Departamento de Automática

Universidad de Alcalá

Ingeniería de Control I
Tema 6
Diagramas de flujo

6. Diagramas de flujo.

- Representación en DF
- Simplificaciones
- Fórmula de Mason
- Formas de Kalman
- Sistemas MIMO

Bibliografía

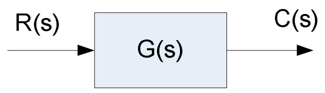
- Señales y Sistemas. OCW-UC3M
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo
- Feedback control systems. J.V. de Vegte.

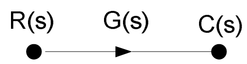
Objetivos

- Representación externa de los sistemas mediante diagramas de flujo
- Operaciones con diagramas de flujo

DF

- Es una representación gráfica de las ecuaciones algebraicas que relacionan las señales y sistemas que describen un sistema físico
- Tienen gran capacidad de representación: puede representar las ecuaciones de Laplace de un sistema o un DB
- Se basa en dos elementos simples:
  - Nodos: representan las variables
  - Arcos o ramas orientadas: representan las FT (transmitancias)





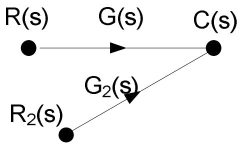
Definiciones

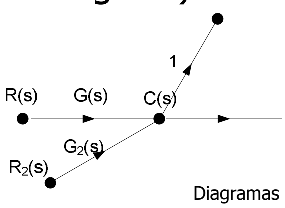
- Nodo: punto que representa una variable
- Rama: arco dirigido que une dos nodos
- Transmitancia: ganancia o FT entre dos nodos
- Nodo fuente o de entrada: del que solo salen ramas, corresponde con entradas al sistema
- Nodo sumidero: al que solo llegan ramas, corresponde con salidas del sistema
- Nodo mixto: al que entran y salen ramas, representan las variables intermedias.

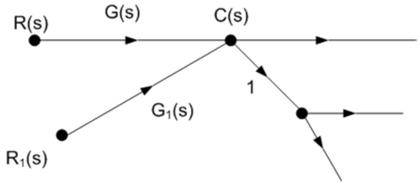
- Camino o trayecto: es un recorrido de ramas en la dirección de los arcos
- Camino directo: es un trayecto de una fuente a un destino sin pasar 2 veces por el mismo nodo
- Ganancia de un camino: producto de las ganancias que se presentan en un trayecto
- Lazo o bucle: trayecto que parte y termina en el mismo nodo sin pasar dos veces por ningún otro nodo.
- Autobucle: es una rama que sale y llega al mismo nodo.

Propiedades de DF

- Transmisión: cualquier nodo transmite su valor a las ramas que parten de él
- Adición: el valor de la variable de un nodo es la suma de los productos de ganancias por variables de los nodos de las ramas que llegan a él
- Convertibilidad de un nodo mixto: cualquier variable de un nodo mixto se puede convertir en sumidero o fuente (de otro grafo) con una rama de valor 1

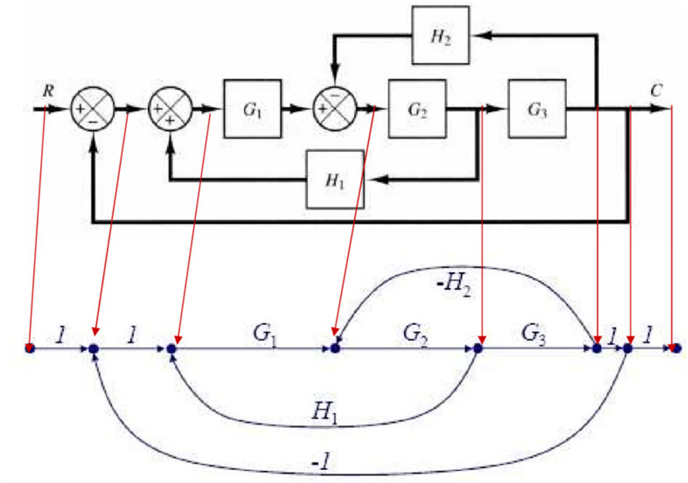






Ej

- DF a partir de DB



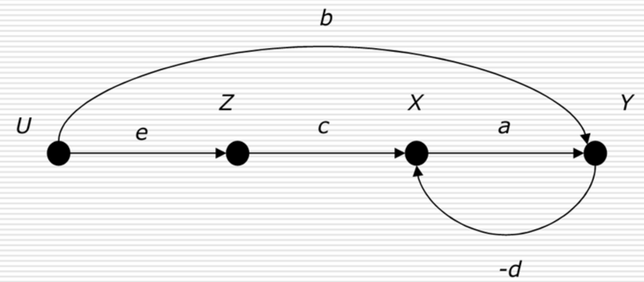
Ej.

- DF a partir de ecuaciones

$$Y(s) = a \cdot X(s) + b \cdot U(s)$$

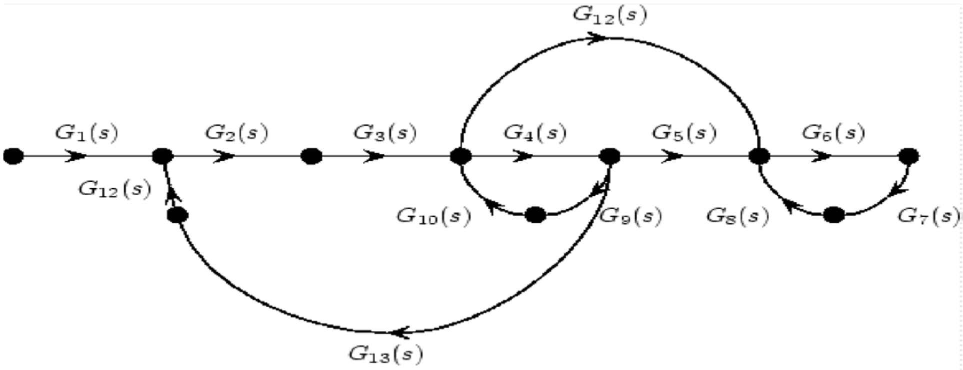
$$X(s) = c \cdot Z(s) - d \cdot Y(s)$$

$$Z(s) = e \cdot U(s)$$

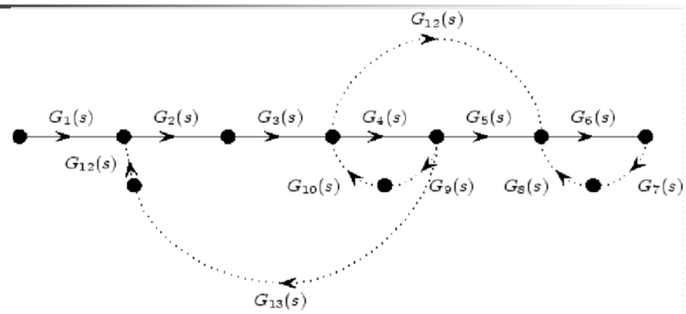


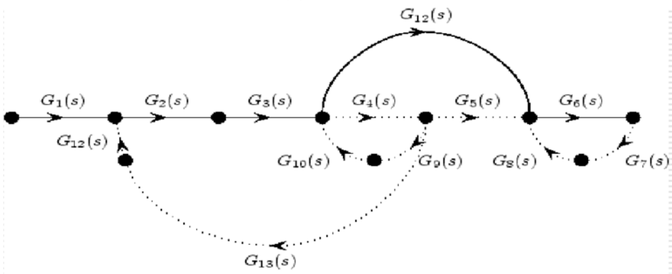
Ej.

- Dado DF:



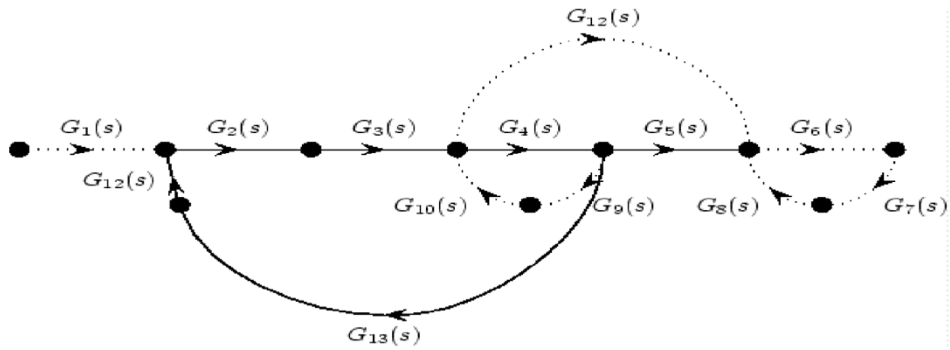
Caminos directos





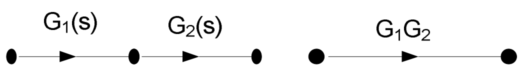
Lazos

- Hay más?

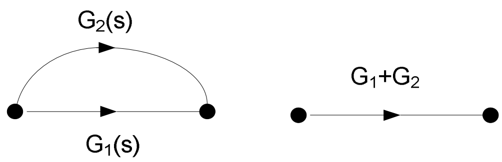


Simplificación por distensión de nudos

- Ramas en serie: se sustituyen por una sola cuyo valor sea el producto de todas

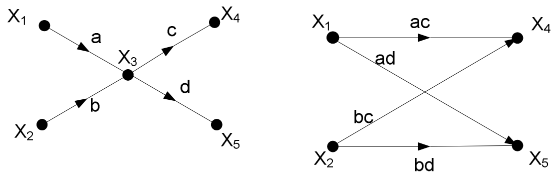


- Ramas en paralelo: se sustituyen por una sola cuyo valor sea la suma de todas



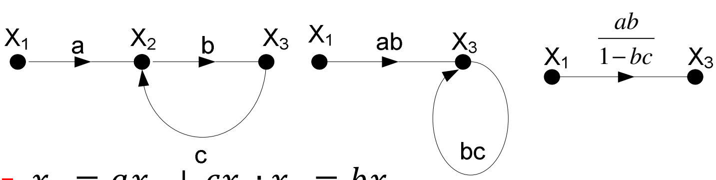
Simplificación

- Nudos mixtos serie-paralelo: se puede suprimir un nodo utilizando las ecuaciones



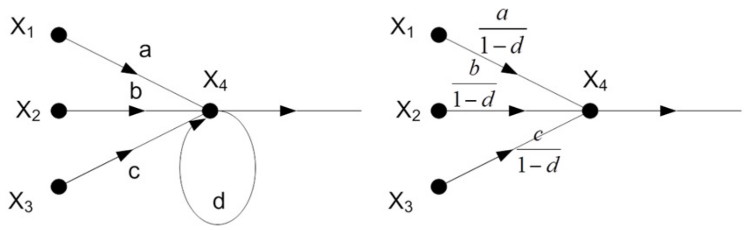
  - $x_3 = ax_1 + bx_2;\ x_4 = cx_3;\ x_5 = dx_3$
  - $x_4 = cax_1 + cbx_2; x_5 = dax_1 + dbx_2$

- Ramas en bucle cerrado: se sustituye por una rama con la fórmula de realimentación



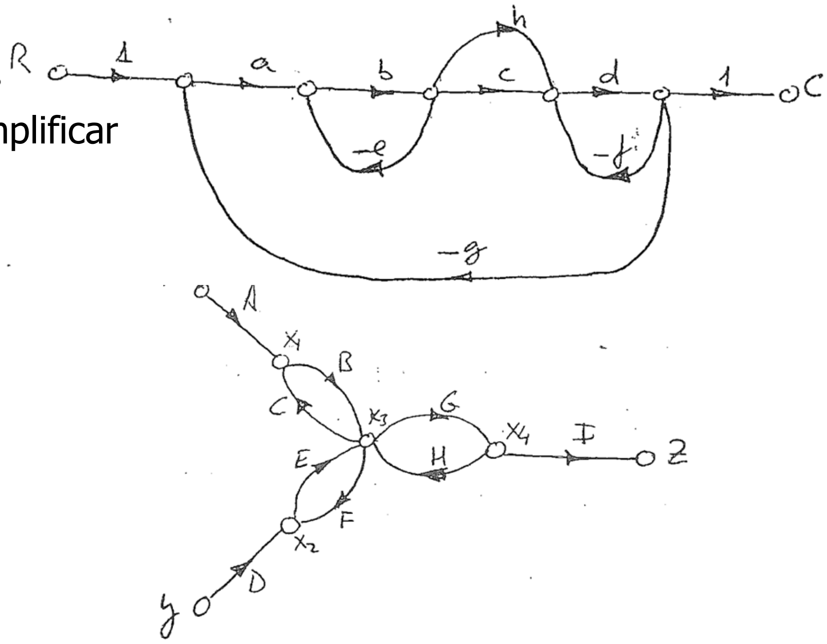
  - $x_2 = ax_1 + cx_3; x_3 = bx_2$
  - $x_3 = abx_1 + bcx_3 \Rightarrow (1 - bc)x_3 = abx_1$

- Ramas en autobucle: se puede eliminar dividiendo cada rama que entra en el nodo con autobucle por $(1\text{-}G_{auto})$
  - $x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$
  - $x_4 = \frac{ax_1+bx_2+cx_3}{1-d} = \frac{a}{1-d}x_1 + \frac{b}{1-d}x_2 + \frac{c}{1-d}x_3$



Ej.

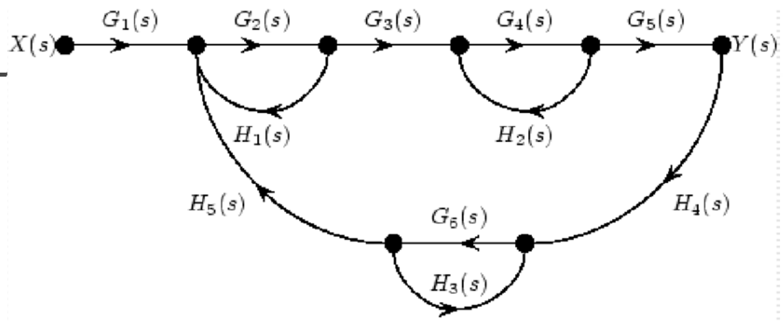
- Simplificar



Regla de Mason

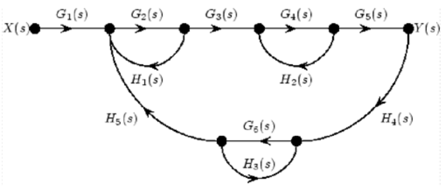
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_i T_i \Delta_i}{\Delta}$
  - T_i es el la ganancia del trayecto directo i-ésimo
  - Δ es el determinante o ecuación característica del sistema:
    - $\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{efg} L_e L_f L_g + \cdots$
      - $\sum_a L_a$ es la suma de todos los lazos o bucles del diagrama de flujo
      - $\sum_{bc} L_b L_c$ es la suma del producto de las ganancias de los lazos disjuntos 2 a 2 (sin nodos comunes).
      - $\sum_{efg} L_e L_f L_g$ es la suma del producto de las ganancias de los lazos disjuntos 3 a 3
  - Δ_i es el cofactor del trayecto i-ésimo, el determinante con los lazos que no pertenecen a ese trayecto (de Δ se eliminan los términos correspondientes a nodos de T_i)

Ej.



- Localización de lazos y cálculo de Δ.
  - $L_1 = G_2 H_1; L_2 = G_4 H_2; L_3 = G_6 H_3; L_4 = G_2 G_3 G_4 G_5 H_4 G_6 H_5$
  - $\Delta = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \\ +(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) \\ -(L_1 L_2 L_3) \end{array} \right\}$

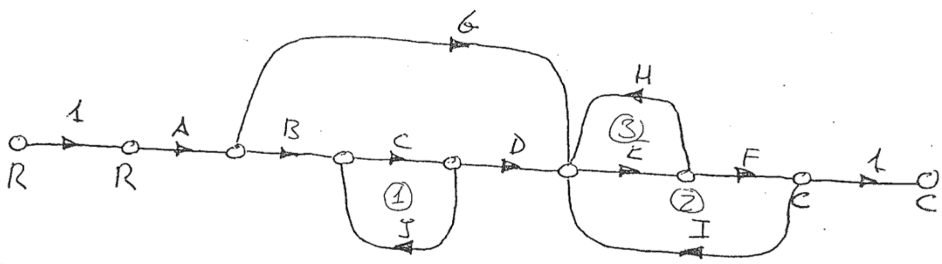
- Término $\sum_i T_i \Delta_i$
  - $T_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$
  - $\Delta_1 = 1 - (G_6 H_3)$



- Por tanto: $G = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta}$

Ej.

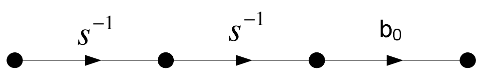
- Aplicar Mason para obtener la relación de mando:



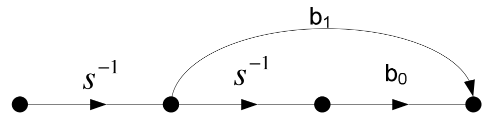
Formas de Kalman

- Dada la FT obtener un DF equivalente.
- Se utilizaba para obtener una simulación de FT en el calculador analógico a base de integradores y amplificadores.
- 1ª forma: todos los trayectos y lazos pasan por el primer nodo:
  - Todos los $\Delta_i = 1$;
  - No hay lazos disjuntos
- Entonces:
  - $G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\sum_i T_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{\sum_i T_i}{1 - \sum_a L_a}$

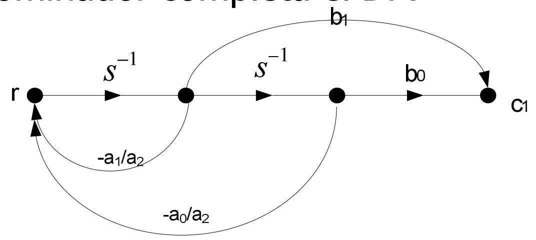
- En el numerador viene dada la expresión de los trayectos directos y en el denominador de los lazos.
- Para poder simular integradores se divide num y denominador por la mayor potencia de s
- Ej: $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{\frac{b_1}{s} + \frac{b_0}{s^2}}{a_2 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_0}{s^2}} = \frac{1}{a_2} \frac{b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 - (-\frac{a_1}{a_2} s^{-1} - \frac{a_0}{a_2} s^{-2})}$
- Cada integrador es una rama directa del DF



- El numerador de la FT son ramas hacia adelante:



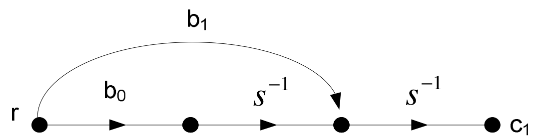
- El denominador completa el DF:

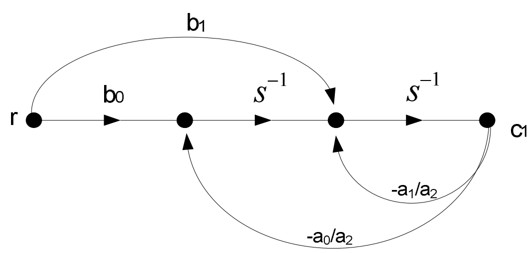


- ¿Y el factor $1/a_2$?

2ª forma de Kalman

- Se hace pasar los trayectos directos y los lazos por el último nodo (y $^1/_{a_2}$?).



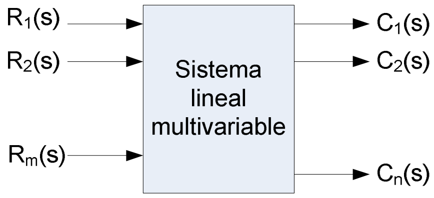


Ej.

- Hallar 1ª y 2ª forma de Kalman de la siguiente FT:
  - $G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_o}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

Sistemas MIMO

- Varias entradas (m) y salidas (n).
- Se representa por matrices de transferencia
- Aplicando el principio de superposición (LTI), habría $n \cdot m$ FT: todas con el mismo denominador (ec. característica)
- Producto de matrices: $\overline{C}\ (s) = \overline{G}\ (s)\overline{R}\ (s)$



- $C(s)\ [nx1];\ R(s)\ [mx1]; G(s)\ [nxm]$
- Por el principio de superposición podemos calcular cada ganancia:
  - $G_{ij} = \left.\frac{C_i}{R_j}\right|_{R_{m\neq j}=0}$
- El valor de la salida i para el conjunto de las m entradas (suma de las respuestas a cada entrada)
  - $C_i(s) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(s)R_j(s) = \overline{G_i}(s) \cdot \overline{R}(s)$