Técnicas de contar

MATEMÁTICA DISCRETA I

F. Informática. UPM

Cartagena99

ELAMA OFENVIA WHATSAPP 685 45 PALLINGR RAYATE AFFS 88145 FAPS OF

www.rartagenagg.com.no.se.hare raspansable de la información contenida en el la información contenida en el la El la minima discreta mente de la contenida en el contenida en el la contenida en el la contenida en el la con

Cardinal de un conjunto

Contar los elementos de un conjunto A es establecer una biyección entre A y un conjunto finito $\{1,\ldots,n\}$.

Definición

Diremos que el cardinal de un conjunto A es n si se puede establecer una biyección $f:\{1,\ldots,n\}\longrightarrow A$. Se denota |A|=n. Se define $|\emptyset|=0$. Se dice que $A\neq\emptyset$ es infinito si no existe ninguna biyección f:

Teorema (Principio de la unión)

 $\{1,\ldots,n\}\longrightarrow A$ para ningún $n\in\mathbb{N}$.

Si A_1, A_2, \ldots, A_n son conjuntos finitos disjuntos dos a dos se tiene que

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

Teorema (Principio del complementario)

Si B es un conjunto finito y A es un subconjunto de B se tiene que

$$|B \setminus A| = |B| - |A|.$$

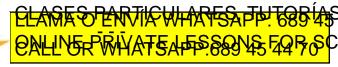
Teorema (Principio del producto)

Si A_1, A_2, \ldots, A_n son conjuntos finitos no vacíos se tiene que

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Ejemplo. El número de palabras posibles de cuatro letras formadas solo por vocales es $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Cartagena99



Principios básicos

Teorema (Principio de inclusión-exclusión)

Si A_1, A_2, \ldots, A_n son conjuntos finitos se tiene que

i)
$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
,

ii)
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i \neq i} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
,

iii)
$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i \neq i} |A_i \cap A_j| + \dots + (-i)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|.$$

Ejemplo. El número de palabras del diccionario que empiezan o terminan por a el número de palabras que empiezan por a más el número de palabras

vww.cartagena99.com no se hace rasponsable de la información contenida en e Si la trillorma discreta menida en el documento es file de la información contenida en e

Principios básicos

Teorema (Principio de las cajas o de distribución)

Si se reparten n objetos en m cajas y n > m, entonces alguna caja recibe más de un elemento.

Teorema

Si n objetos se distribuyen en m cajas y n > mp, entonces alguna caja recibe más de p elementos.

Ejemplo. Dada una palabra de 28 letras alguna de éstas habrá de estar necesariamente repetida.

Teorema (Principio de las cajas generalizado)

Si n objetos se distribuyen en m eaiss entonces alguna caia recibe al menos ELAMA O ENVIA WHATSAPE. 689 43 O ENVIA WHATSAPE. 689 43 O ENVIA WHATSAPE. 689 43

vww.raitagena99.com no se hace rasparsable de la información co Si la tillion na cliar contenta de la contenta de l

Variaciones

Definición

Llamaremos variación de m elementos tomados de n en n (n < m) a cada una de las selecciones ordenadas de n objetos distintos, tomados de un conjunto de *m* objetos.

Observación

Una variación de m elementos tomados de n en n (n < m) es una aplicación invectiva $f: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$

Teorema

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n

Permutaciones

Definición

Llamaremos permutación de *n* elementos a cada una de las variaciones de n elementos tomados de n en n.

Observación

Una permutación de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es una aplicación biyectiva

$$\sigma: \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Teorema

El número de permutaciones de n elementos es $P_n = n!$.

Ejemplo. El número de palabras distintas que pueden formarse con las

Combinaciones

Definición

Llamaremos combinación de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones, no ordenadas y sin repeticiones, de n objetos, tomados de un conjunto de *m* objetos.

Teorema

El número de combinaciones de m elementos tomados de n en n es igual a

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Ejemplo. El número de subconjuntos de 4 elementos de un conjunto de 27

/FRWYAT54F588945F4976

Números combinatorios

Definición

Se llama número combinatorio n sobre k al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n. Se denota $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Se define

$$\binom{n}{0} = 1$$
. Obsérvese que $\binom{n}{n} = 1$.

_ . . .

Propiedades

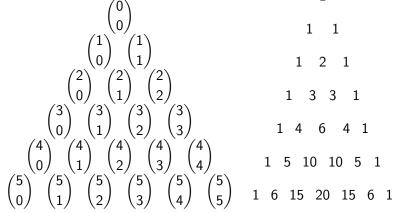
i)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
,
ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

iii) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n-1}b^n$ Cartagena99

Cartagena99

WWW. gartágena 99. com ho se hace rasponsable de la información contenida en el su la información contenida

El triángulo de Pascal



Cartagena99 ELAMAS PENTILS WHARES FOR THE TOO BY THE TOO BY THE CARTES AFFE SON STAPPS OF THE CA

VWW. cartagenagg. com no se hace responsable de la información contenida en el se la información contenida e

Variaciones con repetición

Definición

Llamaremos variación con repetición de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones ordenadas de n objetos, tomados de un conjunto de m objetos.

Observación

Una variación con repetición de m elementos tomados de n en n es una aplicación $f: \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.

Teorema

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

vww.cartagena99.com no se hace rasponsable da la información contenida en a Si la miliornia districción prida en el obclimiento es filcita d'esiona iblenes o dereché

Permutaciones con repetición

Definición

Llamaremos permutación con repetición de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ elementos en la que cada elemento a_i se repite n_i veces, a cada uno de los distintos grupos ordenados que con ellos se puede formar.

Teorema

El número de permutaciones con repetición de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ elementos es $PR_n^{n_1,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_{\nu}!}$.

Ejemplo. El número de palabras distintas que pueden formarse con las letras de la palabra ABECEDARIO es $\frac{4!}{2!2}$.

Cartagena99

AMESPENTIC WHARESEP! PALINER RIVATE LES SONS FARS

Números multinómicos

Observación

A los números $\binom{n}{k_1,\dots,k_m}=\frac{n!}{n_1!\dots n_k!}$ se les llama números multinómicos. Se tiene que

i)
$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_n} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{k_n}{k_n}$$
,

- ii) $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} {n \choose k_1, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}$
 - (Teorema del multinomio).

Cartagena99 ELAMES PENTIL WHARES PLUS 188 145 ENLINE PRIVATE AFFE 889 15 FAPRS C

vww.cartagena99.com no se hace rasponsable de la información contenida en e Si la minima discretamento en el declumento es fillete o resional blenes o detectio

Combinaciones con repetición

Definición

Llamaremos combinación con repetición de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones, no ordenadas, de n objetos, tomados de un conjunto de *m* objetos.

Observación

El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de n

es $CR_{m,n} = C_{m+n-1,n} = \frac{m+n-1!}{n!(m-1)!}$. Si necesariamente se elige al menos un elemento de cada tipo el resultado

es $CR_{m,n-m} = C_{n-1,n-m} = \frac{n-1!}{(n-m)!(m-1)!}$.

PLANSES PARTICULARES PL ONLINER RATE ALES SONS TA

Cuadro resumen

Selecciones	Ordenadas	No ordenadas
Sin repetición	$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
Con repetición	n ^k	$\binom{n-1+k}{k}$

Cartagena99

Desórdenes

Definición

Llamaremos desorden o desarreglo a una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(i) \neq i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema

El número de desórdenes de n elementos es

$$d_{n} = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^{n}\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= n! - n! + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^{n}\frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right).$$
Cartagenago

ONI INFERRIVATE LESSONS FOR SO

no se pare responsable de la información contenida e

KEL WHATE HEE SONE FAR

Particiones

Definición

Llamaremos número de Stirling de segunda clase S(n, k) al número de particiones de un conjunto X con n elementos, en k subconjuntos no vacíos.

Propiedades

i)
$$S(n,1) = 1$$
, ii) $S(n,n) = 1$, iii) $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

Observación

El número de aplicaciones suprayectivas de un conjunto de m elementos en

un conjunto de *n* elementos es
$$T(m,n) = n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m.$$

Cartagena99

GLAMES PARTIC WHARES PLY TOBY PALLINER RAY AT EAFE SONE FARE

and a charactair a charactair a charactair ann an ac an a

Cuadro resumen: Selecciones y distribuciones

		n phietos distintes
no ordenadas con repetición	$\binom{m-1+n}{n}$	n objetos idénticos
ordenadas con repetición	m ⁿ	n objetos distintos
no ordenadas sin repetición	$\binom{m}{n}$	n objetos idénticos (máx. 1 por caja)
ordenadas sin repetición	$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$	n objetos distintos (máx. 1 por caja)
m elementos tomados de n en n		Distribuciones de <i>n</i> objetos en <i>m</i> cajas
Selecciones de		

Cartagena99

PALLINGER WHATES FOR THE TOP OF T

MX. Garage Resident of the later relations of the compact of the c