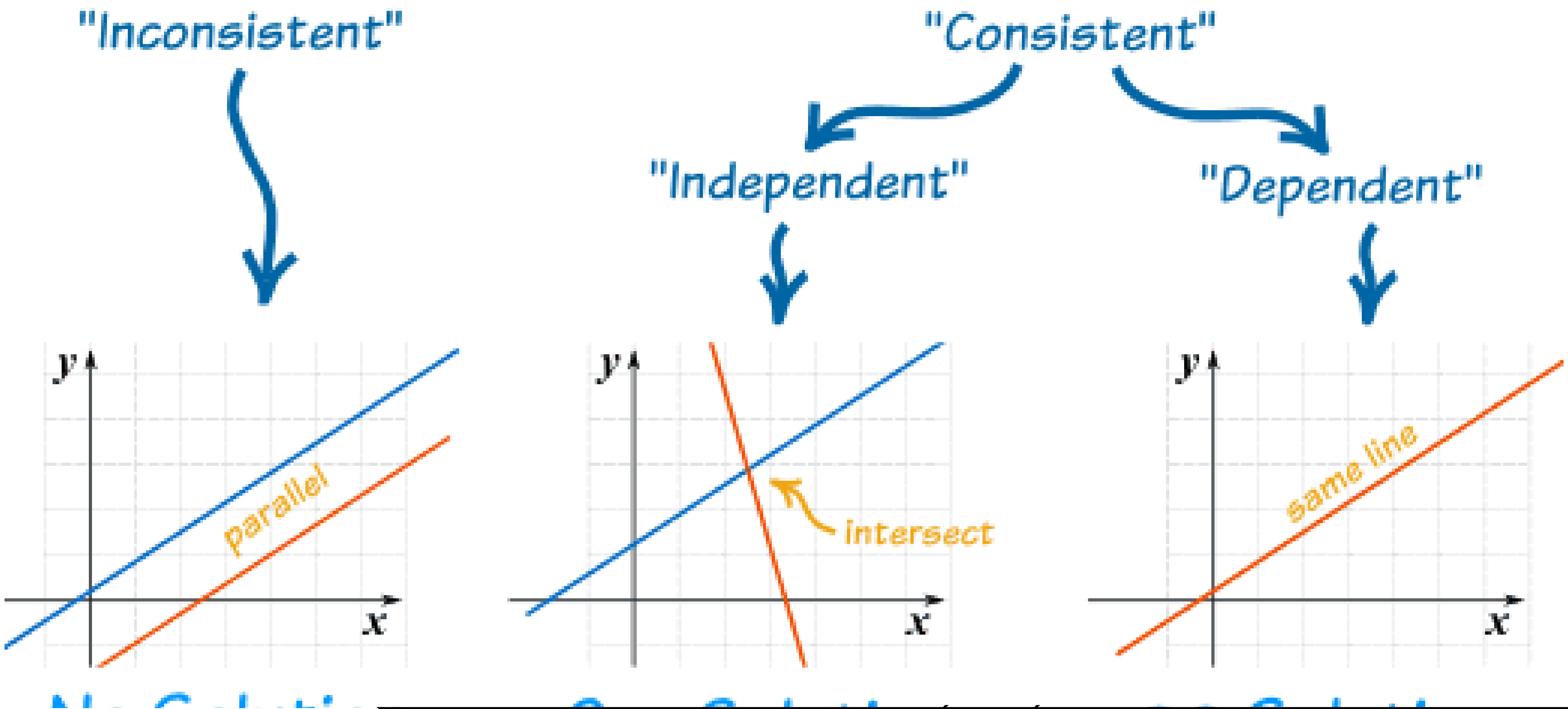
UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Una **solución** al sistema es una lista (s_1, s_2,…, s_n) que hacen que cada ecuación se cumpla si s_1,…, s_n se sustituyen por x_1,…, x_n

- No tiene porqué haber una única solución, puede haber un **conjunto de soluciones** (¿ejemplo?)

- Dos sistemas lineales son **equivalentes** si

Soluciones: opciones



Representación matricial

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9, \end{aligned}$$

- ***MATRIZ DE COEFICIENTES***

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8x_3 &= 8 \\
-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}
$$

Resolver un sistema de ecuaciones

- **Ejemplo 1:**

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned}$$

- **Procedimiento:** transformar en un sistema de ecuaciones equivalente que sea ***más fácil*** de resolver.

Truco fundamental

- Si tenemos una ecuación y multiplicados AMBOS LADOS de la ecuación por el mismo factor, el resultado de la ecuación NO varía

$$x+2=4$$

(x 2) $$2x+4=8$$

(x (-1)) $$-x-2=-4$$

Qué se puede hacer

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Operaciones básicas:

    1. Multiplicar una fila por una constante no nula.
    2. Intercambiar una fila por la suma de esa fila más un múltiplo de otra.
    3. Intercambiar dos filas.

- Estas operaciones producirán matrices EQUIVALENTES

La solución debe indicar…

- OBLIGATORIAMENTE:
  1. El sistema es consistente o inconsistente
  2. Hay una única solución o varias

Solución

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ \underline{-4x_1 + 5x_2 + 9x_3} &\underline{= -9} \end{aligned}$$

Solución...

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8x_3 &= 8 \\
-3x_2 + 13x_3 &= -9
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -8 & 8 \\
0 & -3 & 13 & -9
\end{bmatrix}
$$

Solución...

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 - 4x_3 = 4$$
$$-3x_2 + 13x_3 = -9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$3x_2 - 12x_3 = 12$$
$$-3x_2 + 13x_3 = -9$$

Forma triangular

- El nuevo sistema tiene una forma triangular

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_2 - 4x_3 &= 4 \\
\hline
x_3 &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix}
$$

Diagonal principal

- NO hay un único camino para llegar a la solución,

Remate final

$$\begin{array}{r} 4x_3 = 12 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ \hline x_2 = 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \hline x_1 - 2x_2 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

The end…

$$x_1 = 29 \qquad x_2 = 16 \qquad x_3 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Consistente o no? ¿Una única solución o varias?

Comprobando la solución

$$(29) - 2(16) + (3) = 29 - 32 + 3 = 0$$

$$2(16) - 8(3) = 32 - 24 = 8$$

$$-4(29) + 5(16) + 9(3) = -116 + 80 + 27 = -9$$

Prueba tú…

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 & = & -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 & = & -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Otro más...

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Resuelve...

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Más formalmente

- Método de Gauss: buscamos generar matrices ESCALONADAS (echelon form)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, F_2-3F_1, F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightleftarrows F_3} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{\text{hasta aquí en ej. 2}} \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1, F_2+F_3, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1, \frac{-1}{7}F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2, F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1-F_3, F_2, F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2. \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Definición: Una matriz se dice que es escalonada si se puede trazar una escalera (ver ej. 3)

iii. En cada esquina de un peldaño hay un 1 y encima de este 1 sólo hay ceros

- Una matriz rectangular está en forma escalonada reducida si está en forma escalonada y además cumple:
  - La entrada principal de cada fila no nula es 1
    - La entrada principal de de una fila no nula es la primera entrada no nula por la izquierda
  - Cada 1 que corresponde a una entrada principal es la única entrada distinta de cero en su columna

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Está alguna de ellas en forma escalonada reducida? ¿Cuáles son las entradas principales?

Ejemplos

Escalonadas

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

No escalonadas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pivote

- Una posición pivote de una matriz es una entrada de la matriz original que corresponde a una entrada principal de en una forma escalonada de dicha matriz.
- Una columna pivote de una matriz escalonada es una columna que contiene una posición pivote.
- Las variables que corresponden a columnas pivote de la matriz se denominan variables principales.
  - Las demás son **variables libres**.

pivote

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

convertir en ceros

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{\textbf{Paso 1}}{\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} (1/5) \rightarrow \underset{\textbf{Paso 2}}{\begin{bmatrix} 1 & 8/5 & 9/5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{matrix} (-1) \\ \\ (+) \end{matrix} \rightarrow \underset{\textbf{Paso 3}}{\begin{bmatrix} 1 & 8/5 & 9/5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2/5 & 6/5 \end{bmatrix}} (1/6) \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8/5 & 9/5 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ \end{bmatrix} (-2/5) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8/5 & 9/5 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8/5 & 9/5 \\ 0 & 1 & 7/6 \\ \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7 & 9 & 6 & 4\\ 7 & 4 & 2 & 7 & 8\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 7 & 9 & 6 & 4\\ 7 & 4 & 2 & 7 & 8\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}(1/5)\\ \\ \\ \end{matrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 7 & 4 & 2 & 7 & 8\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}(-7)\\ (+)\\ \\ \end{matrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\end{bmatrix}(-8)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & -29/5 & -53/5 & -7/5 & 12/5\\ 0 & -11/5 & -57/5 & -18/5 & 22/5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (-5/29)\\ \\ \end{matrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & 1 & 53/29 & 7/29 & -12/29\\ 0 & -11/5 & -57/5 & -18/5 & 22/5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (11/5)\\ (+)\end{matrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & 1 & 53/29 & 7/29 & -12/29\end{bmatrix}\rightarrow$$

Método de Gauss con matrices escalonadas

1. Seleccionar la columna distinta de cero que se encuentre más a la izquierda en la matriz. Es una columna pivote.
2. Seleccionar como pivote (para definir los multiplicadores) una entrada distinta de cero en la columna pivote. Si es necesario se intercambiarán dos filas.
3. Usar operaciones elementales para hacer ceros debajo del pivote
4. Tapar la fila y la columna que contienen al pivote y repetir los pasos 1 a 3 en la submatriz que queda. Repetir este proceso hasta que no haya más filas distintas de cero por modificar.

Con este algoritmo llegamos a una matriz escalonada a partir de la matriz original. Si queremos obtener la única matriz escalonada reducida equivalente a la matriz original hay que efectuar un paso más:

fila por el valor del pivote.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix}.$$

Apliquemos el método de Gauss. Cada vez eligimos como pivote al elemento el más izquierdo y el más alto. En el primer paso usamos como pivote el elemento $A_{1,1} = 3$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= R_1]{\substack{R_2 += \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 -= \frac{5}{3}R_1}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix}.$$

En el segundo paso tenemos que intercambiar dos filas.

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 -= R_2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 15 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora la matriz es escalonada. $r = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$.

Aplicado a sistemas de ecuaciones

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz es escalonada reducida. Podemos utilizar la primera ecuación para despejar la incógnita x_1, la segunda ecuación para despejar x_3 y la tercera para x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 5x_5 - 3; \\ x_3 = 2x_5 + 4; \\ x_4 = -4x_5 + 2. \end{cases}$$

La solución general es

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 - 5x_5 - 3 \\ x_2 \\ 2x_5 + 4 \\ -4x_5 + 2 \end{bmatrix}.$$

Ataca estos ejemplos (Gauss)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Otras aplicaciones del método de Gauss

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Cálculo de la matriz inversa $\quad (A \mid I) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I \mid A^{-1})$
- Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En primer lugar, por simplicidad en las operaciones, vamos a intercambiar las filas 2 y 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Continuación…

Ahora 3ª f = 3ª f + 4·2ª f (estos dos pasos se podrían haber resumido en una sola operación, 3ª f = 3ª f-2·1ª f + 3.2ª f, no se ha hecho por claridad al ser el primer paso):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora hacemos 1ª f = (1ª f)/2 y 3ª f = (3ª f)/(-6):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Y, por último, hacemos la operación 1ª f = 1ª f - (3/2)· 2ª f - 2.3ª f:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

- Crea tu propio enunciado para una matriz 3x3, calcula la matriz inversa mediante este método

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de Cramer

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 10\\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 11\\
x_1 + 5x_2 + x_3 &= 18
\end{aligned}
$$

$$\det M = 4 \neq 0$$

Las incógnitas se calculan como se expresa a continuación:

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{10} & 1 & 1\\ \boxed{11} & 1 & 1\\ \boxed{18} & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & \boxed{10} & 1\\ 2 & \boxed{11} & 1\\ 1 & \boxed{18} & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{10}\\ 2 & 1 & \boxed{11}\\ 1 & 5 & \boxed{18} \end{pmatrix}$$

teniendo ciertas precauciones. Veámoslo con un ejemplo.

Método de Cramer

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0,\ x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & b_1 & w_1 \\ u_2 & b_2 & w_2 \\ u_3 & b_3 & w_3 \end{vmatrix}}{D} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{vmatrix}}{D} \text{ El sistema es compatible determinado}$$

$$\text{y } \begin{vmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o } \begin{vmatrix} u_1 & b_1 & w_1 \\ u_2 & b_2 & w_2 \\ u_3 & b_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ El sistema es incompatible, sin solucion}$$

$$\text{Si } D = 0$$

Aplicación del método de Gauss al rango de una matriz

- Podemos descartar una línea si:
  - Todos los coeficientes son ceros
  - Hay dos líneas iguales
  - Una línea es proporcional a otra
  - Una línea es combinación lineal de otras

- Ejercicio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad rg(B) = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(C) = 4$$

Tarea

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Inventa ejercicios de tamaño mínimo 5 x 5 y calcula el rango de la matriz

Ejercicio

- Discutir los siguientes sistemas para los distintos valores de *K*

$$\left.\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ kx + (k-1)y + z &= k \\ x + y + z &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(b)} \left\{\begin{aligned} 2x + \lambda y &= -4 \\ \lambda x - 3y &= 5 \end{aligned}\right.$$