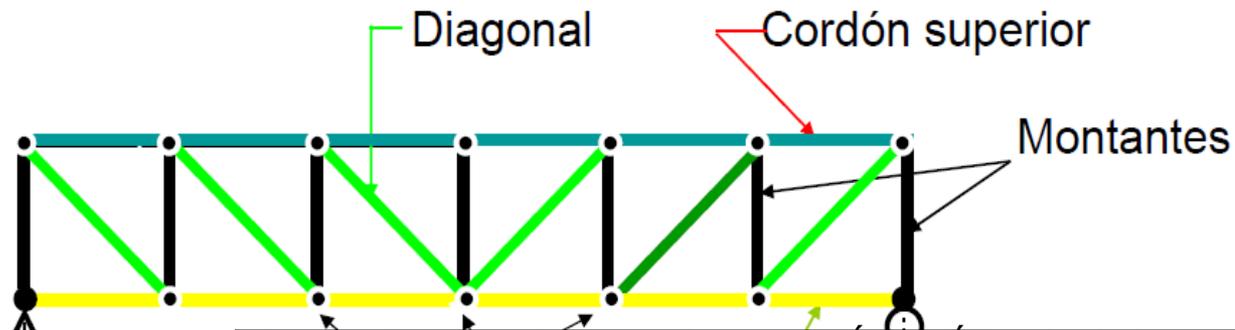


# Tema 4: Estructuras articuladas planas

## Definiciones y conceptos

Cuando necesitemos salvar luces importantes ( $> 10$  ó  $15$  m), o necesitamos vigas de gran canto, puede resultar más económico utilizar estructuras articuladas en celosía que vigas de alma llena

Terminología estructural de las estructuras articuladas

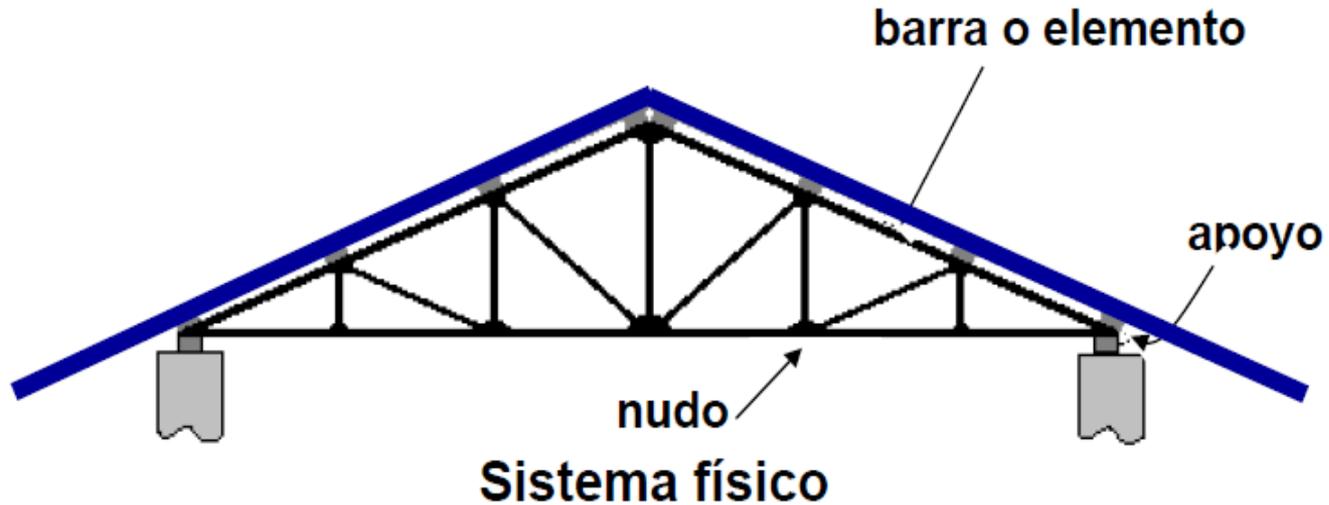


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

EGZ



**IDEALIZACIÓN**

**Sistema estructural**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

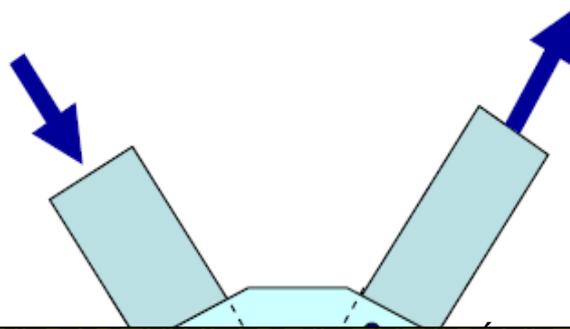
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Cartagena99**



# Hipótesis de diseño

- **Las barras se unen unas a otras mediante uniones flexibles**
  - Los ejes de las barras son concurrentes en un punto
  - En la realidad, esta unión proporciona alguna rigidez (tensiones secundarias)



Cartagena99

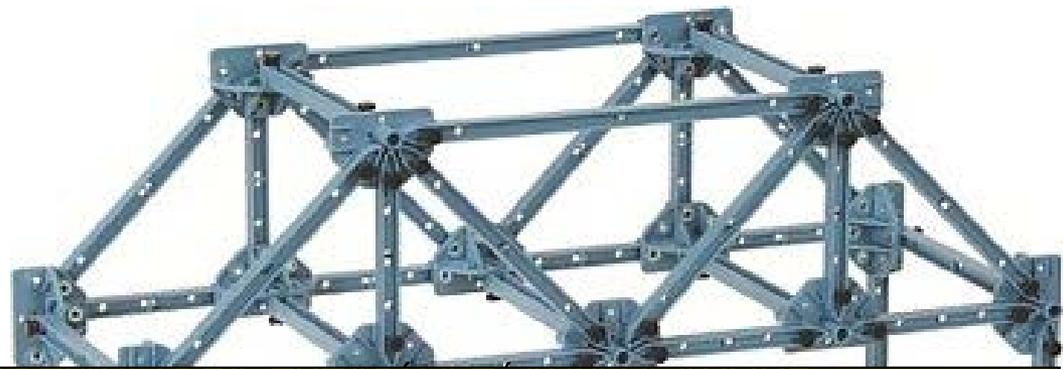
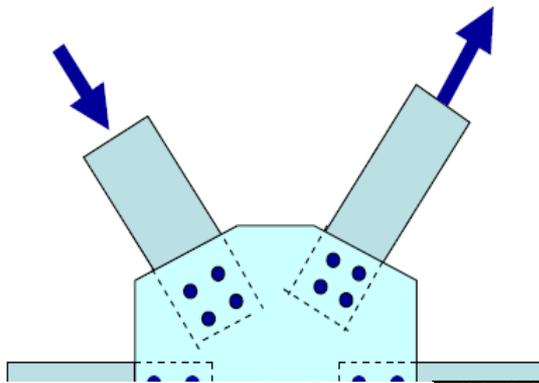
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Hipótesis de diseño

- **Las barras se unen unas a otras mediante uniones flexibles**
  - Los ejes de las barras son concurrentes en un punto
  - En la realidad, esta unión proporciona alguna rigidez (tensiones secundarias)



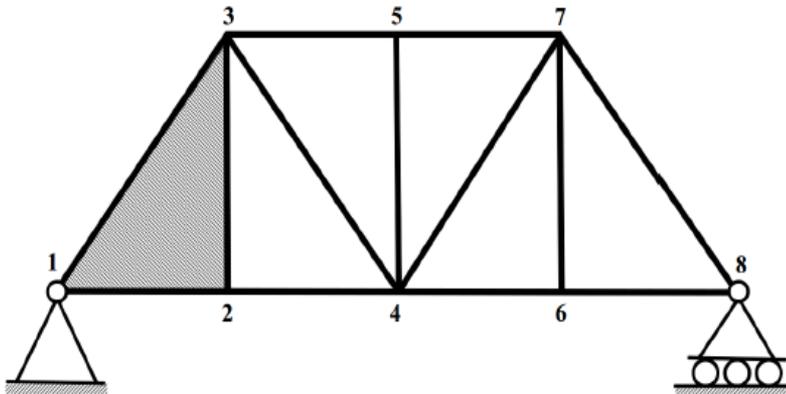
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

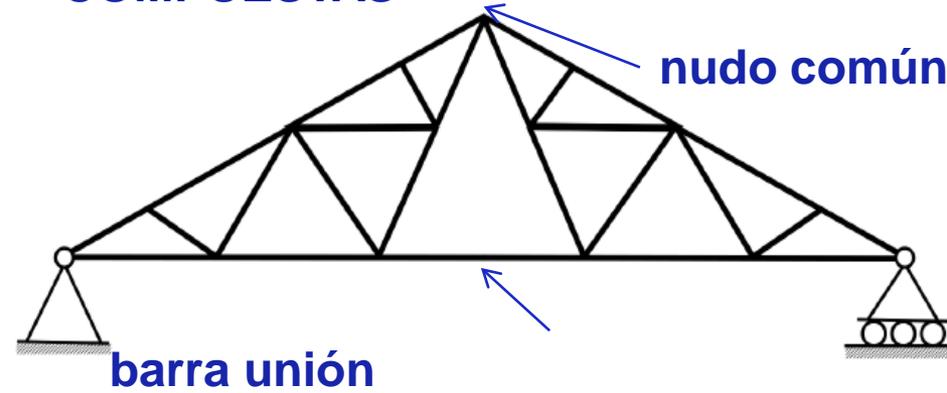
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## ESTRUCTURAS ARTICULADAS SIMPLES



## ESTRUCTURAS ARTICULADAS COMPUESTAS



## ESTRUCTURAS ARTICULADAS COMPLEJAS

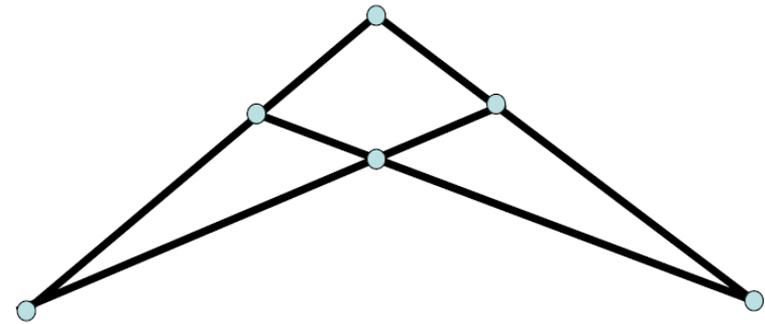


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

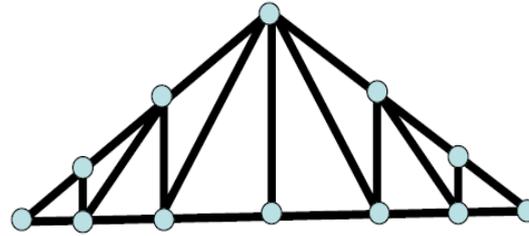
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

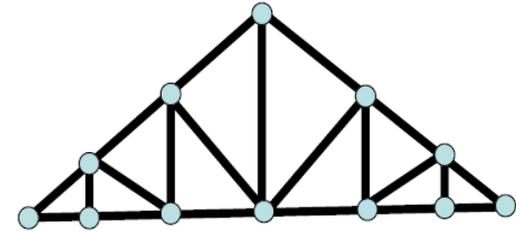
Cartagena99



Luces cortas (<20 m)  
Plantas en las que se requiere espacio vertical

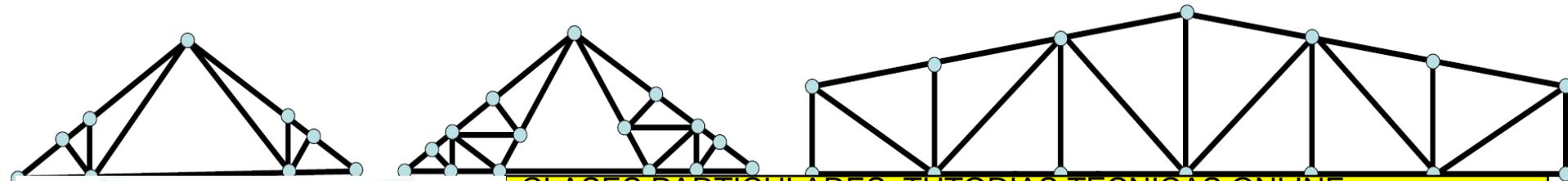


Howe



Pratt

Luces moderadas (20-30 m)  
Su diseño puede modificarse para conseguir techos planos

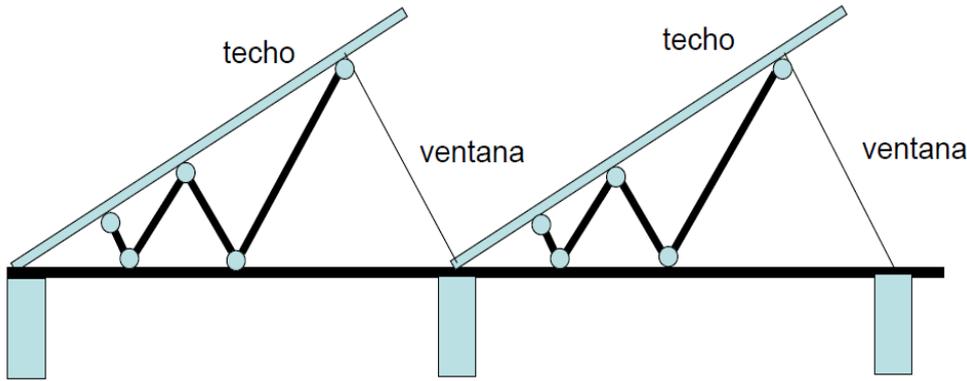


**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

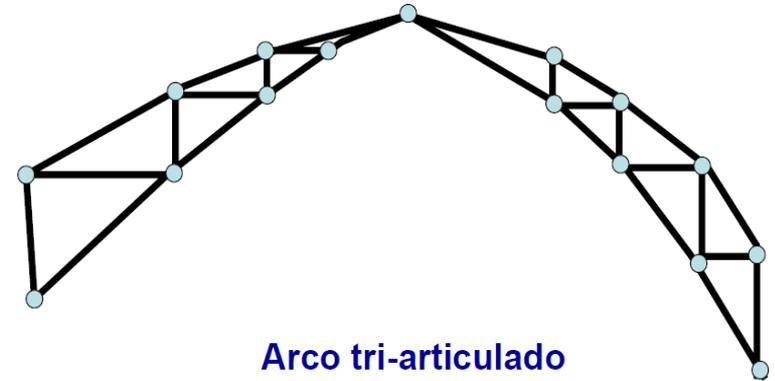
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



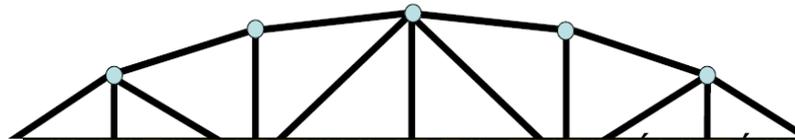
En diente de sierra

Cuando la localización de pilares no es problema  
 Cuando se precisa iluminación natural



Arco tri-articulado

Alturas altas y luces grandes



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Garajes y hangares aeronauticos

Cartagena99

# Estructuras articuladas isostáticas o estrictamente completas

Son aquéllas en las que pueden determinarse los esfuerzos axiles en todas las barras utilizando, exclusivamente, las ecuaciones de la estática. Si denominamos **b** al número de barras de la Estructura, **n** al número de nudos de la misma y **c** al número de coacciones externas, podemos establecer:



Número de incógnitas por barra: 4

Número de incógnitas:  $4b$  + Coacciones externas:  $c$  =  $4b+c$

Número de ecuaciones que podemos plantear:

Equilibrio de una barra: 3 ( $\Sigma H=0$ ,  $\Sigma V=0$  y  $\Sigma M=0$ ) }  $3b+2n$

Equilibrio de un nudo: 2 ( $\Sigma H=0$  y  $\Sigma V=0$ )

El problema es estáticamente determinado cuando:

$$4b+c=3b+2n$$



$$b=2n-c$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

SI  $GDF = 0$  (isostática ?)

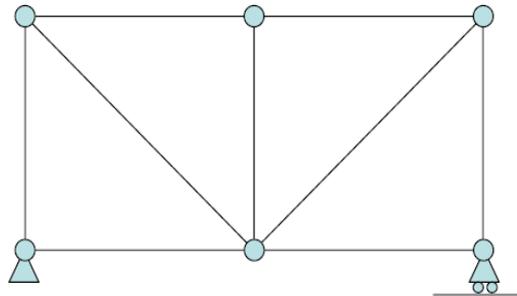
SI  $GDF > 0$  (hiperestática)

# Estructuras articuladas isostáticas o estrictamente completas

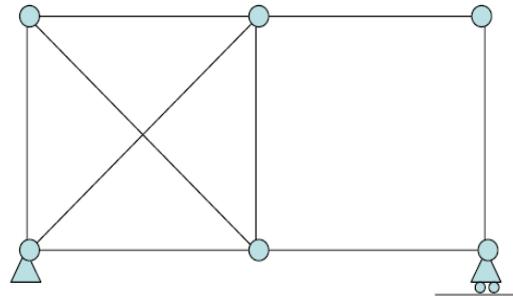
$$b=2n-c$$



Condición necesaria, pero no suficiente



$b=9, n=6, c=3$  ¡Se cumple la condición!



$b=9, n=6, c=3$

¡Se cumple también la condición

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

## ➤ Método de equilibrio de los **nudos**:

- Método analítico
- Método gráfico (Cremona)

## ➤ Método de equilibrio de las **secciones**

Cartagena99

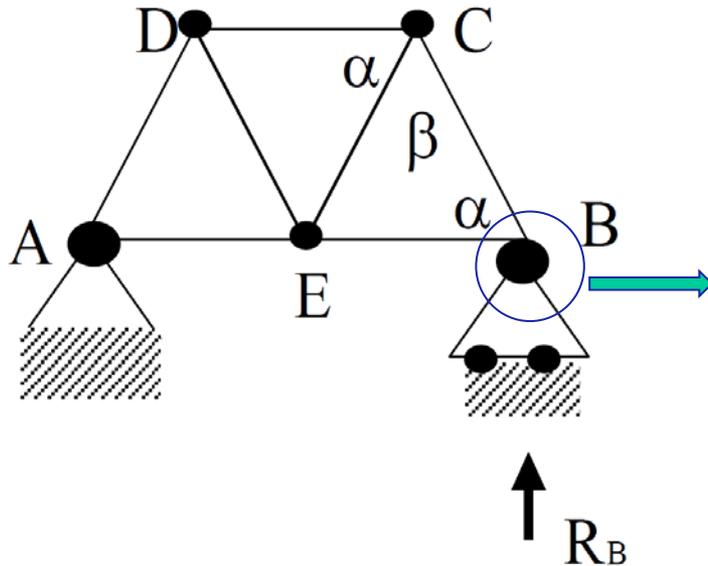
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

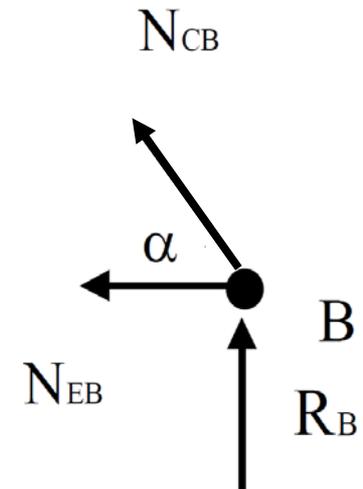
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

- Método de equilibrio de los nudos:
  - Método analítico



**Nudo B:**  
reacción  $R_B$   
acción barra CB  
acción barra EB



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

## ➤ Método de equilibrio de los nudos:

### • Método analítico

- Plantee las ecuaciones de equilibrio en cada nudo
- Tenga en cuenta las posibles simetrías
- Identifique las barras que no sufren ningún esfuerzo
  - (i) cuando sólo dos barras de diferentes direcciones coincidan en un nudo, y éste no está exteriormente cargado, ninguna de las dos barras sufre esfuerzo axial

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

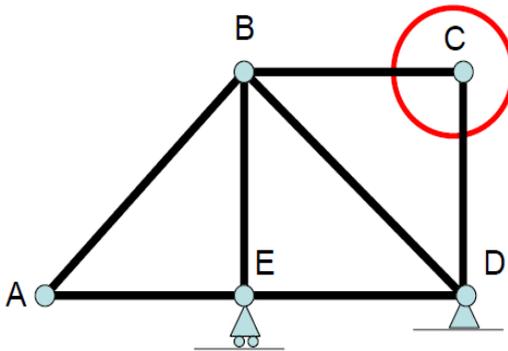
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

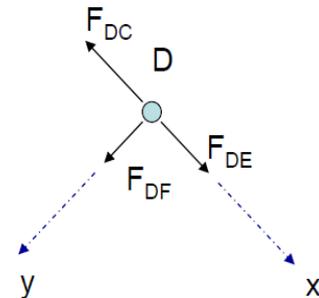
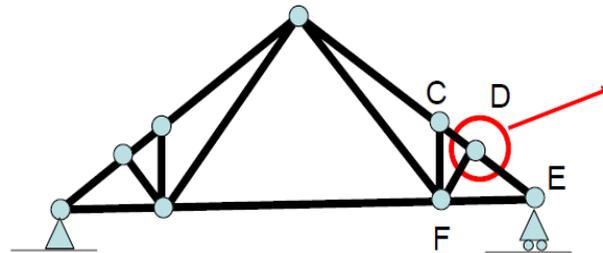
# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

- Método de equilibrio de los nudos:
  - Método analítico

Dos barras coincidentes en un nudo no cargado (nudo C):



Tres barras coincidentes en un nudo no cargado (nudo D) siendo dos de ellas colineales:



Cartagena99

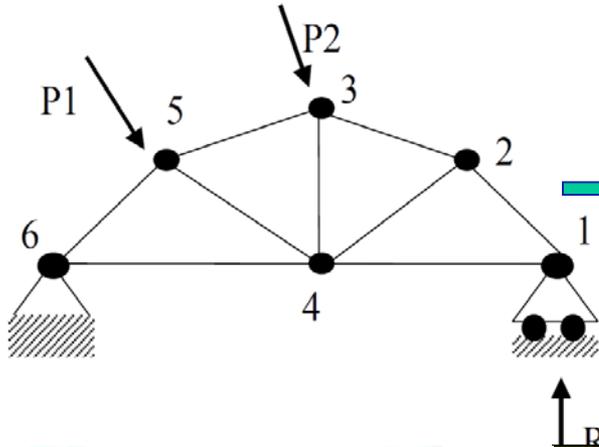
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

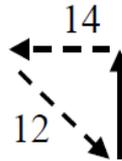
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

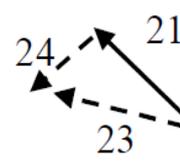
- Método de los nudos:
  - Método gráfico (Cremona)



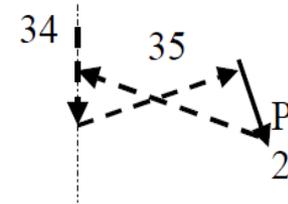
NUDO 1



NUDO 2



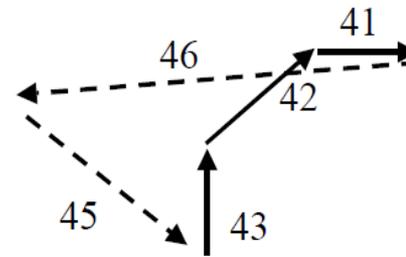
NUDO 3



34-Tracción

35-Compresión

NUDO 4



46 Tracción

45 Compresión

NUDO 5

NUDO 6

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

54

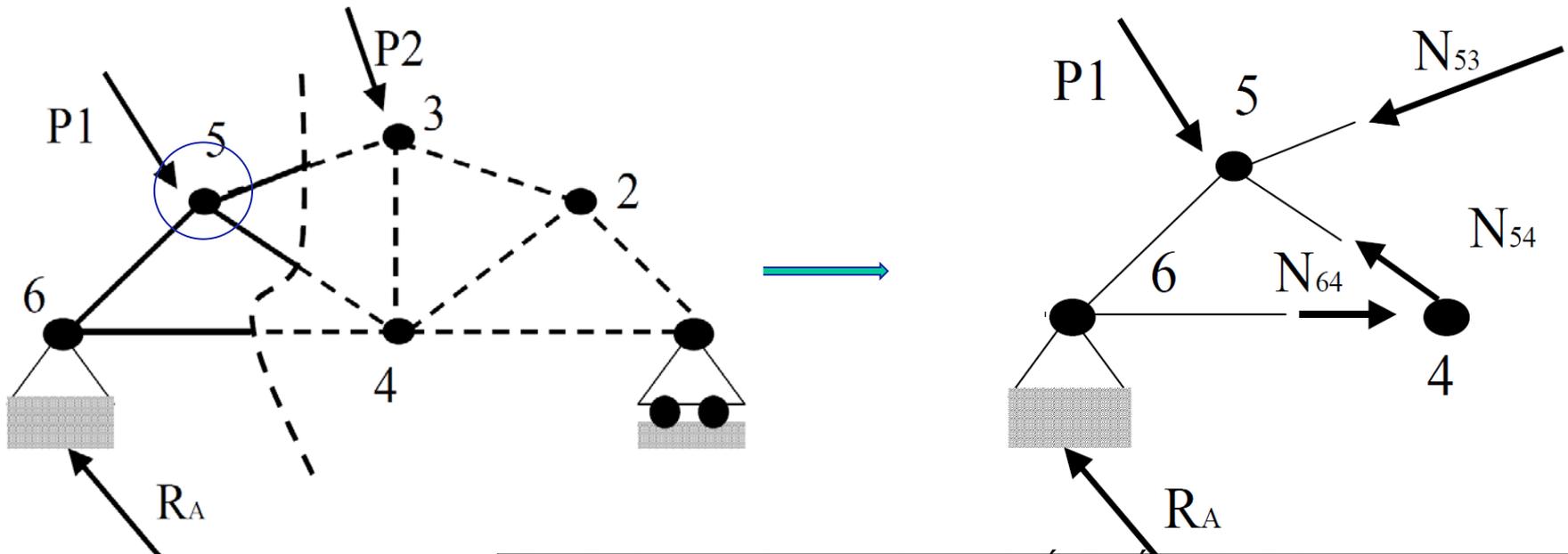
56

64

Cartagena99

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

## ➤ Método de equilibrio de las secciones



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

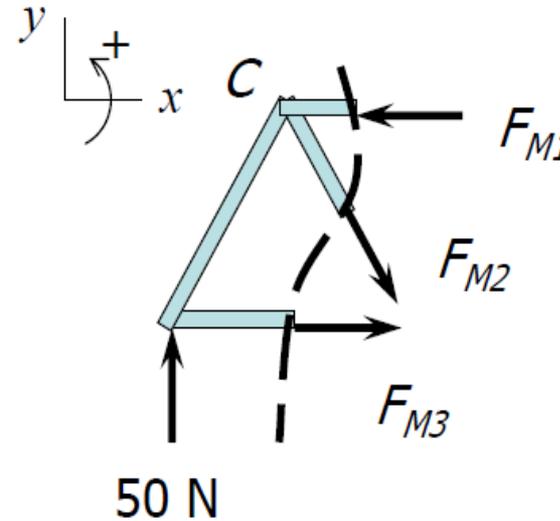
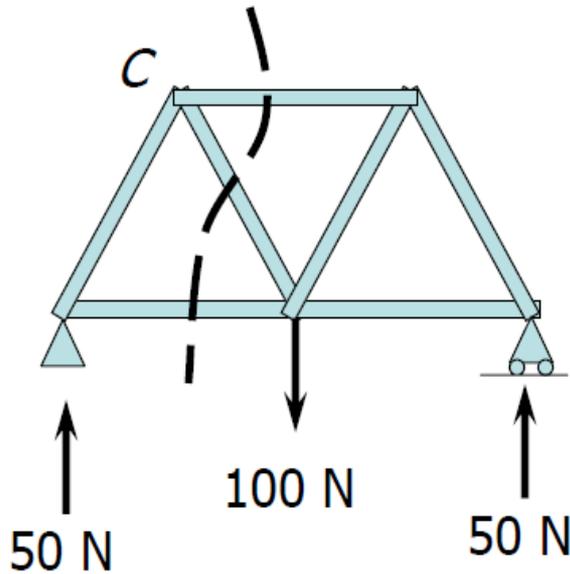
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

➤ Método de equilibrio de las secciones:

## Ejemplo



$$\sum F_x = 0; \quad 50 - F_{M2} \cos 30 = 0; \quad F_{M2} = 57,7 \text{ N}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\sum F_x = 0; \quad -F_{M1} + 57,7 \cos 60 + 28,9 = 0; \quad F_{M1} = 57,7 \text{ N}$$

**Cartagena99**

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

Para calcular desplazamientos en nudos de una estructura articulada, aplicaremos el Principio de los Trabajos Virtuales (fuerzas virtuales). Para ello, consideraremos como Sistema 0 el sistema estructural real, con sus cargas, del que partimos, y como Sistema I el mismo sistema estructural pero, ahora, sólo sometido a una carga virtual (unidad) en el nudo y dirección en que deseamos obtener el desplazamiento.

$$\sum F_i^\delta \delta_i + \sum R_i \Delta_i = \sum \int_A^B \left[ N^0 N^I \frac{ds}{EA} + M^0 M^I \frac{ds}{EI} + T^0 T^I \frac{ds}{GA_C} + M_T^0 M_T^I \frac{GI_0}{GK} \right]$$

↓  
 Fuerzas (momentos)  
 virtuales -unitarios

Para **estructuras articuladas**, el único **esfuerzo** a considerar es el **axil**:

$$\sum F_i^\delta \delta_i + \sum R_i \Delta_i = \sum \int_A^B \left[ N^0 N^I \frac{ds}{EA} \right]$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$EA_i$

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

Para **estructuras articuladas**, el único **esfuerzo** a considerar es el **axil**:

$$\sum F_i \delta_i + \sum R_i \Delta_i = \sum \int_A^B \left[ N^0 N^I \frac{ds}{EA} \right]$$



**Esfuerzo axil constante** en toda la barra

$$\sum F_i \delta_i + \sum R_i \Delta_i = \sum N^0 N^I \int_A^B \left[ \frac{ds}{EA} \right] = \sum N^0 N^I \frac{L_i}{EA_i}$$

**Efectos térmicos y faltas de ajuste:**

$$\Delta T_i \text{ y } \delta e_i$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

También pueden calcularse los desplazamientos utilizando el Teorema de Castigliano

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i$$

Sin embargo, puede haber casos en los que, además de cargas mecánicas, algunas barras experimenten un cambio de temperatura o que, alguna de ellas, presente un error de fabricación (que haya quedado más corta o más larga que la longitud requerida). En estas condiciones, la energía elástica del sistema estructural se expresa como:

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} + \sum_{barras \text{ con error}} N_i \partial_i^e + \sum_{barras \text{ con } \Delta T} N_i \partial_i^{\Delta T}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

Sin embargo, puede haber casos en los que, además de cargas mecánicas, algunas barras experimenten un cambio de temperatura o que, alguna de ellas, presente un error de fabricación (que haya quedado más corta o más larga que la longitud requerida).

En estas condiciones, la energía elástica del sistema estructural se expresa como:

$$U = \sum_{\text{barras}} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} + \sum_{\text{barras con error}} N_i \partial_i^e + \sum_{\text{barras con } \Delta T} N_i \partial_i^{\Delta T}$$

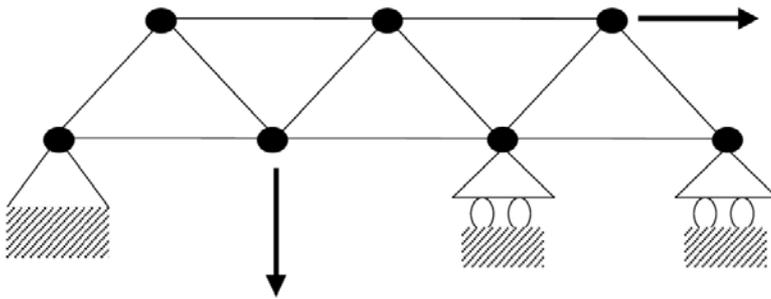
$\partial_i^e$  = error de ejecución de la barra  $i$



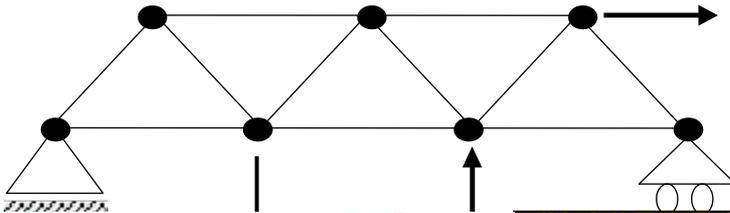
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas hiperestáticas

## ➤ Hiperestatismo externo: coacciones “de más”



La condición a imponer es un movimiento vertical del punto de aplicación de  $R$  (el inicial apoyo) sea nulo. De esta condición se obtienen el valor de  $R$  pudiendo resolver la estructura como isostática.



**Cartagena99**

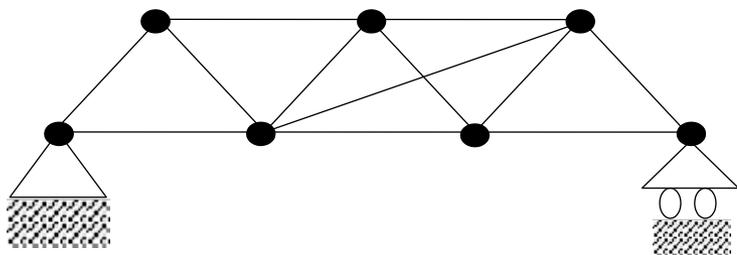
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

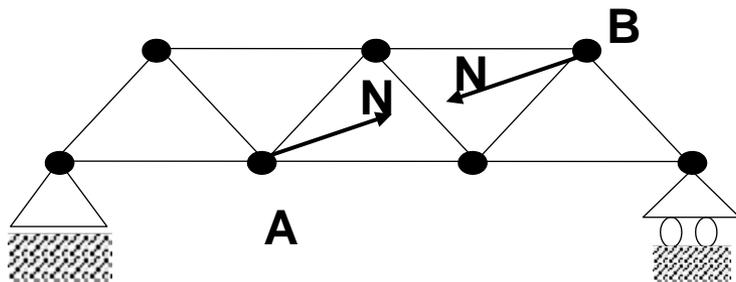
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Métodos de análisis de estructuras articuladas hiperestáticas

## ➤ Hiperestatismo interno: barras “de más”



Se elimina el hiperestatismo interno sustituyendo una barra por su efecto sobre la estructura, que es el de un par de fuerzas iguales y opuestas que actúan en los nodos A y B a los que la barra está unida.



Estas fuerzas actuantes sobre los nodos A y B (acción de la barra contra el nudo) son iguales a las fuerzas actuantes en los extremos de la barra (acción del nudo contra la barra).

La condición evidente de compatibilidad a

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

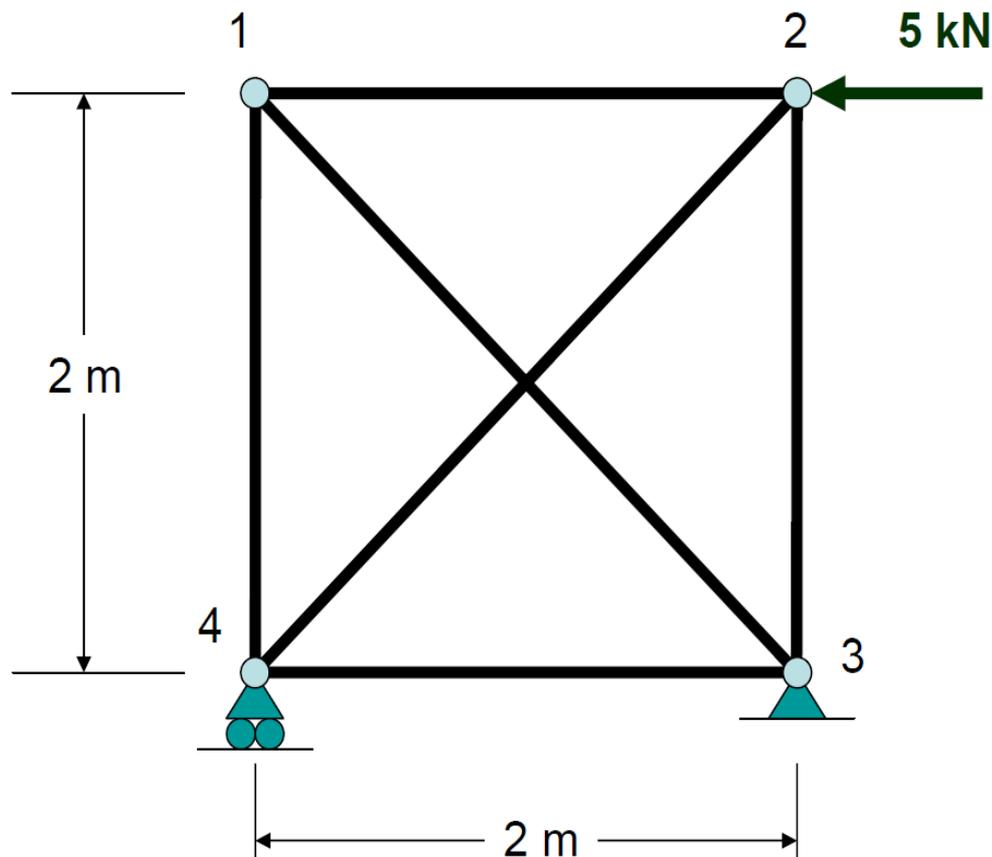
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

barra obtenido aplicando la ley de Hooke.

Cartagena99

# Métodos de análisis de estructuras articuladas hiperestáticas

Ejemplo

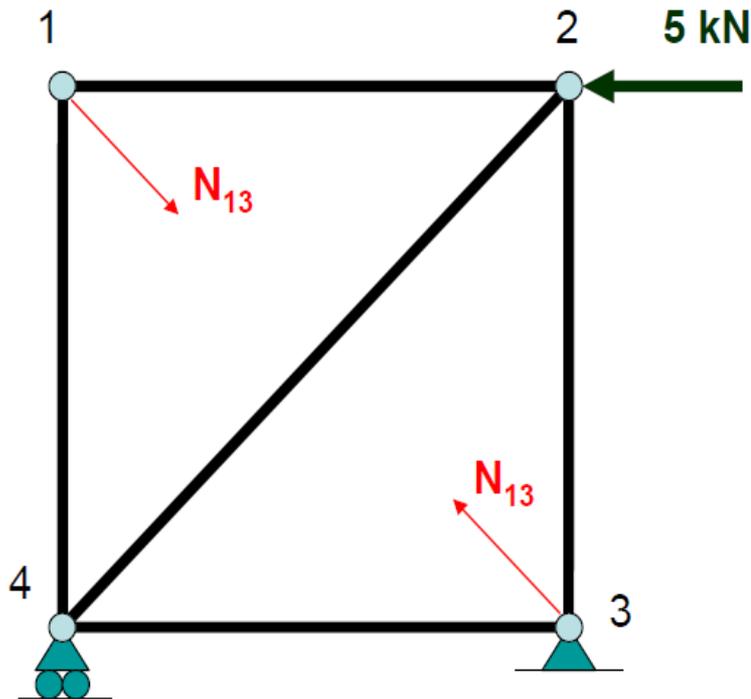


Cartagena99

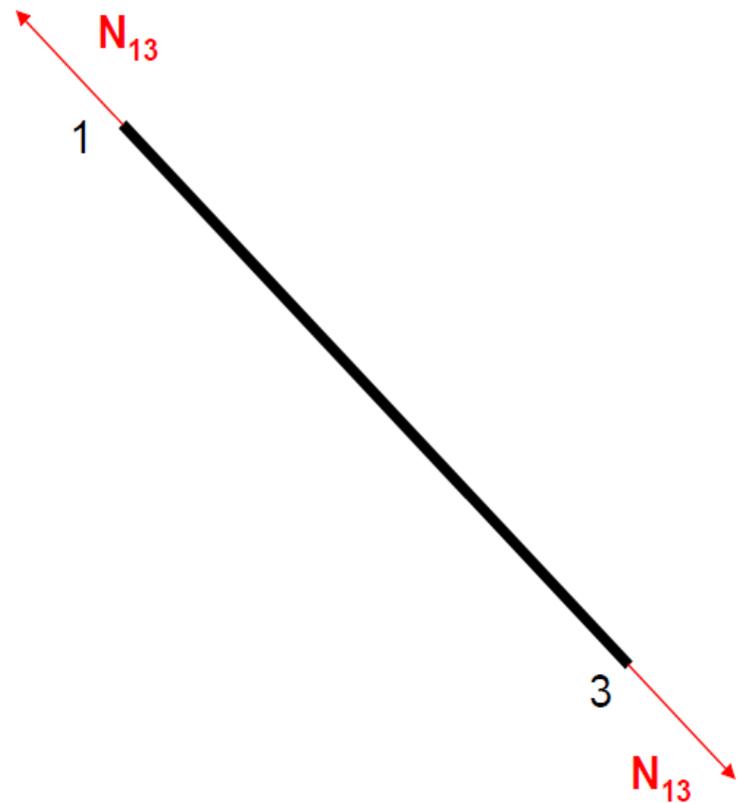
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Sistema 0  
(isostático)



Sistema 2

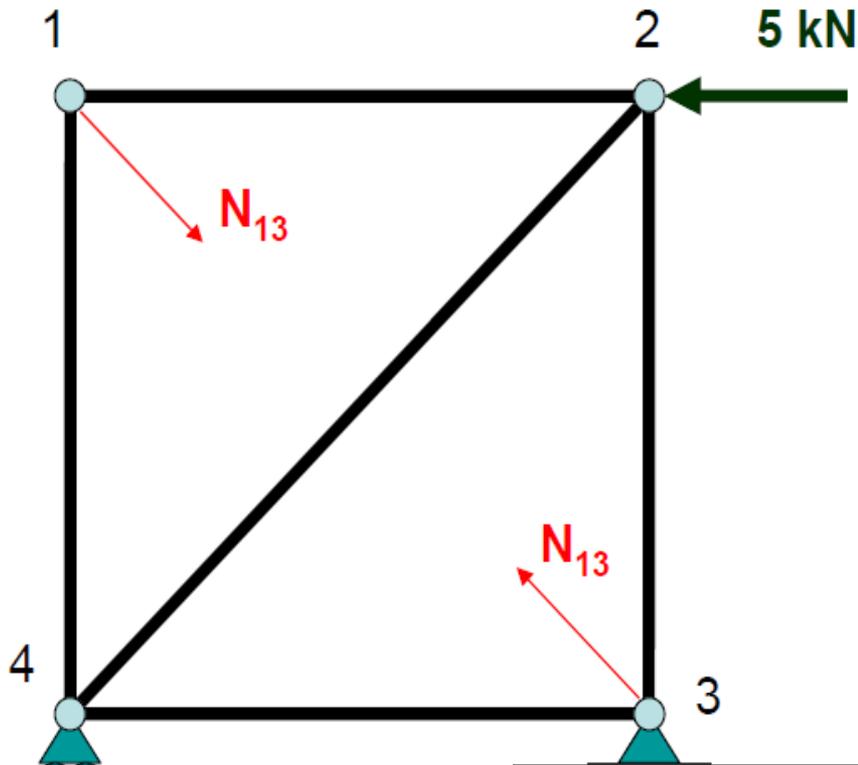
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 0



**Barra**

1-2

2-3

3-4

4-1

2-4

**Axil**

$-N_{13}/\sqrt{2}$

$5-N_{13}/\sqrt{2}$

$5-N_{13}/\sqrt{2}$

$-N_{13}/\sqrt{2}$

$-5\sqrt{2}+N_{13}$

**Cartagena99**

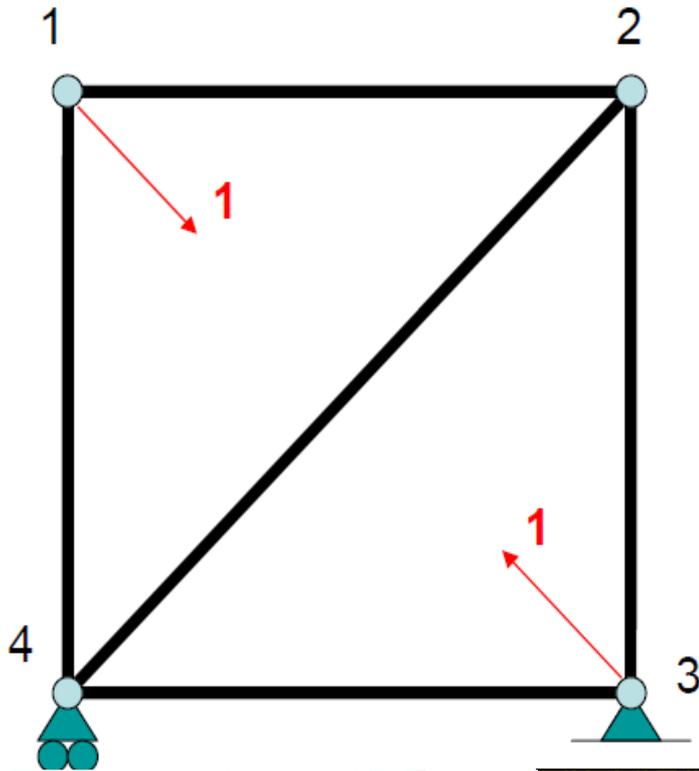
(15051100)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 1 (Auxiliar para PTV)



Barra	Axil
1-2	$-1/\sqrt{2}$
2-3	$-1/\sqrt{2}$
3-4	$-1/\sqrt{2}$
4-1	$-1/\sqrt{2}$
2-4	1

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Estado 0

Barra	Axil
1-2	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-3	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
3-4	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
4-1	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-4	$-5\sqrt{2}+N_{13}$

Estado 1

Barra	Axil
1-2	$-1/\sqrt{2}$
2-3	$-1/\sqrt{2}$
3-4	$-1/\sqrt{2}$
4-1	$-1/\sqrt{2}$
2-4	1

$$\Delta_{13}^0 (\text{acercamiento}) = \frac{1}{EA} \sum_{\text{barras}} N_i^0 N_i^I L_i = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{N_{13}}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot 2 + \left( 5 - \frac{N_{13}}{\sqrt{2}} \right) \cdot 2 \cdot 2 \right) + 1 \cdot (-5\sqrt{2} + N_{13}) \cdot 2\sqrt{2} \right]$$

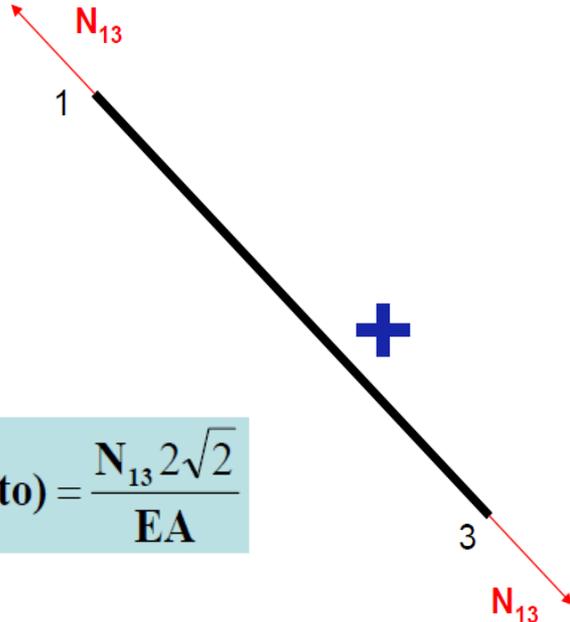
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Por la ley de Hooke (Sistema 2)



$$\Delta_{13}^2 (\text{alejamiento}) = \frac{N_{13} 2\sqrt{2}}{EA}$$

$$\Delta_{13}^0 (\text{acercamiento}) = \frac{1}{EA} [N_{13} (4 + 2\sqrt{2}) - 10(2 + \sqrt{2})]$$

$$\Delta_{13}^0 (\text{acercamiento}) = -\Delta_{13}^2 (\text{alejamiento})$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70