Departamento de Automática

Universidad de Alcalá

Ingeniería de Control I
Tema 7
Análisis temporal

7. Análisis temporal.

- Régimen transitorio y permanente
- Señales normalizadas de entrada
- Respuesta a escalón de sistemas de tiempo continuo
- Relación entre la respuesta temporal y la situación de los polos
- Sistemas equivalentes de orden reducido

Bibliografía

- Señales y Sistemas. OCW-UC3M
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo
- Feedback control systems. J.V. de Vegte.

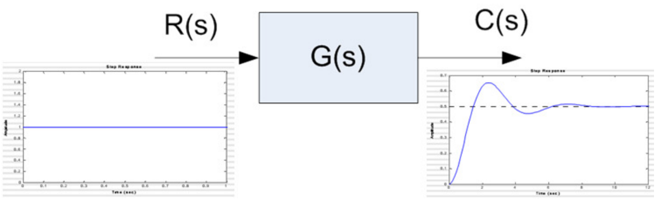
Objetivos

- Introducir el concepto de respuesta en rp y rt
- Desarrollar el cálculo de la salida de sistemas
- Obtener los errores en rp
- Obtener la variación del error en rp

Introducción

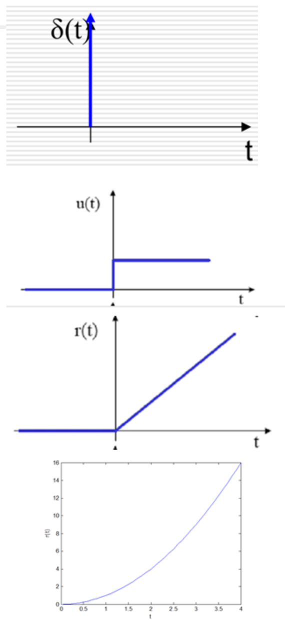
- Objetivos del análisis en el tiempo
  - Análisis de estabilidad: ante entrada acotada, salida acotada
  - Análisis del régimen permanente: capacidad del sistema de seguir a la entrada en régimen permanente (error)
  - Análisis dinámico, caracterización de la respuesta transitoria ante una entrada antes de llegar al régimen permanente (rapidez, oscilaciones, etc.)

- $C(s) = G(s)R(s) \Rightarrow \begin{cases} c(t) = g(t) * r(t) \\ c(t) = L^{-1}[G(s)R(s)] \end{cases}$



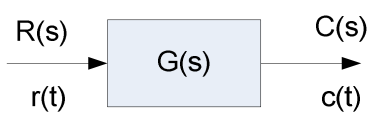
  - $c(t) = c_{rt}(t) + c_{rp}(t)$

Señales normalizadas



- Impulso
  - $r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1$
- Escalón
  - $r(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$
- Rampa
  - $r(t) = tu(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$
- Parábola
  - $r(t) = t^2 u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{2}{s^3}$

Respuesta a un escalón



- Respuesta:
  - $C(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s}$

- O tb a partir de la expresión racional de G(s)
  - $G(s)=\frac{N(s)}{\prod_i(s+\sigma_i)\prod_q\left((s+\alpha_q)^2+\beta_q{}^2\right)}\Rightarrow$
  - $C(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{N(s)}{s\prod_i(s+\sigma_i)\prod_q\left((s+\alpha_q)^2+\beta_q{}^2\right)}=\frac{A}{s}+\sum_i\frac{B_i}{(s+\sigma_i)}+$

    $+\sum_q\frac{C_qs+D_q}{(s+\alpha_q)^2+\beta_q{}^2}$
  - Tablas:

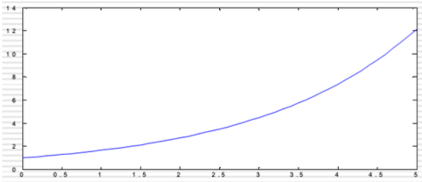
$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b}e^{-at}\sin(bt+\phi)\quad \phi=\tan^{-1}\frac{b}{\alpha-a}$

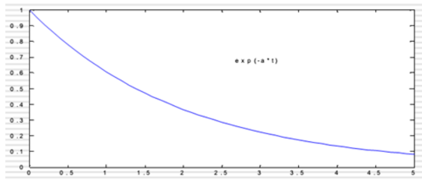
  - $c(t)=G(0)+\sum_i B_ie^{-\sigma_it}+\sum_q E_qe^{-\alpha_qt}\sin(\beta_qt+\varphi_q)\,;t\geq 0$

Ej.

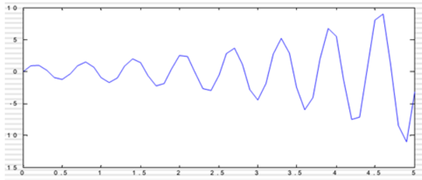
- $G(s)=\frac{3s^3-10s^2+21s-30}{s^3-5s^2+11s-15}=\frac{3s^3-10s^2+21s-30}{(s-3)(s-1+2j)(s-1-2j)}$
- $C(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{3s^3-10s^2+21s-30}{s(s-3)(s-1+2j)(s-1-2j)}=\frac{3s^3-10s^2+21s-30}{s(s-3)[(s-1)^2+2^2]}$
- $C(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s-3)}+\frac{Cs+D}{(s^2-2s+5)}$
- Como son polos simples se puede calcular por el teorema de los residuos o bien primero el residuo de los polos

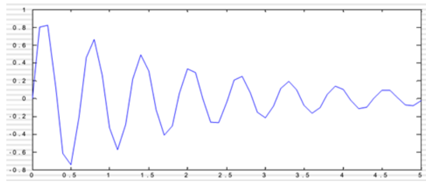
- Términos $B_i e^{-\sigma_i t}$ (polo en $(s+\sigma_i)$), dependiendo de $\sigma_i \lesseqgtr 0$





- Términos $E_q e^{-\alpha_q t}\sin(\beta_q t + \varphi_q)$ (polos complejos en $((s+\alpha_q)^2 + {\beta_q}^2)$), dependiendo de $\alpha_q \gtreqless 0$





Posición de los polos

- Un sistema es estable si salida es acotada cuando la entrada lo es. Ante escalón debe dar valor finito y fijo.
  - POLOS EN SEMIPLANO NEGATIVO
- Tb se ve si es estable si la respuesta impulsiva es absolutamente integrable
- ¿Respuesta impulsiva a partir de la respuesta a escalón? (LTI)
- Ganancia estática: régimen permanente (ante

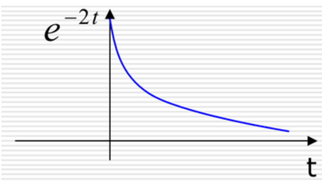
Relación de situación de polos con respuesta temporal

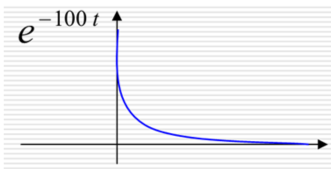
- Rapidez (en llegar a rp o en desaparecer rt): depende de la distancia al eje imaginario.
  - $e^{-\sigma_i t}, e^{-\alpha_q t}$
    - $e^{-200t}\ con\ t = 1 \Rightarrow\ e^{-200}$
    - $e^{-2t}\ con\ t = 100 \Rightarrow\ e^{-200}$

- Oscilaciones: depende de la parte imaginaria de los polos complejos $\alpha_q \pm j\beta_q$
  - $E_q e^{-\alpha_q t} \sin(\beta_q t + \varphi_q)$

Polo dominante

- La respuesta transitoria de los polos con parte real negativa (semiplano izdo) se atenúan más rápidamente cuanto mayor es su valor absoluto (cuanto más alejados del eje).

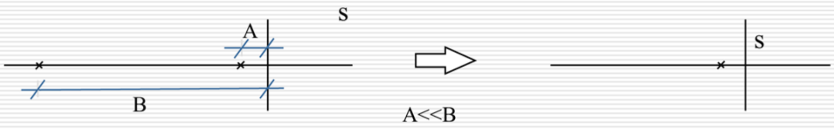




- Polos dominantes: cercanos al eje $j\omega$

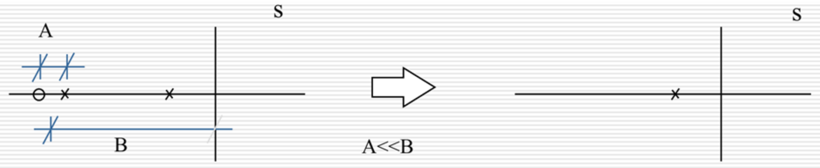
Cancelación de raíces no dominantes

- Para polos alejados del eje



$$6 \cdot A \leq B$$

- Para ceros-polos cercanos



$$6 \cdot A \leq B$$

- Se debe mantener la ganancia estática

Ej.

- $G(s) = \frac{3(s+1)}{(s+2)(s+1.5)(s+10)}$, $6 \cdot 1.5 < 10;$
  - $\hat{G}(s) = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+1.5)}$
  - $\hat{G}(0) = G(0)$
  - K?
- $G(s) = \frac{2(s+6)}{(s+2)(s+6.5)(s+1)}$, $(6.5 - 6) \cdot 6 < 6.25$

Polos y ceros adicionales

- Añadir un polo a un sistema retarda y reduce el pico de la respuesta
- El sistema se hace más lento

- Añadir un cero a un sistema adelanta y aumenta el pico de la respuesta.
- El sistema se hace más rápido

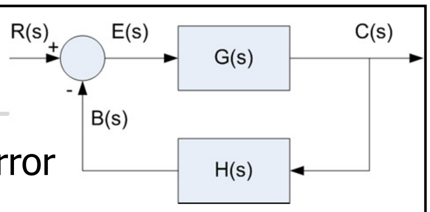
- En ambos casos el efecto se aprecia más cuanto más cerca del eje $j\omega$ se encuentre la raíz.

Régimen permanente (sistemas realimentados)

- El error en rp nos indicará la precisión del sistema
- En sistemas realimentados el error en la salida viene definido por la señal de error a la entrada de G(s)
- El error del sistema dependerá del tipo de entrada, de la ganancia en lazo abierto ($G(s)H(s)$) y del tipo de sistema.

- A partir de la forma canónica de un sistema realimentado obtenemos su FT en lazo abierto y su ganancia K en lazo abierto:
  - $G(s)H(s) = \frac{K(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{s^r(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}$
- El exponente r define el tipo de sistema:
  - Tipo 0, r=0
  - Tipo 1, r=1
  - Tipo 2, r=2
  - Tipo 3, r=3
- Aumentar el tipo aumenta exactitud pero genera inestabilidad

Errores en rp



- Calculamos la expresión del error
  - $C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s)$
  - $C(s) = E(s)G(s)$
  - Despejando $E(s)$
- Por el teorema del valor final:
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$

Sistemas tipo 0

- Escalón $r(t) = R_0 u(t), R(s) = R_0/s$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_0(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}} \frac{R_0}{s} = \frac{R_0}{1+K_0}$
  - Error de posición: es finito, $e_p\% = \frac{e_{ss}}{R_0} \cdot 100 = \frac{1}{1+K_0} \cdot 100$
  - Señal de realimentación $b(t)_{ss} = r(t) - e(t)_{ss}$
- Rampa $\mathrm{r}(t) = R_1 t u(t), R(s) = R_1/s^2$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_0(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}} \frac{R_1}{s^2} = \infty$
  - Error de velocidad: es infinito, el sistema es incapaz de seguir la señal de rampa y se perderá su control

- Parábola $\mathrm{r}(t) = R_2 t^2 u(t), R(s) = 2R_2/s^3$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_0(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}} \frac{2R_2}{s^3} = \infty$
  - Error de aceleración: es infinito, el sistema es incapaz de seguir la señal en parábola y se perderá su control
- El sistema tipo 0 solo es controlable por una señal de entrada escalón, con un error finito inversamente proporcional a la ganancia en lazo abierto K

Sistemas tipo 1

- Escalón $r(t) = R_0 u(t), R(s) = R_0/s$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s\ \ (1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} \frac{R_0}{s} = 0$
  - Error de posición: es 0
- Rampa $\mathrm{r}(t) = R_1 tu(t), R(s) = R_1/s^2$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s\ \ (1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} \frac{R_1}{s^2} = \frac{R_1}{K_1}$
  - Error de velocidad: es finito, $e_v\% = \frac{e_{ss}}{R_1} \cdot 100 = \frac{1}{K_1} \cdot 100$

- Parábola $\mathrm{r}(t) = R_2 t^2 u(t), R(s) = 2R_2/s^3$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s\,(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} \frac{2R_2}{s^3} = \infty$
  - Error de aceleración: es infinito, el sistema es incapaz de seguir la señal en parábola y se perderá su control
- El sistema tipo 1 es controlable por una entrada escalón con error 0 y con una entrada en rampa con un error finito inversamente proporcional a la

Sistemas tipo 2

- Escalón $r(t) = R_0 u(t), R(s) = R_0/s$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_2(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{s^2(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}} \frac{R_0}{s} = 0$
  - Error de posición: es 0
- Rampa $\mathrm{r}(t) = R_1 t u(t), R(s) = R_1/s^2$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_2(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{s^2(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}} \frac{R_1}{s^2} = 0$
  - Error de velocidad: es 0

- Parábola $\mathrm{r}(t) = R_2 t^2 u(t), R(s) = 2R_2/s^3$
  - $e(t)_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_2(1+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_m s^m)}{s^2\,(1+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_n s^n)}} \frac{2R_2}{s^3} = \frac{2R_2}{K_2}$
  - Error de aceleración: es finito, $e_a\% = \frac{e_{ss}}{R_2} \cdot 100 = \frac{2}{K_2} \cdot 100$
- El sistema tipo 2 es controlable por una entrada escalón y rampa con error 0 y con una entrada en parábola con un error finito inversamente proporcional a la ganancia en lazo abierto K

Coeficientes estáticos de error

- Son parámetros que dan la medida del comportamiento del sistema realimentado en rp
- Están relacionados con los errores de posición, velocidad y aceleración
  - C.E. de error de posición K_p: cociente entre $b(t)_{ss}$ y $e(t)_{ss}$:
    - $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$
  - C.E. de error de velocidad K_v: cociente entre el régimen permanente de la variación de b(t) y $e(t)_{ss}$:
    - $K_v = \dfrac{\left(\frac{db(t)}{dt}\right)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \dfrac{Db(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$

- C.E. de error de aceleración K_a: cociente entre el rp de la derivada de la variación de b(t) y $e(t)_{ss}$:
  - $K_a = \dfrac{\left(\frac{d^2b(t)}{dt}\right)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \dfrac{D^2b(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \lim_{s \to 0} s^2G(s)H(s)$

- $b(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} sB(S) =$
$\lim_{s\to 0} s \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}}{1+\frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} R(s)$
- $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_0(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} R(s)$
- CE de error sistema tipo 0:
  - Entrada escalón ($R(s) = {}^{R_0}/_{s}$):
    - $b(t)_{ss} = \frac{K_0}{1+K_0} R_0$; $e(t)_{ss} = \frac{1}{1+K_0} R_0$
    - $K_p = \frac{b(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = K_0$
  - Entrada rampa: $K_v = 0$
  - Entrada parábola: $K_a = 0$

- $Db(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot sB(S) =$
$\lim_{s\to 0} s^2 \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s\ (1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s\ (1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} R(s)$
- $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s\ (1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} R(s)$
- CE de error sistema tipo 1:
  - Entrada escalón: $K_p = \infty$
  - Entrada rampa ($R(s) = {}^{R_1}/_{s^2}$):

- $D^2b(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s\cdot s^2 B(S) =$

$$\lim_{s\to 0} s^3 \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s\to 0} s^3 \frac{\frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}}{1+\frac{K_1(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} R(s)$$

- $e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)}} R(s)$
- CE de error sistema tipo 2:
  - Entrada escalón: $K_p = \infty$
  - Entrada rampa: $K_v = \infty$
  - Entrada parábola ($R(s) = {}^{2R_2}/_{s^3}$):
    - $K_a = \frac{D^2b(t)_{ss}}{e(t)_{ss}} = \frac{\lim_{s\to 0}(\dots)}{\lim_{s\to 0}(\dots)} =$ (num y den no se hacen 0 o ∞ simultáneamente) $=$

$$= \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K_2(1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ns^n)} = K_2$$

Resumen

- Tabla resumen

	Err. en escalón	Err. En rampa	Err. En parábola	K_p	K_v	K_a
Tipo 0	$\frac{R_0}{1+K_p} = \frac{R_0}{1+K_0}$	∞	∞	K_0	0	0
Tipo 1	0	$\frac{R_1}{K_v} = \frac{R_1}{K_1}$	∞	∞	K_1	0
Tipo 2	0	0	$\frac{2R_2}{K_a} = \frac{2R_2}{K_2}$	∞	∞	K_2

Coeficientes dinámicos de error

- Nos permiten calcular cómo varía la señal de error e(t) en rp, se denomina $e(t)_s$
  - $E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = W(s)R(s)$
  - Desarrollando Taylor para s=0 (t=∞):
  - $W(s) = W(0) + s \cdot \frac{d}{ds}W(s)\Big|_{s=0} + \frac{1}{2!}s^2\frac{d^2}{ds}W(s)\Big|_{s=0} + \cdots + \frac{1}{n!}s^n\frac{d^n}{ds}W(s)\Big|_{s=0}$

- Se definen los coeficientes como
  - $C_0 = W(0) = \lim_{s\to 0} W(s)$
  - $C_1 = W'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}W(s)$
  - $C_n = W^{(n)}(0) = \lim_{s\to 0} \frac{d^n}{ds}W(s)$
- Reescribiendo W(s)

- Entonces E(s)
  - $E(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + \frac{1}{2!} C_2 s^2 R(s) + \cdots + \frac{1}{n!} C_n s^n R(s)$
- Haciendo la TIL
  - $e(t)_s = C_0 r(t) + C_1 \frac{d}{dt} r(t) + \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2}{dt} r(t) + \cdots + \frac{1}{n!} C_n \frac{d^n}{dt} r(t)$
- Obtenemos la variación de la señal de error en rp, siendo su límite el error en rp $e(t)_{ss}$.

Tabla de TL

1	$\delta(t)$	1	All s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\{s\} > \alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	para toda s

Propiedades (TL bilateral)

Propiedad	Señal	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R [es decir, s está en la ROC si $(s - s_0)$ está en R]
9.5.4	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC "escalada" [es decir, s está en la ROC si (s/a) está en la ROC de $X(s)$]
9.5.5	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.6	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.7	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.8	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}$